Chapitre 2

La droite réelle, le plan complexe et l'espace euclidien

2.1 Champs

2.1.1 Définition d'un champs

Définition 2.1.1 Un ensemble $\mathbb{K}$ muni d'une application addition et d'une application multiplication :

$$\cdot + \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad \cdot \times \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

(pour la multiplication, on écrit xy plutôt que $x \times y$) est un *champ* s'il vérifie les relations suivantes pour tous éléments x, y et z de $\mathbb{K}$:

axiomes de l'addition :
- $x + y = y + x$ (commutativité)
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)
- il existe un élément $0 \in \mathbb{K}$ tel que $x + 0 = x$ (élément neutre)
- il existe un élément $-x \in \mathbb{K}$ tel que $x + (-x) = 0$ (inverse additif, opposé)

axiomes de la multiplication :
- $xy = yx$ (commutativité)
- $(xy)z = x(yz)$ (associativité)
- il existe un élément $1 \in \mathbb{K}$, avec $1 \neq 0$ tel que $x1 = x$ (élément neutre)
- si $x \neq 0$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $xx^{-1} = 1$ (inverse multiplicatif)

axiome de distributivité :
- $x(y + z) = xy + xz$ (distributivité).

On remarque immédiatement que les éléments neutres sont uniques ; par exemple si 0 et $0'$ sont deux éléments neutres pour l'addition, on a

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'.$$

Dans un champs, les notations suivantes sont licites :
- $x + y + z = (x + y) + z$,
- $xyz = (xy)z$,
- $x - y = x + (-y)$,
- $x^2 = xx$, $x^{n+1} = x^n x$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

Exemple 2.1.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$ muni des opérations

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs} \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$$

est un champs, acec $-\frac{p}{q}=\frac{-p}{q}$ et $(\frac{p}{q})^{-1}=\frac{q}{p}$.

Exemple 2.1.3 L'ensemble $\mathbb{K}=\{0,1\}$ muni des opérations

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

est un champs avec $-0=0$, $-1=1$ et $1^{-1}=1$.

Proposition 2.1.4 *Soient $\mathbb{K}$ un champs ; pour tous $x,y,z\in\mathbb{K}$, on a*

(a)	$x+y=x+z\Rightarrow y=z$,	(b)	$x+y=x\Rightarrow y=0$,
(c)	$x+y=0\Rightarrow y=-x$,	(d)	$-(-x)=x$,
(e)	$0x=0$,	(f)	$xy=xz\rightarrow(x=0 \text{ ou } y=z)$,
(g)	$xy=x\Rightarrow(x=0 \text{ ou } y=1)$,	(h)	$xy=1\Rightarrow y=x^{-1}$,
(i)	$(x^{-1})^{-1}=x \text{ si } x\neq 0$	(j)	$xy=0\Rightarrow(x=0 \text{ ou } y=0)$,
(k)	$(-x)y=-(xy)$,	(l)	$(-x)(-y)=xy$.

Preuve. Pour le premier point, on a

$$\begin{aligned} x+y=x+z &\Rightarrow -x+(x+y)=-x+(x+z)\Rightarrow(-x+x)+y=(-x+x)+z \\ &\Rightarrow 0+y=0+z\Rightarrow y=z. \end{aligned}$$

Le point (b) s'obtient à partir du point (a) en posant $z=0$. Le point (c) s'obtient également à partir du point (a) en posant $z=-x$. Pour le point (d), il suffit d'utiliser le point (c) avec $x=-x$ et $y=x$. Le point (e) s'obtient comme suit : on a $0x+0x=(0+0)x=0x$ et donc $0x=0$.

Les points (f)–(i) se démontrent de même. Pour (j), il suffit de poser $z=0$ dans (f). Pour (k), on a

$$(-x)y+xy=(-x+x)y=0\Rightarrow -(xy)=(-x)y.$$

Enfin, (l) s'obtient comme suit :

$$(-x)(-y)=-(x(-y))=-((-y)x)=-(-(yx))=yx=xy,$$

ce qui suffit. □

2.1.2 Ensembles ordonnés

Définition 2.1.5 Soit E un ensemble ; une relation binaire $\leqslant$ sur E est une *relation d'ordre* si pour tous éléments x,y et z de E on a :
- $x\leqslant x$ (réflexivité),
- $(x\leqslant y$ et $y\leqslant x)\Rightarrow x=y$ (antisymétrie),
- $(x\leqslant y$ et $y\leqslant z)\Rightarrow x\leqslant z$ (transitivité).

Définition 2.1.6 Un *ensemble ordonné* est un ensemble muni d'une relation d'ordre. Si E est un ensemble et $\leqslant$ une relation d'ordre sur E, l'ensemble ordonné correspondant est noté $(E, \leqslant)$.

Exemple 2.1.7 Si E est un ensemble, $\wp(E)$ muni de la relation inclusion $\subset$ est un ensemble ordonné.

Définition 2.1.8 Un ensemble *totalement ordonné* $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ dans lequel deux éléments peuvent toujours être comparés : pour tous $x, y \in E$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Si $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné, on écrit $x < y$ si $x \leqslant y$ et $x \neq y$ et $x \geqslant y$ si $y \leqslant x$.

On peut introduire la notion d'intervalle sur un ensemble ordonné.

Définition 2.1.9 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné ; pour tous $a, b \in E$, on pose

$$\begin{array}{ll} [a,b] = \{x \in E : a \leqslant x \text{ et } x \leqslant b\}, &]a,b[= \{x \in E : a < x \text{ et } x < b\}, \\ ]a,b] = \{x \in E : a < x \text{ et } x \leqslant b\}, & [a,b[= \{x \in E : a \leqslant x \text{ et } x < b\}. \end{array}$$

On trouve parfois la notation (a, b) (notation anglo-saxone) au lieu de $]a, b[$.

Exemples 2.1.10 Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ munis de l'ordre naturel (i.e. $n \leqslant m$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + k = m$) sont des ensembles (totalement) ordonnés. L'ensemble $\mathbb{Q}$ avec l'ordre $\frac{p}{q} \leqslant \frac{r}{s}$ si $ps \leqslant rq$ lorsque $q, s \in \mathbb{N}_0$ (il faut considérer les dénominateurs positifs) est aussi un ensemble totalement ordonné.

Définition 2.1.11 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné ; une partie E' de E est *majorée* (dans E) s'il existe un élément x de E tel que $y \in E' \Rightarrow y \leqslant x$ (i.e. x est supérieur ou égal à tous les éléments de E'). L'élément x est appelé un *majorant* de E' (dans E).

Définition 2.1.12 Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné et E' une partie de E ; une *borne supérieure* ou *supremum* de E' est un majorant x de E' tel que pour tout majorant y de E', on aie $x \leqslant y$ (i.e. c'est le plus petit des majorants). Si elle existe, on note $\sup E'$ la borne supérieure de E'.

On remarque immédiatement que, si elle existe, la borne supérieure d'un ensemble est unique : supposons que x et x' soient deux borne supérieures de E'. Puisque x est un majorant et que x' est une borne supérieure, on a $x' \leqslant x$. En inversant les rôles de x et x', on obtient $x \leqslant x'$. On total, l'antisymétrie implique $x = x'$.

Vu ce qui précède, $x = \sup E'$ est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in E' \Rightarrow y \leqslant x \\ \forall y : y < x, \exists z \in E' : y < z \end{array} \right. .$$

De fait, supposons qu'il existe $y < x$ tel que, pour tout $z \in E'$, on aie $z \leqslant y$. Il en résulte que y est un majorant de E' tel que $y < x$, ce qui est absurde.

Définition 2.1.13 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné ; une partie E' de E est *minorée* (dans E) s'il existe un élément x de E tel que $y \in E' \Rightarrow x \leqslant y$ (i.e. x est inférieur ou égal à tous les éléments de E'). L'élément x est appelé un *minorant* de E' (dans E).

Définition 2.1.14 Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné et E' une partie de E ; une *borne inférieure* ou *infimum* de E' est un minorant x de E' tel que pour tout minorant y de E', on aie $y \leqslant w$ (i.e. c'est le plus grand des minorants). Si elle existe, on note $\inf E'$ la borne inférieure de E'.

Donnons un exemple fondamental.

Exemple 2.1.15 Considérons l'ensemble totalement ordonné $\mathbb{Q}$ et $E = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$. Cet ensemble est trivialement majoré (le nombre 10 est par exemple un majorant), mais il n'admet pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$. Supposons que s soit la borne supérieure de E et posons

$$q = s - \frac{s^2 - 2}{s + 2} = \frac{2s + 2}{s + 2}.$$

On a

$$q^2 - 2 = \frac{4(s+1)^2}{(s+2)^2} - \frac{2(s+2)^2}{(s+2)^2} = \frac{2(s^2 - 2)}{(s+2)^2}.$$

De là, si $s^2 < 2$, alors $q > s$ et $q^2 - 2 < 0$. Ainsi, q est un élément de E, ce qui est contradictoire, car s est un majorant de E. Si $s^2 > 2$, alors $q < s$ et $q^2 - 2 > 0$, ce qui implique que q est un majorant de E inférieur à s. Il s'ensuit que $s^2 = 2$, ce qui contredit le théorème 1.1.2.

La borne supérieure peut exister mais ne pas appartenir à l'ensemble.

Exemple 2.1.16 L'ensemble $\{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ admet 0 comme borne supérieure, mais 0 n'est pas un élément de l'ensemble.

Notation 2.1.17 Si la borne supérieure d'un ensemble E existe et appartient à E, on la note $\max E$ plutôt que $\sup E$ et on l'appelle le *maximum* de E. De la même manière, on note $\min E$ l'infimum de E si cet élément appartient à E ; il est alors appelé le minimum de E.

Si $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné, l'ensemble $\{x_1, x_2\}$ admet trivialement un maximum et un minimum. Par récurrence, tout ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ admet un minimum et un maximum. On les notes $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$ respectivement ou $x_1 \vee \cdots \vee x_n$ et $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$.

2.1.3 Champs ordonnés

Définition 2.1.18 Un champs $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K}$ soit un ensemble totalement ordonné est un *champs ordonné* si l'ordre est compatible avec la structure du champs, c'est-à-dire si, pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$, on a

- $x < y \Rightarrow (x + z < y + z)$,
- $(x > 0 \text{ et } y > 0) \Rightarrow xy > 0$.

Exemples 2.1.19 Voici quelques exemples fondamentaux

- On vérifie directement que $\mathbb{Q}$ est un champs ordonné.
- Considérons l'ensemble $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ muni des opérations de l'exemple 2.1.3. Il n'existe pas d'ordre sur $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K}$ soit un champs ordonné. En effet, si $0 < 1$, alors $0 + 1 < 1 + 1$, c'est-à-dire $1 < 0$, ce qui est absurde car la transitivité implique alors $0 < 0$. De même, si $1 < 0$, on a $1 + 1 < 0 + 1$ et donc $0 < 1$, ce qui implique $1 < 1$.

Définition 2.1.20 Soit $\mathbb{K}$ un champs ordonné ; un élément x de $\mathbb{K}$ est positif (resp. négatif) si $x \geqslant 0$ (resp. $x \leqslant 0$). Il est strictement positif (resp. strictement négatif) si $x > 0$ (resp. $x < 0$).

Proposition 2.1.21 *Soit $\mathbb{K}$ un champs ordonné ; pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$, on a*

$$\begin{array}{llll} (a) & x > 0 \Leftrightarrow -x < 0, & (b) & (x > 0 \text{ et } y < z) \Rightarrow xy < xz, \\ (c) & (x < 0 \text{ et } y < z) \Rightarrow xy > xz, & (d) & x^2 \geqslant 0, \\ (e) & 0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}, & (f) & 1 > 0. \end{array}$$

Preuve. Pour (a), il suffit de noter que

$$0 < x \Rightarrow 0 - x < x - x \Rightarrow -x < 0$$

et

$$-x < 0 \Rightarrow -x + x < 0 + x \Rightarrow 0 < x.$$

Pour (b),

$$z > y \Rightarrow z - y > 0 \Rightarrow x(z - y) > 0 \Rightarrow xz - xy > 0 \Rightarrow xz > xy.$$

Démontrons (c) ; on a

$$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -x(z - y) > 0 \Rightarrow -xz + xy > 0 \Rightarrow xy > xz.$$

En ce qui concerne le point (d), si $x = 0$, $x^2 = 0$; si $x > 0$, alors $x^2 = xx > 0$. Enfin, si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $(-x)^2 = (-x)(-x) = xx = x^2 > 0$. Pour (e), puisque $1 = xx^{-1}$, on a $x^{-1} > 0$; le même raisonnement implique $y^{-1} > 0$. Ainsi,

$$x^{-1}y^{-1} > 0 \Rightarrow (x^{-1}y^{-1}x < x^{-1}y^{-1}y) \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}.$$

Le dernier point résulte du point (d) avec $x = 1$, puisque $1 \neq 0$. $\square$

Nous pouvons maintenant introduire les nombres réels. Ce résultat sera démontré en annexe.

Théorème 2.1.22 *Il existe un champs ordonné $\mathbb{R}$ tel que*
- *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et les restrictions des opérations de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Q}$ coïncident avec les opérations usuelles de $\mathbb{Q}$,*
- *toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

De ce résultat, on obtient que toute partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Définition 2.1.23 Un élément de $\mathbb{R}$ est appelé un *nombre réel*.

L'ensemble $\mathbb{R}$ définit un corps archimédien.

Théorème 2.1.24 *Soient x et y deux nombres réels ;*
- *si $x > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$,*
- *si $x < y$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.*

Preuve. Montrons le premier point par l'absurde, en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aie $nx < y$. L'ensemble $E = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par y et par le théorème 2.1.22, il admet une bonne supérieure $s = \sup E$. Puisque $x > 0$, on a $s - x < s$ et, puisque s est la borne supérieure de E, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s - x < nx$. On obtient donc $s < (n+1)x$, ce qui est absurde car s ne peut alors être un majorant de E.

Pour le second point, puisque $y - x > 0$, le premier point implique l'existence d'un nombre naturel n tel que $n(y - x) > 1$. Puisque $1 > 0$, ce même point implique, en prenant $x = 1$ et $y = -nx$, l'existence d'un nombre $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > -nx$ et, en prenant $x = 1$ et $y = nx$, l'existence d'un nombre $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > nx$. On a donc trouvé deux nombres naturels j et k tels que $-j < nx < k$. Soit m le plus petit entier appartenant à $\{-j, \ldots, k\}$ tel que $nx < m$. Il s'ensuit que $m - 1 \leqslant nx < m$. En remarquant que

$$nx < m \leqslant 1 + nx < ny,$$

on obtient

$$x < \frac{m}{n} < y,$$

ce qui suffit. □

Le théorème 1.1.2 nous permet d'affirmer que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Dans $\mathbb{R}$, ce problème trouve une solution.

Proposition 2.1.25 (Racine) *Pour tout nombre réel $r \geqslant 0$, il existe un seul nombre réel $x \geqslant 0$ tel que $x^2 = r$.*

Preuve. Soit $E = \{x \geqslant 0 : x^2 \leqslant r\}$; cette partie est non-vide et majorée. Montrons que le nombre $s = \sup E$ est tel que $s^2 = r$.

Si $s^2 < r$, alors il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $(s+\varepsilon)^2 = s^2 + \varepsilon(2s+\varepsilon) < r$ (il suffit de prendre $\varepsilon < s + 1$ et $\varepsilon < \frac{r-s^2}{3s+1}$). Il s'ensuit que $s + \varepsilon \in E$, ce qui est absurde.

Si $s^2 > r$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(s-\varepsilon)^2 = s^2 - \varepsilon(2s-\varepsilon) > r$, ce qui implique que $s - \varepsilon$ est un majorant de E, ce qui est absurde. □

2.1.4 Les nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$, il nous est toujours impossible de résoudre des équations telles que $x^2 = -1$.

Définition 2.1.26 Le champs des complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication définies comme suit :

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \qquad (x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

On vérifie directement qu'il s'agit d'un champs où
- $(0, 0)$ est l'élément neutre pour l'addition,
- $(-x, -y)$ est l'opposé de (x, y),
- $(1, 0)$ est le neutre pour la multiplication,
- $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ est l'inverse de (x, y) si $(x, y) \neq (0, 0)$.

La fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, 0)$$

est une injection telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$. Elle nous permet d'identifier $\mathbb{R}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{C}$; nous écrirons toujours x au lieu de $(x, 0)$ pour désigner $f(x)$.

On pose également $i = (0, 1)$. Ce nombre complexe vérifie

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = -1,$$

ce qui implique que $z = i$ est solution de l'équation $z^2 = -1$. Si $z = (x, y)$ est un nombre complexe, on a $z = (x, 0)+(0, 1)(y, 0)$, c'est-à-dire $z = x+iy$. Cette mise en forme simplifie grandement les calculs.

Définition 2.1.27 Si $z = (x, y)$ est un nombre complexe, la *partie réelle* de z est le nombre réel $\Re z = x$ et la *partie imaginaire* de z est le nombre réel $\Im z = y$.

Deux nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si $\Re z_1 = \Re z_2$ et $\Im z_1 = \Im z_2$.

Définition 2.1.28 Si $z = (x, y)$ est un nombre complexe, le *conjugué* de z est le nombre complexe $\bar{z} = (x, -y)$.

Si $z = x + iy$, on a donc $\bar{z} = x - iy$.

Proposition 2.1.29 *Soient z et z' deux nombres complexes ; on a*

$$\begin{array}{llll} (a) & \Re z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), & (b) & \Im z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}), \\ (c) & \overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}', & (d) & \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \\ (e) & z\bar{z} \geqslant 0, & (f) & \text{si } z \neq 0,\ z\bar{z} > 0. \end{array}$$

Preuve. Pour le point (c), on trouve $\Re(z + z') = \Re z + \Re z'$ et $\Im(z + z') = \Im z + \Im z'$. Le point (d) se traite de manière identique, puisque $\Re(zz') = \Re z \Re z' - \Im z \Im z' = \Re(\overline{zz'})$, $\Im(zz') = \Re z \Im z' + \Im z \Re z'$ et $\Im(\bar{z}\bar{z}') = -\Re z \Im z' - \Im z \Re z'$.

Pour (a), on vérifie directement que $\Re(z + \bar{z}) = 2\Re z$ et $\Im(z + \bar{z}) = 0$. On procède de même pour (b) : $\Re(z - \bar{z}) = 0$ et $\Im(z - \bar{z}) = 2\Im z$.

Si le nombre complexe z s'écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. □

2.2 Compléments concernant les nombres réels

La droite $\mathbb{R}$ peut être équipée d'une structure relativement riche.

2.2.1 Module d'un nombre réel

Définition 2.2.1 Le *module* sur $\mathbb{R}$ est la fonction $|\cdot|$ définie comme suit,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad r \mapsto |r| = \begin{cases} r & \text{si } r \geqslant 0 \\ -r & \text{si } r < 0 \end{cases}.$$

Remarquons que pour tout nombre réel r, $|r| = \sqrt{r^2}$.

Remarque 2.2.2 La fonction $|\cdot|$ se prolonge sur $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}.$$

Proposition 2.2.3 *Soient r et s deux nombres réels. Les relations suivantes sont toujours vérifiées :*
- $|r| \geqslant 0$,
- $|r| = 0 \Leftrightarrow r = 0$,
- $|rs| = |r||s|$,
- $|r + s| \leqslant |r| + |s|$,
- $||r| - |s|| \leqslant |r - s|$.

Ces propriétés peuvent se démontrer directement mais seront obtenues dans un cadre plus général par la suite.

2.2.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les notations qui suivent ont déjà été présentées dans le cadre d'un champs ordonné.

Soient a et b deux nombres réels. On définit les ensembles suivants :
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$,
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$,
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$,
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$,
- $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
- $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Définition 2.2.4 Un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est un ensemble qui s'écrit sous l'une des formes précédentes. Les intervalles $]a, b]$, $] - \infty, b]$, $]a, +\infty[$ et $] - \infty, +\infty[$ sont aussi appelés des *semi-intervalles*. Si le nombre a intervient dans la définition de l'intervalle, il est appelé l'origine de l'intervalle. Si le nombre b intervient dans la définition de l'intervalle, il est appelé l'extrémité de l'intervalle. S'ils interviennent tous les deux, la longueur de l'intervalle est le nombre $b - a$. Si le signe infini « ∞ » intervient dans la définition, on dit que l'intervalle est de longueur infinie.

Parfois, le signe « $+$ » devant le symbole infini n'est pas stipulé : on écrit par exemple $[a, \infty[$ à la place de $[a, +\infty[$. Dans la notation anglo-saxonne, les crochets ouverts sont remplacés par des parenthèses ; on écrit ainsi $(a, b]$ au lieu de $]a, b]$.

2.2.3 Signature et partie négative

Définition 2.2.5 La *signature* sur $\mathbb{R}_*$ est la fonction

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R}_* \to \{-1, 1\} \quad r \mapsto \mathrm{sign}(r) = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } r > 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{array} \right. .$$

La *partie positive* sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$.^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad r \mapsto r^+ = \left\{ \begin{array}{ll} r & \text{si } r \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{array} \right. .$$

La *partie négative* sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$\cdot^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad r \mapsto r^- = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geqslant 0 \\ -r & \text{si } r < 0 \end{cases} .$$

Proposition 2.2.6 *Soient r et s deux nombres réels. Les relations suivantes sont toujours vérifiées,*
- $r^+ = (-r)^-$ *et* $r^- = (-r)^+$,
- $r = r^+ - r^-$ *et* $|r| = r^+ + r^-$,
- $r^+ = (|r| + r)/2$ *et* $r^- = (|r| - r)/2$,
- $|r^+ - s^+| \leqslant |r - s|$ *et* $|r^- - s^-| \leqslant |r - s|$.

Preuve. Les trois premiers points sont immédiats. Pour le dernier, on a

$$\begin{aligned} |r^\pm - s^\pm| &= \left|\frac{|r| \pm r}{2} - \frac{|s| \pm s}{2}\right| = \frac{1}{2}\big||r| - |s| \pm (r - s)\big| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\big(\big||r| - |s|\big| + |r - s|\big) \leqslant |r - s|, \end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure. □

Ces notions de parties positive et négative peuvent être généralisées au cas d'un nombre fini de nombres réels.

Définition 2.2.7 Soient $J \in \mathbb{N}_0$ et J nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_J$. La borne supérieure de ces nombres est le plus grand d'entre eux ; il est noté

$$\sup\{r_1, \ldots, r_J\} = \sup_{1 \leqslant j \leqslant J} r_j = \max_{1 \leqslant j \leqslant J} r_j.$$

La borne inférieure de ces nombres est le plus petit d'entre eux ; il est noté

$$\inf\{r_1, \ldots, r_J\} = \inf_{1 \leqslant j \leqslant J} r_j = \min_{1 \leqslant j \leqslant J} r_j.$$

Remarquons directement que les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble fini de nombre réels ont un sens, on dit qu'elles existent et sont réalisées, c'est-à-dire qu'il s'agit de nombres appartenant à l'ensemble $\{r_1, \ldots, r_J\}$.

Proposition 2.2.8 *Soit r un nombre réel. On a*
- $r^+ = \sup\{r, 0\}$,
- $r^- = \sup\{-r, 0\}$,
- $|r| = \sup\{r^+, r^-\}$,
- $0 = \inf\{r^+, r^-\}$,
- $\sup\{r, s\} = r + (r - s)^- = r + (s - r)^+$.

Preuve. Seul le dernier point n'est pas trivial. On a $\sup\{r, s\} = r$ si $r \geqslant s$ et $\sup\{r, s\} = s = r + (s - r)$ si $r < s$. Autrement dit, $\sup\{r, s\} = r + (r - s)^- = r + (s - r)^+$. □

Proposition 2.2.9 *Soient $J \in \mathbb{N}_0$ et J nombres réels $r_1, \ldots, r_J$. On a*

$$\sup\{r_1, \ldots, r_J\} = -\inf\{-r_1, \ldots, -r_J\}$$

et

$$\inf\{r_1, \ldots, r_J\} = -\sup\{-r_1, \ldots, -r_J\}.$$

On obtient $\sup\{r_1, \ldots, r_J\}$ *et* $\inf\{r_1, \ldots, r_J\}$ *au moyen d'un nombre fini de combinaisons linéaires et de passage aux parties positives, aux parties négatives ou aux modules.*

Preuve. Démontrons la dernière assertion. Pour deux éléments, cela résulte du dernier point de la proposition 2.2.8. Pour plus de deux nombres, on procède par récurrence, en notant que

$$\sup\{r_1, \dots, r_J\} = \sup\{\cdots \sup\{\sup\{r_1, r_2\}, r_3\}, \cdots, r_J\}$$

et

$$\inf\{r_1, \dots, r_J\} = \inf\{\cdots \inf\{\inf\{r_1, r_2\}, r_3\}, \cdots, r_J\}.$$

La conclusion s'ensuit aussitôt. □

2.2.4 Parties majorées et minorées de $\mathbb{R}$

Définition 2.2.10 Une partie E de $\mathbb{R}$ est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $E \subset]-\infty, M]$, c'est-à-dire tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in E$. Un tel nombre M est appelé un *majorant* de E. Une partie E de $\mathbb{R}$ est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $E \subset [m, +\infty[$, c'est-à-dire tel que $x \geqslant m$ pour tout $x \in E$. Un tel nombre m est appelé un *minorant* de E

Remarquons que dans $\mathbb{R}$, seuls les intervalles du type $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$, $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$ sont majorés.

Si M (resp. m) est un majorant (resp. minorant) de E, il en est de même pour tout nombre $M' \geqslant M$ (resp. $m' \leqslant m$). On est donc amené au concept suivant.

Définition 2.2.11 Un nombre réel M est une *borne supérieure* de E si M est un majorant de E tel que pour tout majorant M' de E on a $M \leqslant M'$. Un nombre réel m est une *borne inférieure* de E si m est un minorant de E tel que pour tout minorant m' de E on a $m' \leqslant m$.

Si M et M' sont deux bornes supérieures d'une même partie de $\mathbb{R}$, puisque M est une borne supérieure et M' un majorant, on a $M \leqslant M'$. En inversant les rôles de M et M', on obtient $M' \leqslant M$, ce qui implique $M = M'$. Autrement dit, la borne supérieure d'un ensemble est nécessairement unique. Bien entendu, le même raisonnement s'applique à la borne inférieure. On peut donc parler de *la* borne supérieure d'une partie majorée et de *la* borne inférieure d'une partie minorée.

Rappelons encore une fois le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.2.12 *Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Définition 2.2.13 La borne supérieure d'une partie majorée E de $\mathbb{R}$ est notée $\sup E$ ou $\sup_P x$ si P est une propriété définissant E (par exemple $\sup_{x \in E} x$). La partie inférieure d'une partie minorée de $\mathbb{R}$ est notée $\inf E$ ou $\inf_P x$ si P est une propriété définissant E.

Le résultat suivant fournit un puissant critère pour obtenir les bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.14 *Une majorant M d'une partie E de $\mathbb{R}$ est la borne supérieure de E si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $M - \varepsilon < x$. Un minorant m d'une partie E de $\mathbb{R}$ est la borne inférieure de E si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x < m + \varepsilon$.*

Preuve. Considérons le cas de la borne supérieure, les mêmes considérations permettant de conclure quant au cas de la borne inférieure. La condition est nécessaire. De fait, puisque $M - \varepsilon$ est strictement inférieur à M, il ne peut être un majorant de E. On a donc $M - \varepsilon < x$ pour un $x \in E$. La condition est suffisante, sinon, il existe un majorant M' de E tel que $M' < M$. Cela étant, il existe alors $x \in E$ tel que $M - (M - M') = M' < x$, ce qui est absurde, puisque M' est un majorant de E. Ainsi, M est la borne supérieure de E. □

Corollaire 2.2.15 *Si $M \in E$ est un majorant de E, alors M est la borne supérieure de E. Si $m \in E$ est un minorant de E, alors m est la borne inférieure de E.*

Preuve. De fait, on a alors $M - \varepsilon < M$ et $m < m + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. □

Définition 2.2.16 Soient M (resp. m) la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie majorée (resp. minorée) E de $\mathbb{R}$. Si M (resp. m) appartient à E, on dit que la borne supérieure (resp. inférieure) est *réalisée* ou *atteinte* et que M (resp. m) est un *maximum* (resp. *minimum*) de E. C'est toujours le cas si E est fini, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Si M (resp. m) n'est pas un élément de E, on dit que la borne supérieure (resp. inférieure) n'est pas réalisée ou n'est pas atteinte. Si la borne supérieure (resp. inférieure) de E est atteinte, on écrit parfois $\max E$ (resp. $\min E$) en lieu et place de $\sup E$ (resp. $\inf E$).

Toutes les possibilités existent quant à la réalisation ou non des bornes supérieures et inférieures, comme le montre la considération des ensembles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

2.3 L'espace euclidien $\mathbb{R}^d$

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1 Étant donné $d \in \mathbb{N}_0$, on appelle un *point de* $\mathbb{R}^d$ tout ensemble ordonné de d nombres réels. Si $r_1, r_2, \ldots, r_d$ sont de tels nombres, on désigne le point x correspondant comme suit, $x = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$. Le nombre r_j est appelé la j-ième *composante* de x et est notée $[x]_j$ ou même x_j si aucune ambiguïté n'est possible.

Définition 2.3.2 L'*origine* de $\mathbb{R}^d$ est le point $0 = (0, \ldots, 0)$. Le j-ième *point unité* de $\mathbb{R}^d$ ($j \in \{0, \ldots, d\}$) est le point $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le nombre 1 est la j-ième composante de e_j.

Définition 2.3.3 L'*espace euclidien* de dimension d $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ muni des notions d'égalité, de combinaison linéaire et de produit scalaire que nous allons introduire. L'espace euclidien de dimension 1 est noté $\mathbb{R}$.

Nous dirons que deux points x, y de $\mathbb{R}^d$ sont égaux si pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, on a $x_j = y_j$. Si x et y sont égaux, on écrit $x = y$. L'égalité entre deux points de $\mathbb{R}^d$ est donc ramenée à d égalités dans $\mathbb{R}$. En particulier, les points unités e_j et e_k sont égaux si et seulement si $j = k$.

Étant donné un point x de $\mathbb{R}^d$ et $r \in \mathbb{R}$, le point rx est le point de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont les suivantes, $[rx]_j = r[x]_j$ ($j \in \{0, \ldots, d\}$). Si y est également un point de $\mathbb{R}^d$, le point $x+y$ est le point de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont $[x+y]_j = [x]_j + [y]_j$ ($j \in \{0, \dots, d\}$). Plus généralement, si $N \in \mathbb{N}_0$, $x_1, \dots, x_N$ sont N points de $\mathbb{R}^d$ et $r_1, \dots, r_N$ sont N nombres réels, la *combinaison linéaire* correspondante est le point $\sum_{n=1}^N r_n x_n$ de $\mathbb{R}^d$ dont la j-ième composante est le nombre $\sum_{n=1}^N r_n [x_n]_j$. Les nombres $r_1, \dots, r_N$ sont appelés les coefficients de cette combinaison linéaire.

Le produit scalaire de deux points x, y de $\mathbb{R}^d$ est le nombre réel

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d = \sum_{j=1}^d x_j y_j.$$

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ est donc défini comme une somme de produits dans $\mathbb{R}$. Pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$, on a $[x]_j = \langle x, e_j \rangle$ et donc $x = \sum_{j=1}^d \langle x, e_j \rangle e_j$. Voici les propriétés fondamentales du produit scalaire.

Proposition 2.3.4 *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a*
- $\langle x, x \rangle \geqslant 0$,
- $\langle x, x \rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- $\langle rx, y \rangle = r \langle x, y \rangle$,
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Faisons maintenant quelques remarques obtenues via la notion de champs. L'ensemble $\mathbb{R}$ est équipé d'une structure beaucoup plus riche que $\mathbb{R}^d$, puisqu'il est notamment équipé de la notion de comparaison $<$, « strictement inférieur » ; le produit de deux nombres réels possède également plus de propriétés. On peut, dans une certaine mesure, identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$; $\mathbb{C}$ est équipé de la notion de « produit de deux nombres complexes ». Dans les autres cas ($d > 2$), $\mathbb{R}^d$ n'est pas assimilé à un champs [1].

Remarque 2.3.5 On peut aussi introduire la combinaison linéaire de parties de $\mathbb{R}^d$. Si $N \in \mathbb{N}_0$, si $A_1, \dots, A_N$ sont des parties non-vides de $\mathbb{R}^d$ et si $r_1, \dots, r_N$ sont des nombres réels, la combinaison linéaire correspondante est l'ensemble

$$\sum_{n=1}^N r_n A_n = \{\sum_{n=1}^N r_n x_n : x_n \in A_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}\}.$$

En particulier, si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, un *translaté* de A est une partie B de $\mathbb{R}^d$ pour laquelle il existe un point x de $\mathbb{R}^d$ tel que $B = A + \{x\}$; on la note plutôt $A + x$. Un *homothétique* de A est une partie B de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $B = rA$.

2.3.2 Intervalles de $\mathbb{R}^d$

Définition 2.3.6 Un *intervalle* I de $\mathbb{R}^d$ est un ensemble qui s'écrit $I = \prod_{j=1}^d I_j$, où $I_1, \dots, I_d$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$, I_j étant appelé le j-ième *intervalle constitutif* de I. Un *cube* (ou *carré*) de $\mathbb{R}^d$ est un intervalle de $\mathbb{R}^d$ dont tous les intervalles constitutifs sont

1. Il est cependant possible d'étendre la notion de nombre complexe de manière similaire à celle qui permet d'obtenir les nombres complexes à partir des nombres réels. On parle des quaternions, que l'on peut assimiler à $\mathbb{R}^4$, mais le corps ainsi obtenu n'est pas commutatif, i.e. le produit de deux éléments de cet ensemble ne commutent pas toujours.

majorés, minorés et de même longueur ; cette longueur est appelée la longueur du côté du cube. Un *semi-intervalle* de $\mathbb{R}^d$ est un intervalle de $\mathbb{R}^d$ dont les intervalles constitutifs sont des semi-intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.7 Un *réseau* de $\mathbb{R}^d$ est une partition de $\mathbb{R}^d$ constituée par des semi-intervalles de $\mathbb{R}^d$. Si ces semi-intervalles sont en nombre fini, on parle de réseau fini, dans le cas contraire on dit que le réseau est infini. Les éléments du réseau sont appelés les *mailles* du réseau.

Soient d éléments $J_1, \ldots, J_d$ de $\mathbb{N}_0$ et pour tous $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $k_j \in \{1, \ldots, J_j\}$, soit r_{j,k_j} un nombre réel tel que $r_{j,1} < r_{j,2} < \cdots < r_{j,J_j}$. Si on note I_j les semi-intervalles de $\mathbb{R}$ du type $]r_{j,k}, r_{j,k+1}]$, $]-\infty, r_{j,1}]$, $]r_{j,J_j}, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$, on vérifie de suite que les semi-intervalles I de $\mathbb{R}^d$ du type $\prod_{j=1}^d I_j$ constituent un réseau fini de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.3.8 Soient b et l deux nombres strictement positifs fixés. Considérons les semi-intervalles de $\mathbb{R}^d$ dont les semi-intervalles constitutifs sont du type $]kb^{-l}, (k+1)b^{-l}]$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble de ces intervalles est appelé le *quadrillage* d'équidistance b^{-l} de $\mathbb{R}^d$. Si $b = 10$, on parle de *quadrillage décimal* et si $b = 2$, on parle de *quadrillage dyadique*. Il s'agit d'un réseau infini de $\mathbb{R}^d$ dont les éléments sont des semi-cubes de côté de longueur b^{-l}, appelés *mailles* du quadrillage d'équidistance b^{-l}.

2.3.3 Réseaux finis et quadrillages décimaux

Définition 2.3.9 Un *réseau* de $\mathbb{R}^d$ est une partition de $\mathbb{R}^d$ constituée par des semi-intervalles de $\mathbb{R}^d$. Si ces semi-intervalles sont en nombre fini, on parle de réseau fini, dans le cas contraire on dit que le réseau est infini. Les éléments du réseau sont appelés les *mailles* du réseau.

Soient d éléments $J_1, \ldots, J_d$ de $\mathbb{N}_0$ et pour tous $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $k_j \in \{1, \ldots, J_j\}$, soit r_{j,k_j} un nombre réel tel que $r_{j,1} < r_{j,2} < \cdots < r_{j,J_j}$. Si on note I_j les semi-intervalles de $\mathbb{R}$ du type $]r_{j,k}, r_{j,k+1}]$, $]-\infty, r_{j,1}]$, $]r_{j,J_j}, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$, on vérifie de suite que les semi-intervalles I de $\mathbb{R}^d$ du type $\prod_{j=1}^d I_j$ constituent un réseau fini de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.3.10 Soient b et l deux nombres strictement positifs fixés. Considérons les semi-intervalles de $\mathbb{R}^d$ dont les semi-intervalles constitutifs sont du type $]kb^{-l}, (k+1)b^{-l}]$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble de ces intervalles est appelé le *quadrillage* d'équidistance b^{-l} de $\mathbb{R}^d$. Si $b = 10$, on parle de *quadrillage décimal* et si $b = 2$, on parle de *quadrillage dyadique*. Il s'agit d'un réseau infini de $\mathbb{R}^d$ dont les éléments sont des semi-cubes de côté de longueur b^{-l}, appelés *mailles* du quadrillage d'équidistance b^{-l}.

2.3.4 Module d'un point de $\mathbb{R}^d$

Définition 2.3.11 Le *module* d'un point x de $\mathbb{R}^d$ est le nombre réel

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}.$$

On a notamment $|0| = 0$ et $|e_j| = 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$. Pour $d = 1$, on réobtient la définition 2.2.1. Pour $d = 2$, il s'agit du module d'un nombre complexe z, $|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$. Passons maintenant aux premières propriétés du module.

Théorème 2.3.12 *Pour tous points x, y de $\mathbb{R}^d$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a*
- $|x| \geqslant 0$,
- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
- $|rx| = |r||x|$,
- *(inégalité de Cauchy-Schwarz)* $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* $x = 0$ *ou* $y = sx$ *pour un nombre réel* s.

Preuve. Seul le dernier point n'est pas trivial. Si $x = 0$, l'inégalité est clairement vérifiée. Sinon, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leqslant |rx + y|^2 = \langle rx, y\rangle = |x|^2 r^2 + 2\langle x, y\rangle r + |y|^2.$$

Puisque $P(r) = |x|^2 r^2 + 2\langle x, y\rangle r + |y|^2$ est un trinôme du second degré en la variable r dont le signe est constant, son réalisant est négatif. On a ainsi $4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leqslant 0$ et donc $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|$.

Envisageons maintenant l'égalité. Si $x = 0$, c'est trivial. Si $y = sx$, on obtient $|\langle x, y\rangle| = |s||x|^2 = |x||y|$. Inversement, si l'égalité est vérifiée et si x diffère de 0, $P(r)$ est un trinôme du second degré dont le réalisant est nul. Il admet donc un zéro double r_0. Dès lors, $|r_0 x + y| = 0$, ce qui implique $y = -r_0 x$. □

Remarquons que dans $\mathbb{C}$, $|zz'| = |z||z'|$ (pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$).

Les propriétés du module qui suivent sont de première importance.

Proposition 2.3.13 *Pour tous points x, y de $\mathbb{R}^d$, on a*
- $\forall j \in \{1, \ldots, d\}$, $|x_j| \leqslant |x| \leqslant \sum_{k=1}^{d} |x_k|$,
- *(inégalité de Minkowski)* $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* $x = 0$ *ou* $y = sx$, *avec* $s \geqslant 0$,
- $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* $x = 0$ *ou* $y = sx$, *avec* $s \geqslant 0$.

Preuve. Le premier point est immédiat.

Pour le deuxième point, on a

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \\ &\leqslant |x|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + |y|^2 \\ &\leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si $\langle x, y\rangle$ est positif et vaut $|x||y|$; ces dernières conditions peuvent se réécrire $\langle x, y\rangle \geqslant 0$ et $x = 0$ ou $y = sx$, avec $s \in \mathbb{R}$. La conclusion est alors immédiate.

Pour le troisième point, l'inégalité de Minkowsky implique $|x| \leqslant |x - y| + |y|$ et donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. En permutant les rôles de x et y, on obtient de la même manière $|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|$, d'où la conclusion en ce qui concerne l'inégalité. L'égalité a lieu si et seulement si l'une des deux égalités $|x| = |x - y| + |y|$ ou $|y| = |y - x| + |x|$ est vérifiée. La première de ces inégalités a lieu si et seulement si on a $x - y = 0$ ou $y = s(x - y)$, avec $s \geqslant 0$, ce qui peut se réécrire $y = sx$, avec $0 \leqslant s \leqslant 1$. Dès lors, la seconde égalité est vérifiée si et seulement si $x = 0$ ou $y = sx$, avec $s \geqslant 1$. □

L'inégalité de Minkowski s'écrit comme suit pour les combinaisons linéaires : étant donnés $J \in \mathbb{N}_0$, J points $x^{(1)}, \ldots, x^{(J)}$ de $\mathbb{R}^d$ et J nombres réels $r_1, \ldots, r_J$, on a

$$|\sum_{j=1}^{J} r_j x^{(j)}| \leqslant \sum_{j=1}^{J} |r_j||x^{(j)}|.$$

Chapitre 3

Espaces métriques

Nous allons maintenant étudier les ensembles munis d'une structure permettant de parler de proximité entre deux éléments.

3.1 Distance

3.1.1 Distance

Définition 3.1.1 Une *distance* sur un ensemble non-vide X est une application

$$\text{dist} : X^2 \to \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto \text{dist}(x, y)$$

telle que, pour tous $x, y, z \in X$,
- $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$ (symétrie),
- $\text{dist}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (séparation),
- $\text{dist}(x, y) \leqslant \text{dist}(x, z) + \text{dist}(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Un ensemble non-vide X muni d'une distance d est appelé un *espace métrique* et est noté (X, dist).

L'exemple qui suit est fondamental.

Exemple 3.1.2 La loi dist qui, à tout couple formé de deux points $x, y \in \mathbb{R}^d$, associe le nombre $\text{dist}(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3.1.3 *Pour tous points x, y, z, t de l'espace métrique (X, dist), on a*
- $|\text{dist}(x, z) - \text{dist}(y, z)| \leqslant \text{dist}(x, y)$,
- $|\text{dist}(x, y) - \text{dist}(z, t)| \leqslant \text{dist}(x, z) + \text{dist}(y, t)$.

Preuve. Pour le premier point, il suffit d'utiliser les propriétés inhérentes aux distances pour obtenir

$$\text{dist}(x, z) \leqslant \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z) \quad \text{et} \quad \text{dist}(y, z) \leqslant \text{dist}(y, x) + \text{dist}(x, z).$$

La seconde inégalité se démontre selon le même principe, puisque

$$\text{dist}(x, y) \leqslant \text{dist}(x, z) + \text{dist}(z, t) + \text{dist}(t, y)$$

et

$$\text{dist}(z, t) \leqslant \text{dist}(z, x) + \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, t),$$

ce qui suffit. $\square$

Exemple 3.1.4 Si X est un ensemble non-vide, l'application

$$\operatorname{dist}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

est une distance sur X. L'espace (X, dist) ainsi défini est appelé l'*espace discret* associé à X.

Dans la suite, sauf mention contraire, nous supposerons implicitement travailler dans l'espace métrique (X, dist).

3.1.2 Boules associées à une distance

Définition 3.1.5 Soient (X, dist) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$; la *boule* ou *boule ouverte* de centre x et de rayon r associée à la distance dist est l'ensemble

$$B_{\operatorname{dist}}(x, r) = \{y \in X : \operatorname{dist}(x, y) < r\}.$$

Lorsque la distance est implicite, la boule s'écrit $B(x, r)$. La *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$\bar{B}_{\operatorname{dist}}(x, r) = B_{\operatorname{dist}}(x, \leqslant r) = \{y \in X : \operatorname{dist}(x, y) \leqslant r\}.$$

Remarque 3.1.6 Soit (X, dist) un espace métrique ; si $y \in B(x, r)$ et $s > 0$ satisfait $s \leqslant r - \operatorname{dist}(x, y)$, alors $B(y, s) \subset B(x, r)$. En effet, pour tout $z \in B(y, s)$, on a

$$\operatorname{dist}(z, x) \leqslant \operatorname{dist}(z, y) + \operatorname{dist}(y, x) < s + \operatorname{dist}(x, y) \leqslant r.$$

3.1.3 Ouverts et fermés

Définition 3.1.7 Une partie U de (X, dist) est *ouverte* (on dit aussi « est un ouvert de (X, dist) ») si tout point de U est le centre d'une boule incluse dans U : $\forall x \in U, \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$.

Bien sûr X et $\varnothing$ sont des ouverts de (X, dist).

Exemple 3.1.8 Toute boule $B(x, r)$ est ouverte : si $y \in B(x, r)$, on vérifie directement l'inclusion $B(y, r - \operatorname{dist}(x, y)) \subset B(x, r)$.

Définition 3.1.9 Soit (X, dist) un espace métrique ; une partie de (X, dist) est *fermée* (on dit aussi « est un fermé de (X, dist) ») si son complémentaire dans (X, dist) est ouvert.

Bien sûr, X et $\varnothing$ sont des fermés de (X, dist).

Exemple 3.1.10 Toute boule $B(x, \leqslant r)$ est fermée. De fait, son complémentaire dans X est l'ensemble $E = \{y \in X : \operatorname{dist}(x, y) > r\}$, qui est un ensemble ouvert. De fait, si $y \in E$, on a $B(y, \operatorname{dist}(x, y) - r) \subset E$, puisque $z \in B(y, \operatorname{dist}(x, y) - r)$ implique $\operatorname{dist}(x, z) \geqslant \operatorname{dist}(x, y) - \operatorname{dist}(y, z) > r$.

Exemple 3.1.11 Pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est un fermé. De fait, le complémentaire de cet ensemble dans X est l'ensemble $E = \{y \in X : \operatorname{dist}(x, y) > 0\}$. On conclut comme précédemment.

Passons maintenant aux propriétés fondamentales des ouverts et des fermés.

Théorème 3.1.12 *Toute union d'ouverts est ouverte. Toute intersection de fermés est fermée.*

Preuve. De fait, si x est un point appartenant à une union d'ouverts, il appartient à l'un d'entre eux. Le point x est donc le centre d'une boule incluse dans cet ouvert, donc dans l'union des ouverts.

Pour la seconde assertion, soient J un ensemble quelconque et F_j des ensemble fermés pour tout $j \in J$. On a $(\cap_{j\in J} F_j)^c = \cup_{j\in J} F_j^c$, ce qui suffit pour conclure, vu la première partie. $\square$

Théorème 3.1.13 *Toute intersection finie d'ouverts est ouverte. Toute union finie de fermés est fermée.*

Preuve. Soient $J \in \mathbb{N}_0$ et J parties ouvertes $U_1, \ldots, U_J$. Si un point x appartient à l'intersection de ces ensembles, il appartient à chacun d'entre eux et, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, il existe $r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset U_j$. Dès lors, la boule $B(x, \inf_{1\leqslant j\leqslant J} r_j)$ est incluse dans chacun des U_j, avec $j \in \{1, \ldots, J\}$, et donc dans l'intersection.

La seconde partie s'obtient par passage aux complémentaires. $\square$

Corollaire 3.1.14 *Toute partie finie est fermée.*

3.1.4 Distances équivalentes

Définition 3.1.15 Deux distances d et d' sur un ensemble X sont *équivalentes* s'il existe deux constantes strictement positives C' et C' telles que

$$Cd(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant C'd(x, y),$$

pour tous $x, y \in X$.

Proposition 3.1.16 *Si deux distances d et d' sur un ensemble X sont équivalentes, alors U est un ouvert de (X, d) si et seulement si U est un ouvert de (X, d').*

Preuve. Supposons avoir $Cd(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant C'd(x, y)$ pour deux constantes strictement positives C et C'. Soit $c, x \in X$ et $r > 0$; on a donc $d(c, x) < r$ implique $d'(c, x) < r/C$ et $d'(c, x) < r$ implique $d(c, X) < C'r$. De là, $B_d(c, Cr) \subset B_{d'}(c, r) \subset B_d(c, C'r)$, ce qui suffit. $\square$

3.1.5 Voisinages

Définition 3.1.17 Étant donné un point x de (X, dist), un *voisinage* de x est une partie de (X, dist) contenant une boule centrée en x.

Une partie U de (X, dist) est donc un ouvert si U est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 3.1.18 *Dans (X, dist), on a les propriétés suivantes :*

- *Tout voisinage de $x \in X$ contient x,*
- *Toute partie de X contenant un voisinage de $x \in X$ est un voisinage de x,*

– *Tout voisinage ν_x de $x \in X$ contient un voisinage ν'_x de x tel que ν_x soit un voisinage de tout $y \in \nu'_x$*

Preuve. Ces résultats sont évidents. Pour le dernier point par exemple, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \nu_x$. Pour tout $y \in B(x, r)$, $B(y, r - \operatorname{dist}(x, y))$ est inclus dans $B(x, r)$ et donc ν_x est un voisinage de y. □

Exercice 3.1.19 Montrer que tout espace métrique est séparé, i.e. pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe des voisinages ν_x et ν_y de x et y respectivement d'intersection vide.
Suggestion. En posant $r = \operatorname{dist}(x, y)$, on a $r > 0$ et il suffit de poser $\nu_x = B(x, r)$ et $\nu_y = B(y, r)$.

3.1.6 Intérieur, adhérence, frontière

Une partie de (X, dist) n'est pas nécessairement ouverte ou fermée. Nous allons ici associer, à une partie quelconque de X, un ouvert et un fermé particuliers.

Définition 3.1.20 Un point x est un *point intérieur* d'une partie E de (X, dist) s'il est le centre d'une boule incluse dans E. L'*intérieur* d'une partie E de (X, dist) est l'ensemble des points intérieurs à E ; il est noté E°.

D'une certaine manière, le résultat suivant stipule que l'intérieur d'un ensemble est « le plus grand ouvert inclus dans cet ensemble ».

Proposition 3.1.21 *L'intérieur de E est un ouvert inclus dans E contenant tout ouvert inclus dans E. En particulier, $E = E^\circ$ si et seulement si E est ouvert.*

Preuve. Il est clair que E° est inclus dans E et qu'il contient tout ouvert inclus dans E. Montrons que E° est ouvert. Pour tout x appartenant à E°, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E$. Puisque $B(x, r)$ est ouvert, on a $B(x, r) \subset E^\circ$, ce qui suffit. □

Définition 3.1.22 Un point x est un *point adhérent* d'une partie E de (X, dist) si toute boule de centre x est d'intersection non-vide avec E. L'*adhérence* d'une partie E de (X, dist) est l'ensemble des points adhérents à E ; il est noté $\bar{E}$.

Exercice 3.1.23 Montrer que dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ (muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$), on a $B(x, \leqslant r) = \overline{B(x, r)}$.
Suggestion. On a $B(x, r) \subset B(x, \leqslant r)$ et puisque $B(x, \leqslant r)$ est fermé, ceci prouve l'inclusion $\overline{B(x, r)} \subset B(x, \leqslant r)$.

Montrons que l'inclusion inverse est également vérifiée. Soient $y \in B(x, \leqslant r)$, $\varepsilon > 0$ et montrons que $B(x, r) \cap B(y, \varepsilon)$ n'est pas vide. Soient $\delta = \varepsilon/(\varepsilon + r)$; remarquons qu'on a $0 < \delta < 1$ et $\delta < \varepsilon/r$. Considérons le point $z = x + (1 - \delta)(y - x)$. On a

$$|x - z| = | - (1 - \delta)(y - x)| = (1 - \delta)|y - x| < r$$

et

$$|y - z| = |(y - x) - (1 - \delta)(y - x)| = \delta|y - x| \leqslant \delta r < \varepsilon,$$

ce qui implique $z \in B(x, r) \cap B(y, \varepsilon)$.

Remarque 3.1.24 Quelque soit l'espace métrique (X, dist) considéré, on a bien sûr $\overline{B(x,r)} \subset B(x, \leqslant r)$, mais l'égalité n'est en général pas vérifiée. Ainsi, pour l'ensemble X équipé de la métrique discrète, on a $B(x,1) = \{x\}$ et donc $\overline{B(x,1)} = \{x\}$, alors que $B(x, \leqslant 1) = X$.

Voici une relation de première importance :

$$\begin{aligned} (\bar{E})^c &= \{x \in X : (\exists r > 0 : B(x,r) \cap E = \varnothing)\} \\ &= \{x \in X : (\exists r > 0 : B(x,r) \subset E^c)\} \\ &= (E^c)^\circ \end{aligned}$$

De même, on montre que $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$. Le résultat suivant stipule que, d'une certaine manière, l'adhérence d'un ensemble est « le plus petit fermé contenant cet ensemble ».

Proposition 3.1.25 *L'adhérence de E est un fermé contenant E et inclus dans tout fermé contenant E. En particulier, on a $E = \bar{E}$ si et seulement si E est fermé.*

Preuve. Il est clair que E est inclus dans $\bar{E}$. Le reste découle de l'identité $\bar{E} = ((E^c)^\circ)^c$. En effet, $(E^c)^\circ$ étant le plus grand ouvert contenu dans E^c, $((E^c)^\circ)^c$ est le plus petit fermé contenant E □

Pour toute partie E de $\mathbb{R}^d$, nous venons donc d'introduire le plus grand ouvert E° et le plus petit fermé $\bar{E}$ tels que $E^\circ \subset E \subset \bar{E}$. Pour savoir à quel point ces inclusions sont fines, il suffit de considérer l'ensemble $\bar{E} \setminus E^\circ$.

Définition 3.1.26 Un point x est un *point frontière* d'une partie E de (X, dist) si toute boule de centre x est d'intersection non-vide avec E et E^c. La *frontière* de E est l'ensemble des points frontières de E ; il est noté $E^\bullet$ ou ∂E.

Il est clair que $E^\bullet = \bar{E} \setminus E^\circ$.

Exemple 3.1.27 On a $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et donc $\mathbb{Q}^\bullet = \mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il n'existe pas de nombre $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathbb{Q}$, sinon, en choisissant un nombre naturel n tel que $\sqrt{2}/n < r$, on aurait $x + \sqrt{2}/n \in B(x,r) \subset \mathbb{Q}$, ce qui impliquerait que le nombre $\sqrt{2}$ est rationnel. Qui plus est, vu le principe d'archimède, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r > 0$, il existe un nombre rationnel q appartenant à l'intervalle $]x - r, x + r[$. On a donc $q \in \mathbb{Q} \cap B(x,r)$, ce qui montre que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Proposition 3.1.28 *On a $E^\bullet = \bar{E} \cap \overline{E^c}$. En particulier, la frontière de E est fermée et $E^\bullet = (E^c)^\bullet$.*

Preuve. C'est trivial, puisque $\bar{E} \cap \overline{E^c} = \bar{E} \cap (E^\circ)^c = \bar{E} \setminus E^\circ$. □

Proposition 3.1.29 *La frontière d'une partie ouverte ou fermée de* (X, dist) *est un ensemble d'intérieur vide.*

Preuve. Puisque $E^\bullet = (E^c)^\bullet$, il suffit d'établir la proposition dans le cas d'un ouvert U. Procédons par l'absurde en supposant que x est un point intérieur à $U^\bullet$. Il existe alors $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U^\bullet$. Puisque $x \in \bar{U}$, il existe également un point y de U tel que $\mathrm{dist}(x,y) < r/2$. Puisque U est ouvert, il existe $r' > 0$ tel que $B(y,r') \subset U = U^\circ$. Le point y appartient donc à $U^\bullet \cap U^\circ$, ce qui est absurde. □

Il existe de nombreuses relations entre les ensembles E, E°, $\bar{E}$ et $E^\bullet$. Nous n'allons en citer que quelques unes, laissées comme exercices.

Exercice 3.1.30 Pour toute partie E de (X, dist), établir que E° et $E^\bullet$ sont disjoints et d'union égale à $\bar{E}$. En particulier, on a $E^\bullet \subset E$ si et seulement si E est fermé. De même, on a $E^\bullet \subset E^c$ si et seulement si E est ouvert.

Exercice 3.1.31 Pour toute partie E et tout ouvert U de (X, dist), on a $\overline{U \cap E} = \overline{U \cap \bar{E}}$.
Suggestion. Bien sûr, $\overline{U \cap \bar{E}}$ est un fermé contenant $U \cap E$, donc $\overline{U \cap E} \subset \overline{U \cap \bar{E}}$.

Inversement, soit x un élément de $\overline{U \cap \bar{E}}$. Pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ est d'intersection non-vide avec $U \cap \bar{E}$; soit x_r un point de l'intersection. Puisque U est ouvert, il existe $s = s(r) > 0$ tel que $B(x_r, s) \subset U$; on peut supposer $s < r/2$. De plus, $x_r \in \bar{E}$ implique $B(x_r, s) \cap E \neq \varnothing$; soit y_s un point de cet ensemble. Pour tout $t > 0$, soit $r = 2t/3$; nous avons montré qu'il existe un point $y_s \in B(x, t)$ tel que $y_s \in U$ et $y_s \in E$, ce qui suffit.

3.1.7 Bornés

Définition 3.1.32 Une partie E d'un espace métrique (X, dist) est *bornée* s'il existe $c \in X$ et $r > 0$ tels que $E \subset B(c, r)$, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\mathrm{dist}(c, x) \leqslant C$.

Par l'inégalité triangulaire, le point c n'a aucune importance. De fait soit c' un point de X ; s'il existe $r > 0$ tel que $E \subset B(c, r)$, alors $E \subset B(c', r + \mathrm{dist}(c, c'))$.

Proposition 3.1.33 *Toute partie d'un borné est bornée ; en particulier, toute intersection de bornés est bornée. Toute union finie de bornés est bornée ; en particulier, toute partie finie est bornée.*

Preuve. Montrons que toute union finie de bornés est bornée. Soient $J \in \mathbb{N}_0$ et J parties bornées de (X, dist), $E_1, \ldots, E_J$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, il existe donc $c_j \in X$ et $r_j > 0$ tels que $E_j \subset B(c_j, r_j)$. Quitte à augmenter le rayon, on peut supposer $c_j = c_1$ pour tous $j \in \{2, \ldots, d\}$. Cela étant, on a $\cup_{j=1}^J E_j \subset B(c_1, \max\{r_1, \ldots, r_j\})$. □

3.1.8 Diamètre d'une partie

Définition 3.1.34 Soit E une partie non-vide de $(X\mathrm{dist})$. Si $\{\mathrm{dist}(x, y) : x, y \in E\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, on appelle *diamètre* de E le nombre

$$\mathrm{diam}(E) = \sup\{\mathrm{dist}(x, y) : x, y \in E\}.$$

La description des parties non-vides de (X, dist) admettant un diamètre est donnée par la propriété suivante.

Proposition 3.1.35 *Une partie non-vide de* (X, dist) *admet un diamètre si et seulement si elle est bornée.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait, si E est une partie non-vide de (X, dist) qui admet un diamètre, soit x un élément de E. On a alors, pour tout $y \in E$, $\mathrm{dist}(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(E)$ et donc $E \subset B(x, \mathrm{diam}(E) + 1)$.

La condition est suffisante. Si E est une partie non-vide bornée de (X, dist), il existe $c \in X$ et $r > 0$ tels que $E \subset B(c, r)$. Dès lors, pour tous $x, y \in A$, $\mathrm{dist}(x, y) \leqslant \mathrm{dist}(x, c) + \mathrm{dist}(c, y) < 2r$, ce qui suffit. □

3.1.9 Distance de deux parties

Définition 3.1.36 Étant données deux parties non-vides A et B de (X, dist), la *distance* de A à B est le nombre $d(A, B) = \inf\{\mathrm{dist}(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Proposition 3.1.37 *Si A, B et C sont des parties non-vides de (X, dist), alors*
- $d(A, B) \geqslant 0$*,*
- $d(A, B) = d(B, A)$*,*
- *si B est borné,* $d(A, C) \leqslant d(A, B) + \mathrm{diam}(B) + d(B, C)$*.*

Preuve. Seul le dernier point n'est pas évident. Soient $a \in A$, $b, b' \in B$ et $c \in C$. On a

$$d(A, C) \leqslant \mathrm{dist}(a, c) \leqslant \mathrm{dist}(a, b) + \mathrm{dist}(|b, b) + \mathrm{dist}(b', c) \leqslant \mathrm{dist}(a, b) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{dist}(b', c).$$

Pour tous $a \in A$ et $b \in B$, le nombre $d(A, C) - \mathrm{diam}(B) - \mathrm{dist}(a, b)$ est donc un minorant de $\{\mathrm{dist}(b', c) : b' \in B, c \in C\}$. De la sorte, on obtient

$$d(A, C) - \mathrm{diam}(B) - \mathrm{dist}(a - b) \leqslant d(B, C),$$

pour tous $a \in A$ et $b \in B$. Cela étant, le nombre $d(A, C) - d(B, C) - \mathrm{diam}(B)$ est un minorant de l'ensemble $\{\mathrm{dist}(a - b) : a \in A, b \in B\}$; on a donc

$$d(A, C) - d(B, C) - \mathrm{diam}(B) \leqslant d(A, B),$$

ce qui suffit. □

Remarquons que la distance de deux parties non-vides peut valoir zéro sans que ces parties soient égales. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer deux parties d'intersection non-vide de $\mathbb{R}^d$ ou les ensembles $]a, b]$ et $]b, c]$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Dès lors, la distance entre deux parties n'est pas une distance sur l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}^d$. Il s'agit d'un abus de langage consacré par l'usage. Dans la dernière relation de la proposition précédente, l'égalité peut être satisfaite. Il suffit par exemple de considérer $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$ et $C = [5, 6]$.

Proposition 3.1.38 *Pour tous $x, y \in (X, \mathrm{dist})$ et toute partie non-vide A de X, on a*

$$|d(\{x\}, A) - d(\{y\}, A)| \leqslant \mathrm{dist}(x - y).$$

Preuve. Cela résulte des majorations $d(\{x\}, A) \leqslant d(\{x\}, \{y\}) + \mathrm{diam}(\{y\}) + d(\{y\}, A)$ et $d(\{y\}, A) \leqslant d(\{y\}, \{x\}) + \mathrm{diam}(\{x\}) + d(\{x\}, A)$, puisque $\mathrm{diam}(\{x\}) = \mathrm{diam}(\{y\}) = 0$. □

En général, on écrit $d(x, A)$ plutôt que $d(\{x\}, A)$. Passons maintenant aux propriétés des ouverts et des fermés.

Proposition 3.1.39 *Si, dans (X, dist), le point x n'appartient pas au fermé F, alors il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement x et F ; on dit qu'un espace métrique est régulier.*

Preuve. Puisque x appartient à l'ouvert F^c, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset F^c$. Les ensembles ouverts $U_x = B(x, r/4)$ et $U_F = F_{r/4}$ contiennent x et F respectivement. De plus, il sont disjoints. En effet, s'il existait un point appartenant à l'intersection, on obtiendrait

$$d(x, F) \leqslant \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{diam}(\{y\}) + d(y, F) < r/2,$$

ce qui est absurde □

Corollaire 3.1.40 *Si x et y sont deux points distincts de (X, dist), alors il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement x et y ; on dit que qu'un espace métrique est un espace de Hausdorff ou un espace séparé.*

Preuve. Cela découle du résultat précédent, puisque $\{y\}$ est un ensemble fermé. □

Exemple 3.1.41 Pour toute partie non-vide E de (X, dist) et tout $r > 0$, l'ensemble

$$E_r = \{x : d(x, E) < r\}$$

est un ouvert contenant E.
Suggestion. Bien sûr, E_r contient E. De plus, il s'agit d'un ouvert, car pour tout $x \in E_r$, il existe $r_x \geqslant 0$ tel que $d(x, E) = r_x < r$ et donc $B(x, r - r_x) \subset E_r$.

Exemple 3.1.42 Pour toute partie E de (X, dist) différente de X et tout $r > 0$, l'ensemble

$$E_{-r} = \{x : d(x, E^c) \geqslant r\}$$

est un fermé inclus dans E.
Suggestion. De fait, il suffit de remarquer que $(E_{-r})^c = (E^c)_r$ est un ouvert de (X, dist).

3.2 Suites dans un espace métrique

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1 Une *suite* de l'ensemble non-vide X est une application de $\mathbb{N}_0$ dans X,

$$x. : \mathbb{N}_0 \to E \quad j \mapsto x_j.$$

L'élément x_j est appelé le j-ième élément de la suite. La suite est notée[1] $(x_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, $(x_j)_j$, x_j ou même x lorsque le contexte est clair.

Bien sûr, nous dirons que deux suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont égales si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a $x_j = y_j$.

Une suite peut être obtenue au moyen des trois procédés suivants :

- en donnant explicitement l'application qui, à tout $j \in \mathbb{N}_0$, associe un élément x_j de X. Il en est ainsi de la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = j^2 + j + 1$, quelque soit $j \in \mathbb{N}_0$,
- en donnant explicitement une relation de récurrence. Ainsi, on donne $J \in \mathbb{N}_0$ points $x_1, \ldots, x_J$ de X et une application qui à tout entier $j > J$ et aux points $x_1, \ldots, x_{j-1}$ associe un point x_j de X. Il en est ainsi de la suite définie par $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_j = \sqrt{x_{j-1} x_{j-2}}$ pour tout $j \geqslant 3$,
- si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, E_j est une partie non-vide de X, il existe une suite $(x_j)_j$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, x_j appartienne à E_j.

Il convient de différencier les deux premiers moyens d'obtention, qui fournissent explicitement une suite, et le dernier, qui postule l'existence d'une suite et fait appel à l'axiome du choix dénombrable.

1. Une suite est parfois aussi notée $\{x_j\}_j$.

Définition 3.2.2 Étant donné une suite $(x_j)_j$ de X et une application k de $\mathbb{N}_0$ dans $\mathbb{N}_0$ strictement croissante, i.e. telle que $k(1) \geqslant 1$ et $k(j+1) > k(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'application

$$x_{k(\cdot)} : \mathbb{N}_0 \to X \quad j \mapsto x_{k(j)}$$

est appelée une *sous-suite* de la suite $(x_j)_j$. On note parfois le j-ième élément de cette sous-suite x_{k_j} à la place de $x_{k(j)}$.

Remarquons déjà que l'on a toujours $k(j) \geqslant j$, quelque soit $j \in \mathbb{N}_0$.

Exemples 3.2.3 Étant donné une suite $(x_j)_j$ de E, on peut considérer les sous-suites $(x_{2j})_j$, $(x_{2j-1})_j$ et $(x_{j^2})_j$ correspondant respectivement à $k(j) = 2j$, $k(j) = 2j - 1$ et $k(j) = j^2$, quelque soit $j \in \mathbb{N}_0$.

3.2.2 Suites convergentes

Le concept de « suite convergente » est fondamental en analyse.

Définition 3.2.4 Une suite $(x_j)_j$ de (X, dist) *converge* vers $x \in X$ (on dit aussi *tend* vers $x \in X$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que, pour tout indice $j \in \mathbb{N}_0$ vérifiant $j \geqslant J$, on a $\mathrm{dist}(x_j, x) < \varepsilon$. Le point x est applelé *limite de la suite* $(x_j)_j$ et on écrit $x_j \to x$, $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ ou $\lim_j x_j = x$.

On peut se représenter la notion de convergence de manière imagée comme suit. Une suite $(x_j)_j$ converge vers x si, quelque soit le rayon ε donné, les éléments x_j appartiennent tous à la boule centrée en x de rayon ε pour un indice j « suffisamment grand », i.e. plus grand que J.

Définition 3.2.5 Une suite $(x_j)_j$ de (X, dist) *converge* ou *est convergente* s'il existe un point $x \in X$ vers lequel la suite converge. Dans le cas contraire, on dit que la suite *diverge* ou *est divergente*.

Donnons quelques exemples simples.

Exemples 3.2.6 Si x est un point de X, la suite $(x_j = x)_j$ converge vers x.

La suite $(x_j = 1/j)_j$ de $\mathbb{R}$ converge vers 0. De fait, pout tout nombre réel $\varepsilon > 0$, $J = 1/\varepsilon$ est un nombre réel tel que, pour tout nombre entier $j \geqslant J + 1$, on a $|1/j - 0| < \varepsilon$.

Si E est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ majorée, il existe une suite qui converge vers la borne supérieure M de E. De fait, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $E_j = E \cap \{x : |x - M| < 1/j\}$ n'est pas vide, en vertu de la proposition 2.2.14. Cela étant, le troisième moyen d'obtention d'une suite appliqué aux ensembles E_j ($j \in \mathbb{N}_0$) nous procure une suite $(x_j)_j$ telle que $x_j \in A_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. On a tôt fait de constater que $x_j \to M$. Le même raisonnement peut s'appliquer aux parties non-vides minorées de $\mathbb{R}$.

Établissons dès à présent quelques propriétés fondamentales de la convergence.

Théorème 3.2.7 (unicité de la limite) *Si une suite de* (X, dist) *converge, alors sa limite est unique.*

Preuve. Supposons que la suite $(x_j)_j$ converge vers a et b, avec a différent de b. Il existe alors deux nombres réels J_1 et J_2 tels que $\mathrm{dist}(x_j, a) < \mathrm{dist}(a, b)/3$ pour tout $j \geqslant J_1$ et $\mathrm{dist}(x_j, b) < \mathrm{dist}(a, b)/3$ pour tout $j \geqslant J_2$. En posant $J = \sup\{J_1, J_2\}$, on obtient, pour tout $j \geqslant J$,

$$\mathrm{dist}(a, b) = \mathrm{dist}(a, x_j) + \mathrm{dist}(x_j, b) < \frac{2}{3}\mathrm{dist}(a, b),$$

ce qui est contradictoire. □

Théorème 3.2.8 *Toute sous-suite d'une suite convergente de* (X, dist) *converge vers la même limite.*

Preuve. Soient $(x_j)_j$ une suite qui converge vers x et $(x_{k(j)})_j$ une sous-suite de cette suite. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $\mathrm{dist}(x_j, x) < \varepsilon$. Puisque $k(j) \geqslant j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $j \geqslant J$ implique également $\mathrm{dist}(x_{k(j)}, x) < \varepsilon$, ce qui suffit pour conclure. □

Définition 3.2.9 Une suite $(x_j)_j$ de (X, dist) est *bornée* si l'ensemble $\{x_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ est borné, i.e. s'il existe une constante $r > 0$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_j \in B(x_1, r)$.

Théorème 3.2.10 *Toute suite convergente de* (X, dist) *est bornée.*

Preuve. Si la suite $(x_j)_j$ converge vers x, il existe un nombre J tel que $j \geqslant J$ implique $\mathrm{dist}(x_j, x) < 1$. De là, pour un tel j, on a

$$\mathrm{dist}(x_j, x_1) \leqslant \mathrm{dist}(x_j, x) + \mathrm{dist}(x, x_1) < 1 + \mathrm{dist}(x_1, x).$$

En posant

$$r = 1 + \mathrm{dist}(x_1, x) + \sup_{j \in \{2, \ldots, J-1\}} \mathrm{dist}(x_j, x_1),$$

on a $x_j \in B(x_1, r)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. □

Enfin, introduisons une manière particulière de converger dans (X, dist).

Définition 3.2.11 Soient E une partie de X et x un point de X. La suite $(x_j)_j$ converge vers x dans E si elle converge vers x et s'il existe un nombre réel J tel que $x_j \in E$ pour tout indice $j \geqslant J$. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que x appartienne à E.

3.2.3 Suites d'applications

La notion de suite peut s'adapter aux applications.

Définition 3.2.12 Une *suite d'applications* définies sur E à valeurs dans Y est une suite $(f_j)_j$ qui à tout $j \in \mathbb{N}_0$ associe une application $f_j : E \to Y$.

Définition 3.2.13 Soit (Y, d_Y) un espace métriques, $(f_j)_j$ une suite d'applications définies sur E à valeur dans Y et $f : E \to Y$ une application. La suite $(f_j)_j$ *converge ponctuellement* sur E vers f si, pour tout $x \in E$, on a $\lim_{j \to +\infty} f_j(x) = f(x)$. On dit que f est la *limite ponctuelle* de la suite $(f_j)_j$ sur E et on écrit $f_j \to f$ sur E.

3.2.4 Retour à la topologie

De nombreuses propriétés relatives à la topologie peuvent se démontrer en recourant à la notion de suite convergente. Le principe est basé sur le résultat suivant, qui caractérise la notion de fermé dans les espaces métriques.

Théorème 3.2.14 *Une partie F de (X, dist) est fermée si et seulement si elle contient la limite de toutes ses suites convergentes.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $(x_j)_j$ une suite de F qui converge vers x. Si le point x n'appartient pas à F, il appartient à F^c, qui est ouvert. Il existe alors $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset F^c$. Puisque la suite x_j converge vers x, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $\mathrm{dist}(x_j, x) < r$, donc tel que $x_j \in F^c$ quelque soit $j \geqslant J$. On obtient une contradiction, puisque $x_j \in F$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

La condition est suffisante. Si F^c n'est pas ouvert, il existe un point x de F^c tel qu'aucune boule centrée en x ne soit incluse dans F^c. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $E_j = B(x, 1/j) \cap F$ n'est pas vide ; il existe ainsi une suite x_j telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_j \in E_j$. Cette suite étant une suite de F qui converge vers x (puisque $\mathrm{dist}(x_j, x) < 1/j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$), on obtient une contradiction. □

Proposition 3.2.15 *Dans (X, dist), un point appartient à l'adhérence d'une partie E de X si et seulement s'il existe une suite de E qui converge vers ce point.*

Preuve. La condition est nécessaire. De fait si x est adhérent à E, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $E_j = E \cap B(x, 1/j)$ n'est pas vide. Il existe alors une suite $(x_j)_j$ telle que $x_j \in E_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Cette suite est bien une suite de E qui converge vers x.

La condition est évidemment suffisante. □

L'exercice 3.1.31 peut par exemple être démontré en utilisant la notion de suite.

Exercice 3.2.16 Pour toute partie E et tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$, on a $\overline{U \cap E} = \overline{U \cap \bar{E}}$.
Suggestion. Bien sûr, $\overline{U \cap \bar{E}}$ est un fermé contenant $U \cap E$, donc $\overline{U \cap E} \subset \overline{U \cap \bar{E}}$.

Inversement, soit x un élément de $\overline{U \cap \bar{E}}$. Il existe donc une suite $(x_j)_j$ de $U \cap \bar{E}$ qui converge vers x. Maintenant, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $r_j > 0$ tel que $B(x_j, r_j) \subset U$; nous pouvons supposer que la suite $(r_j)_j$ tend vers zéro. Cela étant, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $E_j = E \cap B(x_j, r_j)$ n'est pas vide et il existe donc une suite $(y_j)_j$ telle que $y_j \in E_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, $x \in \overline{U \cap E}$ car la suite $(y_j)_j$ est une suite de $U \cap E$ qui converge vers x.

3.2.5 Suites de Cauchy

Définition 3.2.17 Une suite $(x_j)_j$ est de *Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $p, q \geqslant J$ implique $\mathrm{dist}(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Proposition 3.2.18 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve. Soit $(x_j)_j$ une suite de Cauchy. Il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $p, q \geqslant J$ implique $\mathrm{dist}(x_p, x_q) < 1$. En posant

$$r = \max\{\mathrm{dist}(x_1, x_J), \ldots \mathrm{dist}(x_{J-1}, x_J), 1\},$$

on a $x_j \in B(x_J, r)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. □

Proposition 3.2.19 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve. Soient $(x_j)_j$ une suite qui converge vers le point x_0 et $\varepsilon > 0$. Il existe un indice $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $j \geqslant J$ implique $\mathrm{dist}(x_0, x_j) < \varepsilon/2$. Dès lors, pour tous $p, q \geqslant J$, on a donc

$$\mathrm{dist}(x_p, x_q) \leqslant \mathrm{dist}(x_p, x_0) + \mathrm{dist}(x_0, x_q) < \varepsilon,$$

ce qui suffit. □

Ce résultat n'admet pas de réciproque.

Remarque 3.2.20 Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}, \mathrm{dist})$, où dist est la distance euclidienne. Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = sup\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant x\}$, la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = 10^{-j}\lfloor 10^j\sqrt{2}\rfloor$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il en résulte que $(x_j)_j$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{Q}, \mathrm{dist})$ qui ne converge pas (dans $\mathbb{Q}$).

Plus simplement, la suite $(x_j = \sqrt{2}/j)_j$ est une suite de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui converge vers $0 \in \mathbb{Q}$.

On a toutefois le résultat suivant.

Proposition 3.2.21 *Si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, elle converge.*

Preuve. Soient $(x_j)_j$ une suite de Cauchy telle que la sous-suite $(x_{k(j)})_j$ converge vers le point x_0 et $\varepsilon > 0$. Il existe un indice J_1 tel que $p, q \geqslant J_1$ implique $\mathrm{dist}(x_p, x_q) < \varepsilon/2$ et un indice J_2 tel que $j \geqslant J_2$ implique $\mathrm{dist}(x_0, x_{k(j)}) < \varepsilon/2$. On peut donc écrire, pour tout $j \geqslant \max\{J_1, J_2\}$,

$$\mathrm{dist}(x_0, x_j) \leqslant \mathrm{dist}(x_0, x_{k(j)}) + \mathrm{dist}(x_{k(j)}, x_j) < \varepsilon,$$

puisque $k(j) \geqslant j$. □

Définition 3.2.22 Un espace métrique est *complet* si toute suite de Cauchy converge.

3.3 Applications continues

3.3.1 Définitions

Définition 3.3.1 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques ; une application f de X dans Y est *continue* en $x_0 \in X$ (par rapport à d_X et d_Y) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $x \in B(x_0, \eta)$ implique $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, c'est-à-dire $f(B(x_0, \eta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Autrement dit, f est continu en x si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : (d_X(x_0, x) < \eta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon).$$

Si f n'est pas continu en x_0, on dit que f est *discontinu* en x_0.

Définition 3.3.2 Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et X' une partie de X ; une application f de X dans Y est *continue sur* X' si f est continu en tout point de X'. Si $X' = X$ on dit que f est *continu.*

Exemples 3.3.3 Voici quelques exemples simples d'applications continues :

– Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et y_0 un point de Y ; l'application constante
$$f : X \to Y \quad x \mapsto y_0$$
est bien sûr continue, puisque $d_Y(f(x), f(x')) = 0$ pour tous $x, x' \in X$.
– Soit (X, d) un espace métrique ; l'application identité
$$f : X \to X \quad x \mapsto x$$
est continue ; il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$ dans la définition de la continuité.
– Considérons la droite $\mathbb{R}$ (implicitement munie de la distance euclidienne) ; pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + b$$
est continue.

3.3.2 Critère par les suites

Le résultat qui suit fournit un puissant critère pour déterminer si une application est continue en un point.

Théorème 3.3.4 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques ; une application f de X dans Y est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_j)_j$ de X qui converge vers x_0, la suite $(f(x_j))_j$ de Y converge vers $f(x_0)$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si f est une application continue en $x_0 \in X$, soit $(x_j)_j$ une suite de (X, d_X) qui converge vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$; puisque f est continu en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $d_X(x_0, x) < \eta$ implique $d_Y(f(x_0), f(x)) < \eta$. Qui plus est, puisque la suite $(x_j)_j$ converge vers x_0, il existe un entier J tel que $j \geqslant J$ implique $d_X(x_0, x_j) < \eta$. De là, pour tout $j \geqslant J$, on a $d_Y(f(x_0), f(x_j)) < \varepsilon$, ce qui suffit.

La condition est suffisante. Supposonse que pour toute suite $(x_j)_j$ de X qui converge vers $x_0 \in X$, la suite $(f(x_j))_j$ converge vers $f(x_0)$. Si f est discontinu en x_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe un point $x_\eta \in X$ vérifiant $d_X(x_0, x_\eta) < \eta$ tel que $d_Y(f(x_0), f(x_\eta)) \geqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un point $x_j \in X$ pour lequel $d_X(x_0, x_j) < 1/j$ et $d_Y(f(x_0), f(x_j)) \geqslant \varepsilon$. La suite $(x_j)_j$ ainsi construite converge vers x_0, alors que la suite $(f(x_j))_j$ ne converge pas vers $f(x_0)$, ce qui fournit une contradiction. □

Exemple 3.3.5 Si (X, d_X) est un espace métrique et X' une partie de X, l'application
$$\chi_{X'} : X \to \{0, 1\} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X' \\ 0 & \text{si } x \notin X' \end{cases}$$
est continue en x si et seulement si $x \notin X'^{\bullet}$. De fait, si $x \in X'^{\bullet}$, il existe deux suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ de X' et X'^c respectivement qui convergent vers x. On a $\chi_{X'}(x_j) = 1$ et $\chi_{X'}(y_j) = 0$, ce qui montre que cette application ne peut être continue en x. Dans les autres cas, $x \in \overline{X'} \setminus \overline{X'^c}$ ou $x \in \overline{X'^c} \setminus \overline{X'}$ et pour toute suite de $(x_j)_j$ qui converge vers x, on a $\chi_{X'}(x_j) = \chi_{X'}(x)$ pour j suffisamment grand.

La continuité est stable par composition.

Théorème 3.3.6 *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux applications et x_0 un point de X. Si f est continu en x_0 et si g est continu en $f(x_0)$, alors l'application $g \circ f : X \to Z$ est continue en x_0.*

Preuve. Soit $(x_j)_j$ une suite de X qui converge vers x_0 et posons $y_j = f(x_j)$. Puisque f est continu en x_0, la suite $(y_j)_j$ converge vers $y = f(x_0)$. La continuité de g implique, quant à elle, que la suite $((g(y_j))_j$ converge vers $g(y)$. Nous avons donc montré que la suite $(g(f(x_j)))_j$ converge vers $g(f(x_0))$, ce qui suffit. □

3.3.3 Définitions équivalentes de la continuité

Proposition 3.3.7 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques ; si f est une application de X dans Y, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f est continu,*

(b) *l'image inverse par $f^{-1}(U)$ de tout ouvert U de (Y, d_Y) est ouverte (dans (X, d_X)),*

(c) *l'image inverse par $f^{-1}(F)$ de tout fermé de (Y, d_Y) est fermée (dans (X, d_X)),*

(d) *pour toute partie E de X, on a $f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$.*

Preuve. Montrons que (a) implique (b). Soit U un ouvert de (Y, d_Y). Pour tout $x_0 \in f^{-1}(U)$, on a $f(x_0) \in U$ et il existe $r > 0$ tel que $B(f(x_0), r) \subset U$. Cela étant, vu la continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in X$ vérifie $d_X(x_0, x) < \eta$, on a $d_Y(f(x_0), f(x)) < r$. Dès lors, si $x \in B(x_0, \eta)$, on a $f(x) \in B(f(x_0), r) \subset U$ et donc $x \in f^{-1}(U)$. On a ainsi montré $B(x_0, \eta) \subset f^{-1}(U)$, ce qui permet de conclure.

Montrons que le deuxième point implique le premier. Pour tout $x_0 \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, soit $U = B(f(x_0), \varepsilon)$. Par hypothèse, son image inverse par f est un ouvert contenant x_0. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $B(x_0, \eta) \subset f^{-1}(U)$. Autrement dit, si $x \in X$ vérifie $d_X(x_0, x) < \eta$, on a $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Le point (b) est équivalent au point (c), puisque $f^{-1}(E) = (f^{-1}(E^c))^c$, pour tout $E \subset Y$.

Montrons que le (c) implique (d). On a bien sûr

$$E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

Puisque $\overline{f(E)}$ est fermé, on a $\bar{E} \subset f^{-1}(\overline{f(E)})$ et donc $f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$.

Enfin, (d) implique (a). Soient $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ et supposons que, quelque soit $\eta > 0$, $f(B(x_0, \eta)) \not\subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un point x_j de $B(x_0, 1/j)$ tel que $f(x_j) \notin B(f(x_0), \varepsilon)$. L'ensemble $E = \{x_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ satisfait $f(E) \subset B(f(x_0), \varepsilon)^c$ et, puisque $B(f(x_0), \varepsilon)^c$ est fermé, on a

$$f(x_0) \in f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)} \subset \overline{B(f(x_0), \varepsilon)^c} = B(f(x_0), \varepsilon)^c,$$

ce qui est absurde. □

Remarquons que nous ne pouvons rien déduire de l'image continue d'un ouvert (resp. fermé).

Remarque 3.3.8 Le résultat précédent permet de définir une application continue entre deux espaces topologiques quelconques.

3.3.4 Continuité uniforme

Définition 3.3.9 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques ; une application f de X dans Y est *uniformément continue* sur une partie E de X (par rapport à d_X et d_Y) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ pour tout $x \in E$. Autrement dit, f est uniformément continu sur $E \subset X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x, y \in E, (d_X(x, y) < \eta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Bien entendu, si f est uniformément continu sur E alors f est continu sur E. L'inverse n'est généralement pas vrai, comme le montre la remarque suivante. En effet, pour la continuité uniforme, le nombre η doit pouvoir être choisi indépendamment de x.

Remarque 3.3.10 Soit f l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x^2.$$

On montre aisément que f est continu. Supposons que f soit également uniformément continu sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $(x + \eta/2)^2 - x^2 < 1$ pour tout nombre x réel. On obtient $x\eta + \eta^2/4 < 1$; en $x = 1/\eta$, cette relation est absurde.

Il existe également un critère par les suites.

Théorème 3.3.11 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques ; une application f de X dans Y est uniformément continue sur $E \subset X$ si et seulement si pour toutes suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ de E telles que $d_X(x_j, y_j) \to 0$, on a $d_Y(f(x_j), f(y_j)) \to 0$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soient $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ deux suites de E telles que $d_X(x_j, y_j) \to 0$ et $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continu sur E, il existe $\eta > 0$ tel que, pout tous $x, y \in E$, $d_X(x, y) < \eta$ implique $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soit alors un indice J tel que $j \geqslant J$ implique $d_X(x_j, y_j) < \eta$. Pour un tel j, on a $d_Y(f(x_j), f(y_j)) < \varepsilon$, ce qui suffit.

La condition est suffisante. Si f n'est pas uniformément continu sur E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe deux points x_η et y_η de E tels que $d_X(x_\eta, y_\eta) < \eta$ et $d_Y(f(x_\eta), f(y_\eta)) \geqslant \varepsilon$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe donc deux points x_j et y_j de E tels que $d_X(x_j, y_j) < 1/j$ et $d_Y(f(x_j), f(y_j)) \geqslant \varepsilon$. Les deux suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ ainsi définies sont telles que $d_X(x_j, y_j) \to 0$, alors que $d_Y(f(x_j), f(y_j))$ ne converge pas vers 0, ce qui est absurde. □

Théorème 3.3.12 (principe d'extension) *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques tels que le second soit complet. Si $f : E \to Y$, où E est une partie de X, est une application uniformément continue sur E, il existe une seule application g continue sur $\bar{E}$ telle que $g|_E = f$. Cette application est même uniformément continue sur $\bar{E}$.*

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$, soit η_ε tel que, pour tous $x, y \in E$, $d_X(x, y) < \eta_\varepsilon$ implique $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Soit x_0 un point de $\bar{E}$ et $(x_j)_j$ une suite de E qui converge vers x_0. La suite $(x_j)_j$ étant de Cauchy, la suite $(f(x_j))_j$ l'est également et converge donc, puisque (Y, d_Y) est complet.

Soient maintenant x_0 et y_0 deux points de $\bar{E}$ tels que $d_X(x_0, y_0) < \eta_\varepsilon$. Si $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont deux suites de E qui convergent vers x_0 et y_0 respectivement, posons $u = \lim_j f(x_j)$ et $v = \lim_j f(y_j)$. Pour j suffisamment grand, on a

$$d_X(x_j, y_j) \leqslant d_X(x_j, x_0) + d_X(x_0, y_0) + d_X(y_0, y_j) < \eta_\varepsilon.$$

Par conséquent, on a $d_Y(f(x_j), f(y_j)) < \varepsilon$ pour un tel j et donc, pour tout $\delta > 0$,

$$d_Y(u,v) \leqslant d_Y(u, f(x_j)) + d_Y(f(x_j,), f(y_j)) + d_Y(f(y_j), v) < \varepsilon + \delta$$

pour j suffisamment grand, ce qui implique $d_Y(u,v) \leqslant \varepsilon$.

Pour tout $x_0 \in \bar{E}$, posons $g(x_0) = \lim_j f(x_j)$, où $(x_j)_j$ est une suite de E qui converge vers x_0. Vu ce qui vient d'être montré (en prenant $y_0 = x_0$), la fonction g ne dépend pas de la suite $(x_j)_j$ choisie. Si $x_0 \in E$, on a donc, en prenant la suite $(x_j = x_0)_j$, $g(x_0) = f(x_0)$. Qui plus est, si x_0 et y_0 sont deux points de $\bar{E}$ tels que $d_X(x_0, y_0) < \eta_{\varepsilon/2}$, on a $d_Y(g(x_0), g(y_0)) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, ce qui prouve que g est uniformément continu.

Supposons maintenant que $h : \bar{E} \to Y$ soit une autre extension continue de f. Si x_0 est un point de $\bar{E}$, il existe une suite $(x_j)_j$ de E qui converge vers x_0 et on obtient

$$h(x_0) = \lim_j h(x_j) = \lim_j f(x_j) = g(x_0),$$

ce qui prouve l'unicité. □

3.3.5 Convergence uniforme

Définition 3.3.13 Soit (Y, d_Y) un espace métrique, $(f_j)_j$ une suite d'applications définies sur E à valeurs dans Y et $f : E \to Y$ une application. La suite $(f_j)_j$ *converge uniformément* vers f sur E, ce que l'on note $f_j \rightrightarrows f$ sur E si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice J tel que $j \geqslant J$ implique $d_Y(f(x), f_j(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in E$.

Autrement dit, $f \rightrightarrows f$ sur E si la suite $(\sup\{d_Y(f(x), f_j(x)) : x \in E\})_j$ converge vers zéro.

La convergence uniforme implique trivialement la convergence ponctuelle, mais la réciproque est fausse.

Remarque 3.3.14 Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, soit

$$f_j :]0,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^j.$$

Il est aisé de montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^j \to 0$ (il s'agit d'une suite décroissante et minorée par zéro). Cependant, $\sup\{x^j : x \in]0,1[\} = 1$ pour tout j (puisque $(1 - 1/j^2)^j \geqslant 1 - 1/j$ vu l'inégalité de Bernouilli), ce qui implique que la suite $(f_j)_j$ ne converge pas uniformément vers zéro.

Si $(f_j)_j$ converge ponctuellement vers f et si f_j est continu pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, la limite f n'est pas nécessairement continue.

Remarque 3.3.15 Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, soit la fonction

$$f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \max\{0, 1 - j|x|\}.$$

Nous verrons que le maximum de deux fonctions continues est continu ; dès lors, chaque f_j est continu. Bien entendu, si $x \neq 0$, $j > 1/|x|$ implique $f_j(x) = 0$ et on a donc $f_j \to f$, avec

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Il est évident que f n'est pas continu en 0.

Pour la convergence uniforme, la situation est tout autre.

Théorème 3.3.16 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $(f_j)_j$ une suite d'applications de X dans Y et f une application de X dans Y. Si f_j est continu en $x_0 \in X$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et si $f_j \rightrightarrows f$ sur un ouvert contenant x_0, alors f est continu en x_0.*

Preuve. Supposons d'abord avoir $f_j \rightrightarrows f$ sur X et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un indice J tel que $j \geqslant J$ implique $d_Y(f(x), f_j(x)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in X$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $d_X(x_0, x) < \delta$ implique $d_Y(f_J(x_0), f_J(x)) < \varepsilon/3$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leqslant d_Y(f(x_0), f_J(x_0)) + d_Y(f_J(x_0), f_J(x)) + d_Y(f_J(x), f(x)) < \varepsilon,$$

pour tout $x \in B(x_0, \delta)$, ce qui suffit.

Si on a $f_j \rightrightarrows f$ sur $B(x_0, r)$, il suffit de remplacer δ par $\min\{\delta, r\}$. □

3.4 Produit fini d'espaces métriques

Nous allons définir le produit fini d'espaces métriques de manière à ce que les notions ici introduites soient compatibles avec le produit d'espaces topologiques, qui relève d'un cours de topologie générale.

3.4.1 Définitions

Définition 3.4.1 Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_J, d_J)$ des espaces métriques (où J est un entier strictement supérieur à un) est posons $X = \prod_{j=1}^J X_j$. Une partie U de X est ouverte (relativement aux distances $d_1, \ldots, d_J$) si pour tout $x \in U$, il existe des ouverts $U_1, \ldots, U_J$ de $X_1, \ldots, X_J$ respectivement tels que $x \in \prod_{j=1}^J U_j$ et $\prod_{j=1}^J U_j \subset U$.

Un ouvert de X est donc une union de produits d'ouverts des X_j.

Proposition 3.4.2 *Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_J, d_J)$ des espaces métriques (où J est un entier strictement supérieur à un) est posons $X = \prod_{j=1}^J X_j$. L'application*

$$d_\infty : X^2 \to \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto \sup_{1 \leqslant j \leqslant J} d_j([x]_j, [y]_j)$$

est une distance sur X.

Preuve. Puisque d_j est symétrique pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, d_∞ l'est également. Si $d_\infty(x, y) = 0$, alors $d_j([x]_j, [y]_j) = 0$ pour tout j, donc $[x]_j = [y]_j$ quelque soit $j \in \{1, \ldots, J\}$, ce qui implique $x = y$.

Finalement, si x, y et z sont des éléments de X, on a $d_j(x, y) \leqslant d_j(x, z) + d_j(z, y)$ pour tout j et donc $d_j(x, y) \leqslant d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$. Ainsi $d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$ est un majorant de $\{d_j(x, y) : 1 \leqslant j \leqslant J\}$, ce qui implique $d_\infty(x, y) \leqslant d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$. □

Définition 3.4.3 La distance d_∞ ainsi définie est appelée la *distance de Tchebychev.*

Proposition 3.4.4 *Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_J, d_J)$ des espaces métriques (où J est un entier strictement supérieur à un) est posons $X = \prod_{j=1}^J X_j$. Pour tous $x \in X$ et $r > 0$, on a*

$$\prod_{j=1}^{J} B_{d_j}([x]_j, r) = B_{d_\infty}(x, r).$$

Preuve. Si $y \in \prod_{j=1}^J B_{d_j}([x]_j, r)$, alors $d_j([x]_j, [y]_j) < r$ pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$ et donc $d_\infty(x, y) < r$, c'est-à-dire $y \in B_{d_\infty}(x, r)$.

Maintenant, si $y \in B_{d_\infty}(x, r)$, alors $d_\infty(x, y) < r$, ce qui implique $d_j([x]_j, [y]_j) < r$ pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$. On a donc $[y]_j \in B_{d_j}([x]_j, r)$ pour tout j et $y \in \prod_{j=1}^J B_{d_j}([x]_j, r)$. □

Corollaire 3.4.5 *Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_J, d_J)$ des espaces métriques (où J est un entier strictement supérieur à un) et posons $X = \prod_{j=1}^J X_j$. Une partie U de X est ouverte relativement aux distances $d_1, \ldots, d_J$ si et seulement si U est un ouvert de (X, d_∞).*

Preuve. L'ensemble U de X est ouvert (relativement aux distances $d_1, \ldots, d_J$) si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe J nombres strictement positifs $r_1, \ldots, r_J$ tels que $x \in \prod_{j=1}^J B_{d_j}([x]_j, r_j) \subset U$. C'est le cas si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $x \in B_{d_\infty}(x, r) \subset U$: si $x \in \prod_{j=1}^J B_{d_j}([x]_j, r_j)$, on pose $r = \min_{1 \leqslant j \leqslant J} r_j$ et si $x \in B_{d_\infty}(x, r)$, on pose $r_j = r$ pour tout j. □

Dans cette section, nous travaillerons avec les espaces métriques $(X_1, d_1), \ldots, (X_J, d_J)$ et l'espace produit $X = \prod_{j=1}^J X_j$ associé à l'espace métrique (X, d_∞).

3.4.2 Produit d'ensembles

Proposition 3.4.6 *Si $U_1, \ldots, U_J$ sont des ouverts de $X_1, \ldots, X_J$ respectivement, $\prod_{j=1}^J U_j$ est un ouvert de X.*

Preuve. Cela découle directement de la définition. □

Proposition 3.4.7 *Si $F_1, \ldots, F_J$ sont des fermés de $X_1, \ldots, X_J$ respectivement, $\prod_{j=1}^J F_j$ est un fermé de X.*

Preuve. Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, soit $U_j = \prod_{k=1}^J \Omega_k$, où $\Omega_k = X_k$ si $k \neq j$ et $\Omega_j = F_j^c$. Un tel ensemble est un ouvert de X et $(\prod_{j=1}^J F_j)^c = \cup_{j=1}^J U_j$, ce qui suffit. □

Le résultat suivant affirme que le projeté d'un ouvert est ouvert.

Proposition 3.4.8 *Si U est un ouvert de X, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, $U_j = \{[x]_j : x \in U\}$ est un ouvert de X_j.*

Preuve. Soient x un point de U et $j_0 \in \{1, \ldots, J\}$. Il existe des ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_J$ de $X_1, \ldots, X_J$ respectivement tels que $x \in \prod_{j=1}^J \Omega_j$ et $\prod_{j=1}^J \Omega_j \subset U$. Il existe $r > 0$ tel que $B([x]_{j_0}, r) \subset \Omega_{j_0}$. Pour tout $u \in B([x]_{j_0}, r)$, soit y le point de X tel que $[y]_j = [x]_j$ si $j \neq j_0$ et $[y]_{j_0} = u$. On a $y \in U$ et donc $B([x]_{j_0}, r) \subset U_{j_0}$, ce qui suffit. □

Par contre, le projeté d'un fermé n'est pas toujours un fermé.

Remarque 3.4.9 On vérifie que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (on peut par exemple vérifier que son complémentaire est ouvert), mais sa projection sur l'axe des abscisses est l'ensemble $\mathbb{R}_*$.

3.4.3 Propriétés

Théorème 3.4.10 *Une suite $(x_k)_k$ de (X, d_∞) converge vers un point x_0 si et seulement si pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, la suite $([x_k]_j)_k$ de (X_j, d_j) converge vers $[x_0]_j$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soient $(x_k)_k$ une suite de (X, d_∞) qui converge vers x_0, $j \in \{1, \dots, J\}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un indice K tel que $k \geqslant K$ implique $d_\infty(x_k, x_0) < \varepsilon$. Par définition, ceci implique la relation $d_j([x_k]_j, [x_0]_j) < \varepsilon$, ce qui suffit.

La condition est suffisante. Soient $(x_k)_k$ une suite de (X, d_∞) telle que la suite $([x_k]_j)_k$ de (X_j, d_j) converge vers $[x_0]_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $j \in \{1, \dots, J\}$; il existe un indice K_j tel que $k \geqslant K_j$ implique $d_j([x_k]_j, [x_0]_j) < \varepsilon$. En posant $K = \sup_{1 \leqslant j \leqslant J} K_j$, on obtient que $k \geqslant K$ implique $d_\infty(x_k, x_0) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant J} d_j([x_k]_j, [x_0]_j) < \varepsilon$, ce qui suffit. □

Le résultat suivant montre que la définition du produit fini d'espaces métriques concorde avec la définition générale.

Proposition 3.4.11 *Pour tout $j_0 \in \{1, \dots, J\}$, l'application*

$$p_{j_0} : \prod_{j=1}^{J} X_j \to X_{j_0} \quad x \mapsto [x]_{j_0}$$

est continue.

Preuve. Soit $j_0 \in \{1, \dots, J\}$ et U_{j_0} un ouvert de X_{j_0}. On a $p_{j_0}^{-1}(U_{j_0}) = \prod_{j=1}^{J} U_j$, où $U_j = X_j$ si $j \neq j_0$, ce qui montre que $p_{j_0}^{-1}(U_{j_0})$ est ouvert comme un produit d'ouverts. □

Une seconde démonstration utilise le critère par les suites.

Preuve. Soit x_0 un point de $\prod_{j=1}^{J} X_j$ et $(x_k)_k$ est une suite qui converge vers x_0. On conclut directement, puisque la suite $(p_{j_0}(x_k))_k = ([x_k]_{j_0})_k$ converge vers $[x_0]_{j_0}$, par le théorème 3.4.10. □

Le critère suivant permet de déterminer si un ensemble de X est borné

Proposition 3.4.12 *Une partie E de $\prod_{j=1}^{J} X_j$ est bornée si et seulement si, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, l'ensemble $\{[x]_j : x \in E\}$ est borné.*

Preuve. Soit $c \in \prod_{j=1}^{J} X_j$ et $r > 0$; on a, par définition, $x \in B_{d_\infty}(c, r)$ si et seulement si $[x]_j \in B_{d_j}([c]_j, r)$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$. De là, la condition est évidemment nécessaire.

La condition est suffisante. Pour $j \in \{1, \dots, J\}$, posons $E_j = \{[x]_j : x \in E\}$. Si, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, il existe $c^{(j)} \in X_j$ et $r^{(j)} > 0$ tels que $E_j \subset B_{d_j}(c^{(j)}, r^{(j)})$, soit c le point de $\prod_{j=1}^{J} X_j$ tel que $[c]_j = c^{(j)}$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et $r = \sup_{1 \leqslant j \leqslant J} r^{(j)}$. Pour tout $x \in E$, on a $[x]_j \in B_{d_j}([c]_j, r)$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, ce qui implique $E \subset B_{d_\infty}(c, r)$. □

3.5 Ensembles compacts

3.5.1 Définitions

Étant donné un ensemble J, si pour tout $j \in J$, U_j est une partie ouverte de (X, dist), l'ensemble $\{U_j : j \in J\}$ est appelé une famille d'ouverts de (X, dist) et est plutôt noté $(U_j)_{j\in J}$.

Définition 3.5.1 Soit (X, dist) un espace métrique[2] ; une partie K de X est un *compact* ou un *ensemble compact* si de tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un recouvrement fini : pour toute famille d'ouverts $(U_j)_{j\in J}$ de (X, dist) telle que $K \subset \cup_{j\in J} U_j$, il existe une partie finie J' de J pour laquelle $K \subset \cup_{j\in J'} U_j$.

On dit qu'un ensemble compact vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

La définition peut être réexprimée en termes de fermés en passant aux complémentaires.

Proposition 3.5.2 *Une partie K de X est compacte si et seulement si de toute famille dont l'intersection est incluse dans le complémentaire de K, on peut extraire une famille finie dont l'intersection est incluse dans le complémentaire de K.*

Preuve. Soit F_j avec $j \in J$ une famille de fermés. On a

$$\bigcap_{j\in J} F_j \subset K^c \Leftrightarrow K \subset (\bigcap_{j\in J} F_j)^c = \bigcup_{j\in J} F_j^c.$$

et, si J' est une partie finie de J,

$$K \subset \bigcup_{j\in J'} F_j^c \Leftrightarrow \bigcap_{j\in J'} F_j \subset K^c,$$

ce qui suffit. □

Proposition 3.5.3 *Un ensemble K est compact si et seulement si pour toute famille de fermés dont toute intersection finie est d'intersection non-vide avec K, l'intersection de toute la famille est d'intersection non-vide avec K, i.e. $\cap_{j\in J'} F_j \cap K \neq \varnothing$ pour toute partie finie J' de J implique $\cap_{j\in J} F_j \cap K \neq \varnothing$.*

Preuve. Par contraposition, la condition peut être exprimée comme suit : $\cap_{j\in J} F_j \subset K^c$ implique l'existence d'une partie finie J' de J telle que $\cap_{j\in J'} F_j \subset K^c$. La proposition 3.5.2 permet de conclure. □

3.5.2 Propriétés

Proposition 3.5.4 *Deux compacts disjoints sont inclus dans deux ouverts disjoints.*

Preuve. Montrons d'abord le cas particulier où le second compact est un singleton. Soient donc K un compact et x_0 un point de K^c. Pour tout point x de K, il existe deux ouverts disjoints Ω_x et U_x contenant x et x_0 respectivement. La famille Ω_x avec $x \in K$ est un recouvrement ouvert de K. Il existe donc une partie finie E de K telle que $K \subset$

2. Il est suffisant de demander que l'espace topologique soit séparé.

$\cup_{x \in E} \Omega_x$. Soient $\Omega = \cup_{x \in E} \Omega_x$ et $U = \cap_{x \in E} U_x$; il s'agit de deux ouverts contenant K et x_0 respectivement. Qui plus est, ces ensembles sont disjoints car

$$\Omega \cap U = \bigcup_{x \in E} (\Omega_x \cap U) \subset \bigcup_{x \in E} (\Omega_x \cap U_x) = \varnothing.$$

Passons maintenant au cas général ; soient donc K et K' deux compacts disjoints. Pour tout $x_0 \in K'$, nous avons vu qu'il existe deux ouverts disjoints Ω_{x_0} et U_{x_0} contenant K et x_0 respectivement. La famille U_{x_0} avec $x_0 \in K'$ est un recouvrement de K' ; il existe donc une partie finie E' de K' telle que $K' \subset \cup_{x_0 \in E'} U_{x_0}$. Soient $\Omega = \cap_{x_0 \in E'} \Omega_{x_0}$ et $U = \cup_{x_0 \in E'} U_{x_0}$; il s'agit de deux ouverts contenant K et K' respectivement tels que

$$\Omega \cap U = \bigcup_{x_0 \in E'} (\Omega \cap U_{x_0}) \subset \bigcup_{x_0 \in E'} (\Omega_{x_0} \cap U_{x_0}) = \varnothing,$$

ce qui suffit. □

Proposition 3.5.5 *Tout compact est fermé.*

Preuve. Si K est un ensemble compact, montrons que K^c est ouvert. Si x est un point de K^c, il existe deux ouverts disjoints Ω et U contenant x et K respectivement. Ainsi, Ω est un ouvert inclus dans K^c, ce qui suffit. □

Proposition 3.5.6 *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*

Preuve. Soient K un ensemble compact et F une partie fermée de K. Si F_j avec $j \in J$ est une famille de fermés de F telle que $\cap_{j \in J'} F_j \cap F$ est non-vide pour toute partie finie J' de J, on a, en considérant F comme faisant partie de la famille F_j,

$$\bigcap_{j \in J'} F_j \cap K \neq \varnothing$$

et donc, grâce à la proposition 3.5.3,

$$\bigcap_{j \in J} F_j \cap F = \bigcap_{j \in J} F_j \cap F \cap K \neq \varnothing,$$

ce qui suffit. □

Théorème 3.5.7 (compacts emboîtés) *Si $(K_j)_j$ est une suite décroissante de compacts non-vides, i.e. une suite de compacts telle que $K_{j+1} \subset K_j$ et $K_j \neq \varnothing$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors $\cap_{j \in \mathbb{N}_0} K_j$ est un compact non-vide.*

Preuve. Soit $K = \cap_{j \in \mathbb{N}_0} K_j$; puisque K est fermé, que K_1 est compact et que $K \subset K_1$, on déduit des propriétés qui précèdent que K est compact. Qui plus est, pour toute partie finie N de $\mathbb{N}_0$, on a $\cap_{j \in N} K_j \cap K_1 = \cap_{j \in N} K_j \neq \varnothing$. Puisque K_1 est compact, on obtient $K \cap K_1 = K \neq \varnothing$, ce qui suffit. □

3.5.3 Ensembles extractables

Avant d'aborder le théorème de Bolzano-Weierstraß, il nous faut préciser quelques points théoriques.

Définition 3.5.8 Une partie K de X est *extractable* ou *séquentiellement compacte* si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de K.

Exercice 3.5.9 Montrer qu'un ensemble extractable est borné.
Suggestion. Soit x un point de l'extractable non-vide K et supposons que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $K \not\subset B(x, j)$. On peut alors construire une suite $(x_j)_j$ de K telle que $\operatorname{dist}(x, x_j) \geqslant j$. Puisque K est extractable, il existe une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ qui converge vers un point x_0 de K. Soit J tel que $j \geqslant J$ implique $\operatorname{dist}(x_0, x_{k(j)}) < 1$. Pour un tel indice j, on a

$$k(j) \leqslant \operatorname{dist}(x, x_{k(j)}) < \operatorname{dist}(x, x_0) + 1,$$

ce qui est absurde, puisque $k(j) \geqslant j$.

Exercice 3.5.10 Montrer qu'un ensemble extractable est fermé.
Suggestion. Soit K un ensemble extractable non-vide et $(x_j)_j$ une suite de K qui converge vers un point x_0. Puisque K est extractable, il existe une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ qui converge vers un point x_0' de K. Par unicité de la limite, on a $x_0' = x_0$ et donc $x_0 \in K$.

Proposition 3.5.11 (nombres de Lebesgue d'un recouvrement) *Soit K un ensemble extractable ; si $(U_j)_{j \in J}$ est une famille d'ouverts qui recouvre K, il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit incluse dans l'un de ces ouverts U_j :*

$$\forall x \in K, \ \exists j_0 \in J : B(x, r) \subset U_{j_0}$$

Preuve. Supposons le contraire, c'est-à-dire que pour tout $r > 0$, il existe $x_r \in K$ tel que $B(x_r, r) \not\subset U_j$ quel que soit $j \in J$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un point $x_k \in K$ tel que $B(x_k, 2^{-k}) \not\subset U_j$ quel que soit $j \in J$. L'ensemble K étant extractable, la suite $(x_k)_k$ ainsi définie admet une sous-suite $(x_{l(k)})_k$ qui converge vers un point x_0 de K. Cela étant, il existe un indice $j_0 \in J$ tel que $x_0 \in U_{j_0}$ et donc, U_{j_0} étant ouvert, $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \subset U_{j_0}$. Puisque la suite $(x_{l(k)})_k$ converge, il existe un indice k_0 tel que $k \geqslant k_0$ implique $\operatorname{dist}(x_0, x_{l(k)}) < \varepsilon - 2^{-l(k)}$. Pour un tel k, on a alors

$$B(x_{k(l)}, 2^{-l(k)}) \subset B(x_0, \varepsilon) \subset U_{j_0},$$

ce qui est absurde. □

3.5.4 Ensembles précompacts

Définition 3.5.12 Une partie K de X est *précompacte* ou est un *précompact* si, pour tout $r > 0$, il existe une partie finie $\{x_1, \ldots, x_J\}$ de K telle que $K \subset_{j=1}^{J} B(x_j, r)$.

Proposition 3.5.13 *Toute partie précompacte est bornée.*

Preuve. Soient K un précompact et $\{x_1, \ldots, x_J\}$ une partie finie de K telle que $K \subset \cup_{j=1}^{J} B(x_j, 1)$. Puisque toute union de bornés est bornée, il existe $r > 0$ tel que K est inclus dans $B(x_1, r)$. □

Proposition 3.5.14 (précompacité) *Toute partie extractable est précompacte.*

Preuve. Procédons pas l'absurde en supposant l'existence d'un nombre $r > 0$ pour lequel aucune union finie de boule de rayon r ne contienne la partie extractable K. Bien sûr K peut être supposé non-vide ; soit x_1 un point de K. Puisque $K \not\subset B(x_1, r)$, il existe un point x_2 de K tel que $x_2 \notin B(x_1, r)$. Supposons maintenant avoir construit les points $x_1, \ldots x_{J-1}$ et construisons le point x_J ; puisque $K \not\subset \cup_{j=1}^{J-1} B(x_j, r)$, il existe un point x_J de K n'appartenant pas à $\cup_{j=1}^{J-1} B(x_j, r)$. Pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$ avec $j \neq k$, on a, par construction, $\mathrm{dist}(x_j, x_k) \geqslant r$; la suite $(x_j)_j$ ainsi construite n'admet donc pas de sous-suite convergente, ce qui contredit le fait que K est extractable. $\square$

3.5.5 Théorème de Bolzano-Weierstraß

Le théorème de Bolzano-Weierstraß fournit une caractérisation de première importance des ensembles compacts en termes de suites.

Théorème 3.5.15 (Bolzano-Weierstraß) *Un ensemble est compact si et seulement s'il est extractable.*

Preuve. Soient K un ensemble compact et $(x_j)_j$ une suite de K. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, définissons l'ensemble $E_k = \{x_j : j > k\}$ et posons $F_k = \bar{E}_k$. Pour toute partie finie N de $\mathbb{N}_0$, $\cap_{k \in N} F_k = F_m$ avec $m = \min N$, car $F_{k+1} \subset F_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Puisque $x_{m+1} \in F_m$, toute intersection finie d'ensembles F_k est non-vide et donc $\cap_{k \in \mathbb{N}_0} F_k$ est non-vide. Soit x_0 un point de l'intersection ; pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x_0, \varepsilon) \cap E_k$ est non-vide quelque soit $k \in \mathbb{N}_0$. Une telle intersection contient donc une infinité de points et ces points sont de la forme x_j. Soit $x_{l(1)}$ un point de $B(x_0, 1) \cap E_1$. Si $x_{l(1)}, \ldots, x_{l(J-1)}$ ont été définis, soit $l(J)$ un indice tel que $x_{l(J)}$ soit un élément de $B(x_0, 2^{-J}) \cap E_{l(J-1)}$; on a donc $l(J) > l(J-1)$. La suite $(x_{l(j)})_j$ est une sous-suite de la suite x_j qui converge vers le point x_0, ce qui prouve que K est extractable.

Supposons maintenant que K est extractable et soit U_j avec $j \in J$ des ensembles ouverts qui recouvrent K. Par la proposition 3.5.11, il existe un nombre $r > 0$ tel que

$$\forall x \in K,\ \exists j_0 \in J : B(x, r) \subset U_{j_0}.$$

Puisque K est précompact, il existe une partie finie $\{x_1, \ldots, x_N\}$ de K telle que $K \subset \cup_{n=1}^{N} B(x_n, r)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, soit $j(n) \in J$ l'indice tel que $B(x_n, r) \subset U_{j(n)}$. On a $K \subset \cup_{n=1}^{N} U_{j(n)}$, ce qui prouve que K est compact. $\square$

3.5.6 Espaces complets

Proposition 3.5.16 *Une partie K est précompacte si et seulement si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $(x_j)_j$ une suite du précompact K. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une partie finie X_k de X telle que $K \subset \cup_{c \in X_k} B(c, 1/k)$. Il existe $c_1 \in X_1$ tel que

$$E_1 = \{j \in \mathbb{N}_0 : x_j \in B(c_1, 1)\}$$

soit infini. Si $c_1, \ldots, c_{J-1}$ et $E_1, \ldots, E_{J-1}$ ont été construits, soit $c_J \in X_J$ tel que

$$E_J = \{j \in E_{J-1} : x_j \in B(c_J, 1/J)\}$$

soit infini. On vérifie directement que la suite dont le j-ième élément est l'élément de la suite de départ d'indice égal au j-ième élément de N_j est une sous-suite de Cauchy de $(x_j)_j$.

La condition est suffisante. Si K n'est pas précompact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que de $\{B(x, \varepsilon : x \in K\}$, on ne puisse extraire de partie finie dont l'union contient K. On peut donc construire une suite $(x_j)_j$ de K telle que $\mathrm{dist}(x_p, x_q) \geqslant \varepsilon$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \neq q$. De cette suite, on ne peut extraire une sous-suite de Cauchy. □

Théorème 3.5.17 *Si (K, dist) est un espace métrique, K est extractable si et seulement si K est précompact et complet.*

Preuve. Nous savons déjà que si K est extractable, alors K est précompact. Puisque de toute suite de Cauchy, on peut extraire une sous-suite convergente, la complétion est triviale.

Si K est précompact, de toute suite, on peut extraire une sous-suite de Cauchy. Si de plus, K est complet, cette sous-suite converge. □

3.5.7 Applications et ensembles compacts

Théorème 3.5.18 *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application continue. L'image par f de tout compact K de (X, d_X) est compacte dans (Y, d_Y).*

Une première démonstration repose sur la notion d'extractable.

Preuve. Soit $(y_j)_j$ une suite de $f(K)$; il existe donc une suite $(x_j)_j$ de K telle que $y_j = f(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Puisque K est extractable, il existe une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ qui converge vers un point x_0 de K. La continuité de f implique

$$y_{k(j)} = f(x_{k(j)}) \to f(x_0) \in f(K),$$

ce qui prouve que $f(K)$ est extractable. □

Voici une seconde démonstration, faisant intervenir la propriété de Borel-Lebesgue.

Preuve. Soit U_j avec $j \in J$ des parties ouvertes de Y qui recouvrent $f(K)$. Posons $\Omega_j = f^{-1}(U_j)$ pour tout $j \in J$. Les ensembles Ω_j avec $j \in J$ constituent un recouvrement de K par des ouverts. Il existe donc une partie finie J' de J telle que $K \subset \cup_{j \in J'} \Omega_j$, ce qui implique $f(K) \subset \cup_{j \in J'} U_j$ et prouve que $f(K)$ est compact. □

Définition 3.5.19 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques ; une application de X dans Y est un *homéomorphisme* si elle est bijective, continue et d'inverse continu. S'il existe un homéomorphisme entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), ces derniers sont dits *homéomorphes.*

Proposition 3.5.20 *Si $f : X \to Y$ est une application bijective et continue entre deux espaces métriques et si X est compact alors $f^{-1} : Y \to X$ est continu, i.e. f est un homéomorphisme.*

Preuve. Il suffit de montrer que l'image inverse par f^{-1} de tout fermé F de X est fermé. Or $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est compact donc fermé. □

Proposition 3.5.21 *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques,* K *un compact de* X*. Si* $f : K \to Y$ *est une application continue sur* K*, alors* f *est uniformément continu.*

Preuve. Si ce n'est pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $\eta > 0$, il existe $x_\eta, y_\eta \in K$ pour lesquels $d_X(x_\eta, y_\eta) < \eta$ et $d(f(x_\eta), f(y_\eta)) \geqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_j, y_j \in K$ tels que $d_X(x_j, y_j) < 1/j$ et $d_Y(f(x_j), f(y_j)) \geqslant \varepsilon$. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ qui converge vers un point x_0 de K. Puisque

$$d_X(x_0, y_{k(j)}) \leqslant d_X(x_0, x_{k(j)}) + d_X(x_{k(j)}, y_{k(j)}),$$

la suite $(y_{k(j)})_j$ tend également vers x_0. On obtient finalement

$$d_Y(f(x_{k(j)}, f(y_{k(j)})) \leqslant d_Y(f(x_{k(j)}), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), f(y_{k(j)})) \to 0,$$

puisque f est continu en x_0, ce qui est absurde. □

Le théorème de Tychonoff stipule qu'un produit de compacts est un ensemble compact ; il est considéré comme un des résultats les plus importants de topologie (peut-être avec le lemme d'Urysohn). Ici nous n'utiliserons qu'une version faible de ce théorème, qui ne nécessite pas l'axiome du choix.

Théorème 3.5.22 *Tout produit fini de compacts est compact.*

Preuve. Il suffit de prouver que si K et K' sont deux compacts, $K \times K'$ est compact, le résultat se déduisant alors par récurrence.

Soit $(U_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de $X \times Y$ recouvrant $K \times K'$. On peut supposer que K est non-vide ; soit x un de ses points. L'application

$$f_x : K' \to \{x\} \times K' \quad y \mapsto (x, y)$$

est un homéomorphisme, ce qui implique que $K_x = \{x\} \times K'$ est une partie compacte de $K \times K'$. Puisque K_x est un compact, il existe une partie finie $J'(x)$ de J telle que $K_x \subset \cup_{j \in J'(x)} U_j$.

Pour tout $j \in J$, on peut supposer avoir $U_j = \Omega_j \times \Omega'_j$, où Ω_j et Ω'_j sont des ouverts de X et Y respectivement. Posons $U(x) = \cap_{j \in J'(x)} \Omega_j$; par construction, $U(x) \times K'$ est inclus dans $\cup_{j \in J'(x)} U_j$. Les ensembles $(U(x))_{x \in K}$ constituant un recouvrement ouvert de K, on peut en extraire un recouvrement fini. Soit donc X' une partie finie de K telle que $K \subset \cup_{x \in X'} U(x)$.

Nous avons ainsi montré que $K \times K'$ est inclus dans $\cup_{x \in X'} U(x) \times K'$, où l'union est finie, et que chaque ensemble du type $U(x) \times K'$ est inclus dans l'union finie $\cup_{j \in J'(x)} U_j$. Au total, $K \times K'$ est inclus dans une union finie d'ensembles du type U_j, ce qui prouve que $K \times K'$ est compact. □

3.5.8 Topologie

Le théorème de Bolzano-Weierstraß permet d'obtenir une intéressante propriété topologique des ensembles compacts.

Proposition 3.5.23 *Le diamètre de tout compact non-vide est réalisé : si* K *est un compact non-vide de* (X, dist)*, il existe deux points* $x, y \in K$ *tels que* $\mathrm{diam}(K) = \mathrm{dist}(x, y)$*.*

Preuve. Puisque K est borné et non-vide, il admet un diamètre :

$$\mathrm{diam}(K) = \sup\{\mathrm{dist}(x, y) : x, y \in K\}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe deux points x_j et y_j de K tels que

$$\mathrm{diam}(K) - 1/j < \mathrm{dist}(x_j, y_j) \leqslant \mathrm{diam}(K),$$

sinon, $\mathrm{diam}(K) - 1/j$ serait un majorant de l'ensemble $\{\mathrm{dist}(x, y) : x, y \in K\}$. Puisque K est extractable, il existe une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ de la suite $(x_j)_j$ qui converge vers un point x de K. La suite $(y_{k(j)})_j$ étant aussi une suite de K, il existe une sous-suite $(y_{l(k(j))})_j$ de cette suite qui converge vers un point y de K. Bien entendu, la suite $(x_{l(k(j))})_j$ converge vers x. Puisque

$$\begin{aligned} &|\mathrm{dist}(x_{l(k(j))}, y_{l(k(j))}) - \mathrm{dist}(x, y)| \\ &\quad \leqslant \ |\mathrm{dist}(x_{l(k(j))}, x) + \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, y_{l(k(j))}) - \mathrm{dist}(x, y)|, \end{aligned}$$

on a $\mathrm{dist}(x_{l(k(j))}, y_{l(k(j))}) \to \mathrm{dist}(x, y)$. Puisqu'on a également $\mathrm{dist}(x_{l(k(j))}, y_{l(k(j))}) \to \mathrm{diam}(K)$, on obtient le résultat annoncé, par unicité de la limite. □

3.6 Espaces connexes

3.6.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.6.1 Une partie C de (X, dist) est *connexe* (on dit aussi que C est un *connexe* de X) si elle n'admet pas de *disconnexion*, c'est-à-dire s'il n'existe pas deux ouverts U_1 et U_2 non-vides de X tels que $C \cap U_1 \cap U_2$ est vide et dont l'union contient C.

Proposition 3.6.2 *Un espace métrique est connexe si et seulement si cet espace n'admet d'autres parties à la fois ouvertes et fermées que l'espace lui-même et le vide.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si E est une partie non-vide différente de X à la fois ouverte et fermée, E et E^c constituent une disconnexion de X. L'espace ne peut donc être connexe.

La condition est suffisante. L'espace est nécessairement connexe, sinon, il existerait deux parties E_1 et E_2 formant une disconnexion de X. Dès lors, on aurait $E_2 = E_1^c$, ce qui implique que E_1 est à la fois ouvert et fermé. □

Théorème 3.6.3 *L'image continue d'une partie connexe est connexe : si (X, d_X), (Y, d_Y) sont deux espaces métriques, si $f : X \to Y$ est une application continue et si C est une partie connexe de X, alors $f(C)$ est une partie connexe de Y.*

Preuve. Supposons que U_1 et U_2 forment une disconnexion de $f(C)$. On vérifie que $f^{-1}(U_1)$ et $f^{-1}(U_2)$ forment une disconnexion de C. □

3.6.2 Connexes par arc

La connexité par arc fournit un critère très utile pour vérifier si un espace est connexe.

Définition 3.6.4 Soit (X, dist) un espace métrique ; une partie C de X est *connexe par arc* (on dit aussi que C est un connexe par arc) si pour tous $x_1, x_2 \in X$, il existe un chemin de l'intervalle unité dans C d'origine x_1 et d'extrémité x_2, c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0,1] \to C$ telle que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$.

Théorème 3.6.5 *Toute partie d'un espace métrique connexe par arc est connexe.*

Preuve. Procédons par l'absurde en supposant qu'une partie C est connexe par arc et n'est pas connexe. Il existe donc une disconnexion de C constituée par U_1 et U_2. Si x_1 et x_2 sont deux points de U_1 et U_2 respectivement, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to C$ telle que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$. Puisque l'image continue d'une partie connexe est connexe et que $[0,1]$ est une partie connexe de $[0,1]$, l'ensemble $\Gamma = \gamma([0,1])$ est une partie connexe de X. On obtient une contradiction, puisque U_1 et U_2 forment une disconnexion de Γ. $\square$

Exemples 3.6.6 Les applications de ce critère sont nombreuses. Voici quelques exemples :
- Toute partie convexe de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ est connexe par arc donc connexe.
- Toute boule et tout intervalle de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ est connexe par arc donc connexe.
- Pour tout entier $d \geqslant 2$, toute sphère $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_0 - x| = r\}$ ($x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$) est connexe par arc donc connexe.

Proposition 3.6.7 *Un espace métrique est connexe par arc si et seulement s'il est connexe et tel que tout point ait un voisinage connexe par arc.*

Preuve. La condition est nécessaire, par le théorème 3.6.5.

La condition est suffisante. Si U_1 et U_2 sont deux ouverts connexes par arc d'intersection non-vide, soit x_0 un point de l'intersection. Si x_1 et x_2 sont deux points appartenant respectivement à U_1 et U_2, il existe une application continue $\gamma_1 : [0,1] \to U_1$ telle que $\gamma_1(0) = x_1$ et $\gamma_1(1) = x_0$ et une application continue $\gamma_2 : [0,1] \to U_2$ telle que $\gamma_2(0) = x_0$ et $\gamma_1(1) = x_2$. L'application

$$\gamma : [0,1] \to U_1 \cup U_2 \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est une application continue telle que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$. Ainsi $U_1 \cup U_2$ est connexe par arc si $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. À partir de ces deux ouverts connexes par arc, on construit donc un ouvert connexe par arc contenant les deux premiers. On peut ensuite réitérer le processus à partir de $U_1 \cup U_2$ et d'un ouvert connexe par arc d'intersection non-vide avec $U_1 \cup U_2$.

De cette manière, on finit par obtenir l'espace X tout entier. Sinon, il existerait des ouverts non-vides connexes par arc d'intersection vide dont l'union serait égale à X. Soit U l'un de ces ensemble et U' l'union des autres. On constate directement que U et U' constituent une disconnexion de X, ce qui est absurde. $\square$

3.6.3 Propriétés

Théorème 3.6.8 (passage des douanes) *Si C est une partie connexe, alors pour toute partie E de X telle que $C \cap E$ et $C \setminus E$ sont non-vides, $C \cap E^{\bullet}$ est non-vide.*

Preuve. Si ce n'était pas le cas, on aurait $C \cap E^\circ = C \cap \bar{E}$ et les ensembles E° et $(\bar{E})^c$ formeraient une disconnexion de C. □

Théorème 3.6.9 *Si C_j est une partie connexe de (X, dist) pour tout $j \in J$, où J est un ensemble et si les C_j sont d'intersections deux à deux non-vides ($j \neq j'$ implique $C_j \cap C_{j'} \neq \varnothing$), alors $\cup_{j\in J} C_j$ est une partie connexe de (X, dist).*

Preuve. Si ce n'est pas le cas, il existe deux parties U_1 et U_2 de X formant une disconnexion de $\cup_{j\in J} C_j$. Il existe deux indices j_1 et j_2 tels que $C_{j_1} \cap U_1 \neq \varnothing$ et $C_{j_2} \cap U_2 \neq \varnothing$. Ceci implique $C_{j_1} \subset U_1$ et $C_{j_2} \subset U_2$. De fait, si, par exemple, C_{j_1} n'était pas inclus dans U_1, les parties U_1 et U_2 formeraient une disconnexion de C_{j_1}. On a donc $j_1 \neq j_2$ et $C_{j_1} \cap C_{j_2} = \varnothing$, ce qui est absurde. □

Théorème 3.6.10 *Soit C une partie connexe de (X, dist) ; toute partie E de X telle que $C \subset E \subset \bar{C}$ est connexe.*

Preuve. De fait, si U_1 et U_2 forment une disconnexion de E, ils forment également une disconnexion de C, car $E \subset \bar{C}$ implique que $U_1 \cap C$ et $U_2 \cap C$ ne sont pas vides. □

3.6.4 Composantes connexes

Définition 3.6.11 Deux points x et y de (X, dist) sont *connectés* s'il existe une partie connexe de (X, dist) contenant x et y.

Dans cette section, nous écrirons $x \sim y$ si x et y sont connectés. Le théorème 3.6.9 permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 3.6.12 *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

La propriété qui suit est immédiate.

Proposition 3.6.13 *La composante connexe de x est l'union des parties connexes qui contiennent x.*

Chapitre 4

Suites de l'espace euclidien

Nous allons ici considérer les suites de l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de la distance euclidienne $d(x,y) = |x-y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$.

4.1 Distances

4.1.1 Distance euclidienne

Rappelons le résultat suivant, aisé à démontrer.

Proposition 4.1.1 *La loi d qui, à tout couple formé de deux points $x, y \in \mathbb{R}^d$, associe le nombre $d(x,y) = |x-y|$ est une distance sur $\mathbb{R}^d$.*

Définition 4.1.2 La distance d définie par la proposition 4.1.1 est appelée la *distance euclidienne* sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 4.1.3 *Pour tous points x, y, z de $\mathbb{R}^d$ et tout nombre réel r, on a*
- $d(rx, ry) = |r| d(x,y)$,
- $d(x+z, y+z) = d(x,y)$,
- $d(|x|, |y|) \leqslant d(x,y)$,
- *pour tout* $j \in \{1, \ldots, d\}$, $d(x_j, y_j) \leqslant d(x,y)$.

Preuve. Cela résulte aussitôt des propriétés du module. □

En guise de complément, signalons les résultats suivants.

Exercice 4.1.4 Étant donné trois points x, y, z de $\mathbb{R}^d$, établir que l'égalité

$$d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

a lieu si et seulement s'il existe un nombre réel r tel que $0 \leqslant r \leqslant 1$ pour lequel $z = rx + (1-r)y$.
Suggestion. Pour $x' = x - z$ et $y' = z - y$, l'égalité s'écrit $|x' + y'| = |x'| + |y'|$ et a donc lieu si et seulement si $x = z$ ou $z - y = r(x - z)$, avec $r \geqslant 0$.

Exercice 4.1.5 Étant donnés trois points x, y, z de $\mathbb{R}^d$, établir que l'égalité

$$|d(x,z) - d(y,z)| = d(x,y)$$

a lieu si et seulement si $x = y$ ou s'il existe un nombre réel r tel que soit $r \leqslant 0$, soit $r \geqslant 1$, pour lequel $z = rx + (1-r)y$.
Suggestion. L'égalité a lieu si et seulement si une des deux égalités suivantes a lieu : $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ ou $d(z,y) = d(z,x) + d(x,y)$. Or, la première de ces égalités a lieu si et seulement si y peut s'écrire $y = rx + (1-r)z$, avec $0 \leqslant r \leqslant 1$, c'est-à-dire si et seulement si $x = y$ ou $z = rx + (1-r)y$, avec $r \leqslant 0$. De la même manière, la seconde égalité a lieu si et seulement si $x = y$ ou $z = rx + (1-r)y$, avec $r \geqslant 1$.

4.1.2 Autres distances sur $\mathbb{R}^d$

Il est possible de définir d'autres distances sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 4.1.6 La loi d_1 qui aux points x et y de $\mathbb{R}^d$ associe le nombre $d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|$ est une distance [1] sur $\mathbb{R}^d$, appelée distance de Manhattan. De même, la loi d_∞ explicitement définie par $d_\infty(x,y) = \sup_{j\in\{1,\ldots,d\}} |x_j - y_j|$ est une distance, appelée *distance de Tchebychev.* Ces deux distances permettent la définition de la sphère cubique. La distance suivante sur $\mathbb{R}^2$, appelée *distance du métro français* permet bien souvent de montrer que des propriétés sur les distances sont fausses :

$$\operatorname{dist}(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{s'il existe } r \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = ry \\ |x| - |y| & \text{sinon} \end{cases}.$$

Proposition 4.1.7 *Sur $\mathbb{R}^d$, Les distances euclidienne et de Tchebychev sont équivalentes.*

Preuve. C'est trivial, puisque, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $d_\infty(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d \cdot d_\infty(x,y)$. □

Le résultat précédent est de première importance, puisqu'il permet d'affirmer, grâce à la proposition 3.1.16, que l'espace $\mathbb{R}^d$, équippé de la distance euclidienne, est équivalent à l'espace métrique $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$. On peut donc appliquer l'intégralité des résultats relatifs au produit fini d'espaces métriques à l'espace $\mathbb{R}^d$, équippé de la distance euclidienne. En particulier, une suite de $\mathbb{R}^d$ converge pour la distance d si et seulement si elle converge pour la distance d_∞ (vers la même limite).

Dans $\mathbb{R}^d$, le centre de l'intervalle $\prod_{j=1}^{d}]a_j, b_j[$ ($a_j, b_j \in \mathbb{R}$ pour tout $j \in \{1,\ldots,d\}$) est le point c tel que $[c]_j = (a_j + b_j)/2$ pour $j \in \{1,\ldots,d\}$. On a le résultat suivant.

Corollaire 4.1.8 *Une partie U de $\mathbb{R}^d$ est ouverte si et seulement si tout point de U est le centre d'un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. Dans $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$, une boule de centre c et de rayon $r > 0$ s'écrit $\prod_{j=1}^{d}][c]_j - r/2, [c]_j + r/2[$. Puisque les distances d et d_∞ sont équivalentes, on conclut aussitôt. □

1. En fait, la loi d_p explicitement définie par $d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|^p}$ est une distance sur $\mathbb{R}^d$, appelée *distance de Minkowski*, voir exemple 7.2.9.

4.2 Rappels

4.2.1 Suites de $\mathbb{R}^d$

Rappelons les notions fondamentales concernant les suites.

Rappel 4.2.1 Une *suite* de l'ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^d$ est une application de $\mathbb{N}_0$ dans E,

$$x_\cdot : \mathbb{N}_0 \to E \quad j \mapsto x_j.$$

L'élément x_j est appelé le j-ième élément de la suite. La suite est notée $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, $(x_j)_j$ ou même x_j lorsque le contexte est clair.

Bien sûr, nous dirons que deux suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont égales si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a $x_j = y_j$.

Une suite peut être obtenue au moyen des trois procédés suivants :

- en donnant explicitement l'application qui, à tout $j \in \mathbb{N}_0$, associe un élément x_j de $\mathbb{R}^d$. Il en est ainsi de la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = j^2 + j + 1$, quelque soit $j \in \mathbb{N}_0$,
- en donnant explicitement une relation de récurrence. Ainsi, on donne $J \in \mathbb{N}_0$ points $x_1, \ldots, x_J$ de $\mathbb{R}^d$ et une application qui à tout entier $j > J$ et aux points $x_1, \ldots, x_{j-1}$ associe un point x_j de $\mathbb{R}^d$. Il en est ainsi de la suite définie par $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_j = \sqrt{x_{j-1}x_{j-2}}$ pour tout $j \geqslant 3$,
- si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, E_j est une partie non-vide de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite $(x_j)_j$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, x_j appartiennne à E_j.

Il convient de différencier les deux premiers moyens d'obtention, qui fournissent explicitement une suite, et le dernier, qui postule l'existence d'une suite.

Rappel 4.2.2 Étant donné une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ et une application k de $\mathbb{N}_0$ dans $\mathbb{N}_0$ strictement croissante, i.e. telle que $k(1) \geqslant 1$ et $k(j+1) > k(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'application

$$x_{k(\cdot)} : \mathbb{N}_0 \to X \quad j \mapsto x_{k(j)}$$

est appelée une *sous-suite* de la suite $(x_j)_j$. On note parfois le j-ième élément de cette sous-suite x_{k_j} à la place de $x_{k(j)}$.

Remarquons déjà que l'on a toujours $k(j) \geqslant j$, quelque soit $j \in \mathbb{N}_0$.

4.2.2 Suites convergentes de $\mathbb{R}^d$

Nous l'introduisons ici le concept de suite convergente dans $\mathbb{R}^d$, afin de rendre son étude plus concrète. Il s'agit simplement d'une réécriture des notions introduites pour les espaces métriques.

Rappel 4.2.3 Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ *converge* vers $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (on dit aussi *tend* vers $x_0 \in \mathbb{R}^d$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que, pour tout indice $j \in \mathbb{N}_0$ vérifiant $j \geqslant J$, on a $|x_j - x_0| < \varepsilon$. Le point x_0 est applelé *limite de la suite* $(x_j)_j$ et on écrit $x_j \to x_0$, $\lim_{j\to\infty} x_j = x_0$ ou $\lim_j x_j = x_0$.

Ainsi, une suite $(x_j)_j$ converge vers x_0 si, quelque soit le rayon ε donné, les éléments x_j appartiennent tous à la boule centrée en x_0 de rayon ε pour un indice j « suffisamment grand », i.e. plus grand que J.

Rappel 4.2.4 Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ *converge* ou *est convergente* s'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ vers lequel la suite converge. Dans le cas contraire, on dit que la suite *diverge* ou *est divergente*.

Exemples 4.2.5 Si x_0 est un point de $\mathbb{R}^d$, la suite $(x_j = x_0)_j$ converge vers x_0.

La suite $(x_j = 1/j)_j$ de $\mathbb{R}$ converge vers 0. De fait, pout tout nombre réel $\varepsilon > 0$, $J = 1/\varepsilon$ est un nombre réel tel que, pour tout nombre entier $j \geqslant J + 1$, on a $|1/j - 0| < \varepsilon$.

Rappel 4.2.6 Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ est *bornée* si l'ensemble $\{x_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ est borné, i.e. s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $|x_j| \leqslant C$.

On remarque que cette définition est bien équivalente à la définition relative aux espaces métriques dans le cas de l'espace euclidien : on impose la relation $x_j \in B(0, C)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Enfin, introduisons une manière particulière de converger dans $\mathbb{R}^d$.

Rappel 4.2.7 Soient E une partie de $\mathbb{R}^d$ et x_0 un point de $\mathbb{R}^d$. La suite $(x_j)_j$ converge vers x_0 dans E si elle converge vers x_0 et s'il existe un nombre réel J tel que $x_j \in E$ pour tout indice $j \geqslant J$. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que x_0 appartienne à E.

4.2.3 Résultats fondamentaux

Les résultats qui suivent ont déjà été démontrés dans le cadre plus général des espaces métriques.

Exemple 4.2.8 Si E est une partie non-vide de $\mathbb{R}$ majorée (resp. minorée), il existe une suite qui converge vers la borne supérieure (resp. inférieure) de E. De fait, supposons que $E \neq \varnothing$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et soit M la borne supérieure de E ; le cas où E est une partie minorée se traite de même. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $E_j = E \cap \{x : |x - M| < 1/j\}$ n'est pas vide, en vertu de la proposition 2.2.14. Cela étant, le troisième moyen d'obtention d'une suite appliqué aux ensembles E_j ($j \in \mathbb{N}_0$) nous procure une suite $(x_j)_j$ telle que $x_j \in A_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. On a tôt fait de constater que $x_j \to x_0$.

Théorème 4.2.9 *Si une suite de $\mathbb{R}^d$ converge, alors sa limite est unique.*

Preuve. Supposons que la suite $(x_j)_j$ converge vers x_0 et x_0', avec x_0 différent de x_0'. Il existe alors deux nombres réels J_1 et J_2 tels que $|x_j - x_0| < |x_0 - x_0'|/3$ pour tout $j \geqslant J_1$ et $|x_j - x_0'| < |x_0 - x_0'|/3$ pour tout $j \geqslant J_2$. En posant $J = \sup\{J_1, J_2\}$, on obtient, pour tout $j \geqslant J$,

$$|x_0 - x_0'| = |x_0 - x_j + x_j - x_0'| \leqslant |x_0 - x_j| + |x_j - x_0'| < \frac{2}{3}|x_0 - x_0'|,$$

ce qui est contradictoire. $\square$

Théorème 4.2.10 *Toute sous-suite d'une suite convergente de $\mathbb{R}^d$ converge vers la même limite.*

Preuve. Soient $(x_j)_j$ une suite qui converge vers x_0 et $(x_{k(j)})_j$ une sous-suite de cette suite. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j - x_0| < \varepsilon$. Puisque $k(j) \geqslant j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $j \geqslant J$ implique également $|x_{k(j)} - x_0| < \varepsilon$, ce qui suffit pour conclure. $\square$

Théorème 4.2.11 *Toute suite convergente de $\mathbb{R}^d$ est bornée.*

Preuve. Si la suite $(x_j)_j$ converge vers x_0, il existe un nombre J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j - x_0| < 1$. On a donc, pour tout $j \geqslant J$,

$$|x_j| \leqslant |x_j - x_0| + |x_0| < |x_0| + 1.$$

De là,

$$|x_j| \leqslant \sup\{|x_1|, \ldots, |x_{J-1}|, |x_0| + 1\},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. □

4.3 Propriétés spécifiques des suites de $\mathbb{R}^d$

4.3.1 Suites divergentes

Bien sûr, une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ ne converge pas vers un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si et seulement s'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout nombre réel J, il existe un nombre $j \in \mathbb{N}_0$ vérifiant $j \geqslant J$ pour lequel $|x_j - x_0| \geqslant \varepsilon$. Pour montrer qu'une série ne converge pas, il faut donc a priori montrer qu'elle ne converge pour aucun point de $\mathbb{R}^d$. Cependant, en niant une des propriétés relatives aux suites convergentes, on obtient un critère de divergence. Par exemple, si une suite admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes, elle ne peut converger. De même, une suite non-bornée ne converge pas.

Introduisons maintenant une manière de diverger dans $\mathbb{R}^d$ de première importance.

Définition 4.3.1 Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ *converge vers l'infini* ou *tend vers l'infini* si pour tout nombre $N > 0$, il existe un nombre réel J tel que, pour tout indice $j \in \mathbb{N}_0$ vérifiant $j \geqslant J$, on a $|x_j| \geqslant N$. Si une suite $(x_j)_j$ converge vers l'infini, on écrit $|x_j| \to \infty$, $\lim_{j\to\infty} |x_j| = \infty$ ou $\lim_j |x_j| = \infty$.

Une telle suite n'étant pas bornée, elle ne converge pas. Ainsi, dire qu'une suite converge vers l'infini est un abus de langage. La raison de cet abus est que la formulation des propriétés des suites qui convergent vers l'infini est souvent très proche de celle des suites convergentes.

On peut se représenter la notion de convergence vers l'infini de manière imagée comme suit. Une suite $(x_j)_j$ converge vers l'infini si, quelque soit le rayon N donné, les éléments x_j n'appartiennent pas à la boule centrée à l'origine de rayon N quelque soit l'indice j « suffisamment grand », i.e. plus grand que J.

Le résultat suivant possède son équivalent pour les suites convergentes.

Proposition 4.3.2 *Toute sous-suite d'une suite qui converge vers l'infini converge également vers l'infini.*

Preuve. Soient $(x_j)_j$ une suite qui converge vers l'infini et $(x_{k(j)})_j$ une sous-suite de cette suite. Pour tout $N > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j| \geqslant N$. Puisque $k(j) \geqslant j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $j \geqslant J$ implique également $|x_{k(j)}| \geqslant N$, ce qui suffit pour conclure. □

4.3.2 Suites numériques, suites réelles

Définition 4.3.3 Une *suite numérique* est une suite de $\mathbb{C}$. Une *suite réelle* est une suite de $\mathbb{R}$.

En recourant aux signes d'inégalité sur $\mathbb{R}$, on peut introduire les définitions suivantes.

Définition 4.3.4 Une suite numérique réelle $(x_j)_j$ est
- *croissante* si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_j \leqslant x_{j+1}$; on écrit $x_j \nearrow$,
- *strictement croissante* si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_j < x_{j+1}$; on écrit $x_j \nearrow\!\!\nearrow$,
- *décroissante* si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_{j+1} \leqslant x_j$; on écrit $x_j \searrow$,
- *strictement décroissante* si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_{j+1} < x_j$; on écrit $x_j \searrow\!\!\searrow$,
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante,
- *strictement monotone* si elle strictement croissante ou strictement décroissante.

Les signes d'inégalité (i.e. le fait que $\mathbb{R}$ soit un champs) permettent aussi de préciser la manière de converger de certaines suites.

Définition 4.3.5 Soit $(x_j)_j$ une suite numérique réelle qui converge vers $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'elle converge
- *à droite* vers x_0 s'il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $x_j \geqslant x_0$; on écrit $x_j \to x_0^+$,
- *à gauche* vers x_0 s'il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $x_j \leqslant x_0$; on écrit $x_j \to x_0^-$,
- *en croissant* vers x_0, ou qu'elle *croît* vers x_0, si elle est croissante ; on écrit $x_j \nearrow x_0$,
- *en croissant strictement* vers x_0, ou qu'elle *croît strictement* vers x_0, si elle est strictement croissante ; on écrit $x_j \nearrow\!\!\nearrow x_0$,
- *en décroissant* vers x_0, ou qu'elle *décroît* vers x_0, si elle est décroissante ; on écrit $x_j \searrow x_0$,
- *en décroissant strictement* vers x_0, ou qu'elle *décroît strictement* vers x_0, si elle est strictement décroissante ; on écrit $x_j \searrow\!\!\searrow x_0$.

Une suite qui converge à droite vers x_0 est une suite qui converge vers x_0 dans $[x_0, +\infty[$. De même, une suite qui converge à gauche vers x_0 est une suite qui converge vers x_0 dans $]-\infty, x_0]$.

Exemples 4.3.6 Si E est une partie majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite monotone de E qui converge vers la borne supérieure. Si la borne supérieure de E n'est pas réalisée, on peut en outre exiger que la suite soit strictement monotone. De fait, soit M la borne supérieure de E. Si $M \in E$, la suite $(x_j = M)_j$ convient. Sinon, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $]M - 1/j, M[$ contient au moins un point de E. Ainsi, il existe une suite strictement croissante $(k(j))_j$ de $\mathbb{N}_0$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $E_j = E \cap]M - 1/k(j), M - 1/k(j+1)[$ ne soit pas vide. Il existe alors une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_j \in E_j$. On vérifie aisément que cette suite convient.

Si l'ensemble E est minoré, il existe une suite monotone qui converge vers la borne inférieure de E ; si la borne inférieure n'est pas réalisée on peut en outre exiger que la suite soit strictement monotone. Pour le montrer, il suffit d'adapter la démonstration précédente ou de considérer l'ensemble majoré $E' = \{x : -x \in E\}$. Si la suite $(x_j)_j$ convient pour la borne supérieure de E', la suite $(-x_j)_j$ convient pour la borne inférieure de E.

On peut aussi être plus précis quant aux suites qui convergent vers l'infini.

Définition 4.3.7 La suite numérique réelle $(x_j)_j$

- *converge vers* $+\infty$ si, pour tout $N > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $x_j \geqslant N$; on écrit $x_j \to +\infty$,
- *converge vers* $-\infty$ si, pour tout $N > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $x_j \leqslant -N$; on écrit $x_j \to -\infty$,
- *converge en croissant vers* $+\infty$ ou *croît vers* $+\infty$ si elle est croissante et converge vers $+\infty$; on écrit $x_j \nearrow +\infty$,
- *converge en croissant strictement vers* $+\infty$ ou *croît strictement vers* $+\infty$ si elle est strictement croissante et converge vers $+\infty$; on écrit $x_j \nearrow\!\!\nearrow +\infty$,
- *converge en décroissant vers* $-\infty$ ou *décroît vers* $-\infty$ si elle est décroissante et converge vers $-\infty$; on écrit $x_j \searrow -\infty$,
- *converge en décroissant strictement vers* $-\infty$ ou *décroît strictement vers* $-\infty$ si elle est strictement décroissante et converge vers $-\infty$; on écrit $x_j \searrow\!\!\searrow -\infty$.

Dans $\mathbb{R}$, une suite qui converge vers $+\infty$ est une suite qui converge vers l'infini dans $]0, +\infty[$; une suite qui converge vers $-\infty$ est une suite qui converge vers l'infini dans $]-\infty, 0[$.

4.3.3 Suites convergentes et combinaisons linéaires

Étudions à présent les propriétés des suites convergentes de $\mathbb{R}^d$ et de leurs limites vis-à-vis des opérations que nous avons introduites entre les points de $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.3.8 Soient $K \in \mathbb{N}_0$, K suites de $\mathbb{R}^d$ (resp. de $\mathbb{C}$) $(x_j^{(1)})_j, \ldots, (x_j^{(K)})_j$ et K nombres réels (resp. complexes) $r_1, \ldots, r_K$; la *combinaison linéaire* (resp. *combinaison linéaire complexe*) correspondante est la suite dont le j-ième élément est égal à $\sum_{k=1}^K r_k x_j^{(k)}$. Elle est naturellement notée $(\sum_{k=1}^K r_k x_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}_0}$, $(\sum_{k=1}^K r_k x_j^{(k)})_j$ ou même $\sum_{k=1}^K r_k x_j^{(k)}$ si aucune ambiguïté n'est possible.

Dans cette définition, nous pouvons bien sûr supposer que les coefficients diffèrent de zéro.

Théorème 4.3.9 *Soient $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ deux suites de $\mathbb{R}^d$ et $(r_j)_j$ une suite de $\mathbb{R}$.*

- *Si les suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ convergent vers les points x et y de $\mathbb{R}^d$ respectivement, alors la suite $(x_j + y_j)_j$ converge vers $x + y$.*
- *Si la suite $(x_j)_j$ converge vers $x \in \mathbb{R}^d$ et la suite $(r_j)_j$ vers $r \in \mathbb{R}$, la suite $(r_j x_j)_j$ converge vers rx.*

Preuve. Démontrons le premier point. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres réels J_1 et J_2 tels que $j \geqslant J_1$ implique $|x_j - x| < \varepsilon/2$ et $j \geqslant J_2$ implique $|y_j - y| < \varepsilon/2$. Si $J = \sup\{J_1, J_2\}$, on obtient, pour tout $j \geqslant J$,

$$|x_j + y_j - (x + y)| \leqslant |x_j - x| + |y_j - y| < \varepsilon,$$

ce qui suffit.

Démontrons le second point. Puisque la suite $(r_j)_j$ est convergente, il existe une constante $C > 0$ telle que $|r_j| \leqslant C$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres réels J_1 et J_2 tels que $j \geqslant J_1$ implique $|x_j - x| < \varepsilon/(2C)$ et $j \geqslant J_2$ implique $|r_j - r| < \varepsilon/(2|x| + 2)$. Dès lors, on a, pour tout $j \geqslant \sup\{J_1, J_2\}$,

$$|r_j x_j - rx| = |r_j x_j - r_j x + r_j x - rx| \leqslant |r_j||x_j - x| + |r_j - r||x| < \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □

Nous venons donc de montrer que toute combinaison linéaire de suites convergentes converge vers la combinaison linéaire correspondante des limites. Des résultats analogues existent pour les suites qui convergent vers l'infini.

Théorème 4.3.10 *Soient $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ deux suites de $\mathbb{R}^d$ et $(r_j)_j$ une suite de $\mathbb{R}$.*
- *Si la suite $(x_j)_j$ converge vers l'infini et si la suite $(y_j)_j$ est bornée, alors la suite $(x_j + y_j)_j$ converge vers l'infini.*
- *Si la suite $(x_j)_j$ converge vers l'infini et s'il existe $r > 0$ tel que $|r_j| \geqslant r$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors la suite $(r_j x_j)_j$ converge vers l'infini.*

Preuve. Pour le premier point, la suite $(y_j)_j$ étant bornée, il existe une constante $C > 0$ telle que $|y_j| \leqslant C$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $N > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j| \geqslant N + C$. Ainsi, $j \geqslant J$ implique $|x_j + y_j| \geqslant |x_j| - |y_j| \geqslant N$, ce qui suffit.

Démontrons le second point. Pour tout $N > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j| \geqslant N/r$. Dès lors, $j \geqslant J$ implique $|r_j x_j| \geqslant r|x_j| \geqslant N$, ce qui permet de conclure. □

Dans $\mathbb{C}$, ces résultats peuvent être précisés de la manière suivante.

Proposition 4.3.11 *Les deux résultats précédents restent valides si on remplace « $\mathbb{R}^d$ » et « $\mathbb{R}$ » par « $\mathbb{C}$ », ainsi que combinaison linéaire par combinaison linéaire complexe.*

Preuve. Les mêmes démonstrations conviennent, puisque $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$ et $|zz'| = |z||z'|$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$. □

4.3.4 Suites convergentes et produit scalaire

Définition 4.3.12 Le *produit scalaire* (resp. *produit*) des suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{C}$) est la suite numérique réelle (resp. complexe) dont le j-ième élément est égal au produit scalaire $\langle x_j, y_j \rangle$ (resp. au produit $x_j y_j$).

Elle est naturellement notée $(\langle x_j, y_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}_0}$ (resp. $(x_j y_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$), $(\langle x_j, y_j \rangle)_j$ (resp. $(x_j y_j)_j$) ou même $\langle x_j, y_j \rangle$ (resp. $x_j y_j$) si aucune ambiguïté n'est possible.

Théorème 4.3.13 *Le produite scalaire de deux suites convergentes de $\mathbb{R}^d$ converge vers le produit scalaire de leurs limites.*

Si les suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ sont respectivement convergente vers zéro et bornée, alors la suite $(\langle x_j, y_j \rangle)_j$ converge vers zéro.

Preuve. Soient $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ deux suites convergentes de $\mathbb{R}^d$, de limites respectives x et y. Toute suite convergente étant bornée, il existe une constante $C > 0$ telle que $|y_j| \leqslant C$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres réels J_1 et J_2 tels que, d'une part $j \geqslant J_1$ implique $|x_j - x| < \varepsilon/(2C)$ et, d'autre part, $j \geqslant J_2$ implique $|y_j - y| < \varepsilon/(2 + 2|x|)$. Dès lors, $j \geqslant \sup\{J_1, J_2\}$ implique

$$|\langle x_j, y_j\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_j - x, y_j\rangle + \langle x, y_j - y\rangle| \leqslant |x_j - x||y_j| + |x||y_j - y| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la première partie.

Pour la seconde partie, la suite $(y_j)_j$ étant bornée, il existe $C > 0$ tel que $|y_j| \leqslant C$, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j| < \varepsilon/C$, donc tel que $|\langle x_j, y_j\rangle| \leqslant |x_j||y_j| < \varepsilon$, ce qui suffit. □

Remarquons que dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$, il n'existe pas de propriété analogue lorsque la suite $(x_j)_j$ tend vers l'infini. Ainsi, dans $\mathbb{R}^2$, on vérifie sans peine les résultats suivants : $a_j = (j, 0)$ converge vers l'infini, $b_j = (j^{-1/2}, 0)$, $c_j = (1/j, 0)$, $d_j = (j^{-2}, 0)$ et $f_j = ((-1)^j/j, 0)$ convergent vers zéro, $g_j = (0, j)$, $h_j = ((-1)^j/j, j)$ et $i_j = (1, j)$ convergent vers l'infini. On a cependant $\langle a_j, b_j\rangle = \sqrt{j} \nearrow +\infty$, $\langle a_j, c_j\rangle = 1 \to 1$, $\langle a_j, d_j\rangle = 1/j \to 0$, $\langle a_j, f_j\rangle = (-1)^j \not\to$, $\langle a_j, g_j\rangle = 0 \to 0$, $\langle a_j, h_j\rangle = (-1)^j \not\to$ et $\langle a_j, i_j\rangle = j \nearrow +\infty$.

4.3.5 Composantes d'une suite convergente

Passons maintenant aux composantes. Le résultat suivant ramène l'étude de la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^d$ à celle de d suites dans $\mathbb{R}$. Ce résultat a déjà été obtenu dans le cadre des espaces métriques ; la démonstration qui suit utilise spécifiquement la distance euclidienne.

Proposition 4.3.14 *Dans $\mathbb{R}^d$, la suite $(x_j)_j$ converge vers x si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, la suite $([x_j]_k)_j$ converge vers la k-ième composante de x.*

Preuve. Si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ converge vers x, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j - x| < \varepsilon$. Dès lors, $j \geqslant J$ implique, pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, $|[x_j]_k - [x]_k| = |[x_j - x]_k| \leqslant |x_j - x| < \varepsilon$.

Supposons maintenant que pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, $[x_j]_k \to [x]_k$. Pour chacun de ces nombres k, il existe alors J_k tel que $j \geqslant J_k$ implique $|[x_j]_k - [x]_k| < \varepsilon/d$. Ainsi, pour tout $j \geqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant d} J_k$, $|x_j - x| \leqslant \sum_{k=1}^d |[x_j - x]_k| < \varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

Nous avons ainsi montré que la suite numérique $(z_j)_j$ converge vers z dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les suites $(\Re z_j)_j$ et $(\Im z_j)_j$ convergent vers $\Re z$ et $\Im z$ respectivement. Ainsi, une suite numérique $(z_j)_j$ converge vers une limite z si et seulement si la suite $(\bar{z}_j)_j$ converge vers $\bar{z}$. Remarquons qu'il n'existe pas de propriété générale de ce type pour une suite de $\mathbb{R}^d$ qui converge vers l'infini. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer, dans $\mathbb{R}^2$, la suite $(x_j = (j, 0))_j$ et la suite $(y_j)_j$ définie par $y_{2j} = (2j, 0)$ et $y_{2j-1} = (0, 2j - 1)$, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

4.3.6 Module d'une suite convergente

Proposition 4.3.15 *Soit $(x_j)_j$ une suite de $\mathbb{R}^d$.*

- *Si cette suite converge vers un point $x \in \mathbb{R}^d$, alors la suite $(|x_j|)_j$ converge vers $|x|$.*
- *La suite $(x_j)_j$ converge vers zéro si et seulement si la suite $(|x_j|)_j$ converge vers zéro.*
- *La suite $(x_j)_j$ converge vers l'infini si et seulement si la suite $(|x_j|)_j$ converge vers l'infini.*

Preuve. Seul le premier point n'est pas trivial. Il résulte en fait de l'inégalité $\big||x_j| - |x|\big| \leqslant |x_j - x|$, valable pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. □

Si la suite numérique réelle $(|x_j|)_j$ tend vers une limite non-nulle x, on ne peut bien sûr rien conclure au sujet de la suite $(x_j)_j$. Pour le voir, il suffit de considérer la suite $(x_j = (-1)^j)_j$.

4.3.7 Théorème de Césaro

Théorème 4.3.16 (Césaro) *Si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ converge vers $x \in \mathbb{R}^d$, alors la suite $(y_j)_j$ définie par $y_j = (1/j)\sum_{k=1}^{j} x_k$ converge également vers x.*

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J_1 tel que $|x_j - x| < \varepsilon/2$ pour tout $j \geqslant J_1$. Il existe alors J_2 tel que $(1/j)\sum_{k=1}^{J_1} |x_k - x| < \varepsilon/2$ pour tout $j \geqslant J_2$. Ainsi, pour tout $j \geqslant \max\{J_1, J_2\}$, on a

$$|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_k - x| \leqslant \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{J_1} |x_k - x| + \frac{1}{j}\sum_{k=J_1+1}^{j} |x_k - x| < \varepsilon,$$

ce qui suffit. □

Remarque 4.3.17 La suite $(x_j = (-1)^j)_j$ ne converge pas, mais on vérifie de suite que l'on a $(1/j)\sum_{k=1}^{j} x_k \to 0$.

4.3.8 Suites numériques convergentes

Proposition 4.3.18 *Le théorème 4.3.13 s'applique aux suites numériques si on remplace « produit scalaire » par « produit », « $\mathbb{R}^d$ » par « $\mathbb{C}$ » et « $\langle x_j, y_j \rangle$ » par « $x_j y_j$ ».*

Preuve. La même démonstration convient si on remarque que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|zz'| = |z||z'|$. □

Proposition 4.3.19 *Si $K \in \mathbb{N}_0$ et les suites numériques $(z_j^{(1)})_j, \ldots, (z_j^{(K)})_j$ convergent respectivement vers $z^{(1)}, \ldots, z^{(K)}$, alors la suite numérique dont le j-ième élément est égal à $z_j^{(1)} \cdots z_j^{(K)}$ converge vers $z^{(1)} \cdots z^{(K)}$.*

Preuve. Pour $K = 2$, cela résulte de la proposition 4.3.18. Un raisonnement par récurrence permet de conclure. □

Proposition 4.3.20 *Si la suite numérique $(z_j)_j$ converge vers un nombre complexe non-nul z et si on a $z_j \neq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors la suite $(1/z_j)_j$ converge vers $1/z$.*

Preuve. Il existe un nombre réel J_1 tel que $j \geqslant J_1$ implique $|z_j - z| < |z|/2$. Dès lors, pour tout $j \geqslant J_1$,

$$|\frac{1}{z_j} - \frac{1}{z}| = \frac{|z - z_j|}{|z||z_j|} \leqslant |z - z_j|\frac{1}{|z|}\frac{1}{||z| - |z - z_j||} < |z - z_j|\frac{2}{|z|^2}.$$

Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel J_2 tel que $j \geqslant J_2$ implique $|z_j - z| < \varepsilon|z|^2/2$. Pour tout $j \geqslant \sup\{J_1, J_2\}$, on a alors $|1/z_j - 1/z| < \varepsilon$, ce qui suffit. □

Proposition 4.3.21 *Si la suite numérique $(z_j)_j$ n'a aucun élément nul, alors elle converge vers zéro si et seulement si la suite $(1/z_j)_j$ converge vers l'infini.*

Proposition 4.3.22 *Une suite numérique réelle $(x_j)_j$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si les suites numériques réelles $(x_j^+)_j$ et $(x_j^-)_j$ convergent vers x^+ et x^- respectivement.*

Preuve. De fait, si $x_j \to x$, on a $x_j^\pm = (|x_j| \pm x_j)/2 \to x^\pm$ et si $x_j^\pm \to x^\pm$, $x_j = x_j^+ - x_j^- \to x^+ - x^- = x$. □

Remarquons que nous avons incidemment montré que si $K \in \mathbb{N}_0$ et $(x_j^{(1)})_j, \ldots, (x_j^{(K)})_j$ sont K suites numériques réelles qui convergent respectivement vers $x^{(1)}, \ldots, x^{(K)}$, alors les suites numériques réelles $(\sup\{x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(K)}\})_j$ et $(\inf\{x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(K)}\})_j$ convergent respectivement vers $\sup\{x^{(1)}, \ldots, x^{(K)}\}$ et $\inf\{x^{(1)}, \ldots, x^{(K)}\}$. Si la suite numérique réelle $(x_j)_j$ converge vers l'infini, on ne peut rien affirmer au sujet des suites $(x_j^+)_j$ et $(x_j^-)_j$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les suites numériques rélles $(x_j = j)_j$, $(y_j = -j)_j$ et $(z_j = (-1)^j j)_j$.

Proposition 4.3.23 *Si $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont deux suites numériques réelles qui convergent respectivement vers x et y, alors*

- *si $x \neq y$, il existe un nombre réel J tel que $x_j \neq y_j$ pour tout $j \geqslant J$. Dès lors si x diffère de $a \in \mathbb{R}$, il existe J tel que $x_j \neq a$ pour tout $j \geqslant J$,*
- *si $x < y$, alors il existe un nombre réel J tel que $x_j < y_j$ pour tout $j \geqslant J$. En particulier si on a $x < a$ (resp. $x > a$) ($a \in \mathbb{R}$), il existe J tel que $x_j < a$ (resp. $x_j > a$) pour tout $j \geqslant J$.*

Preuve. De fait, il existe un nombre réel J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j - x| < |x - y|/3$ et $|y_j - y| < |x - y|/3$. Le premier point résulte alors des inégalités suivantes, valables pour tout $j \geqslant J$, $|x_j - y_j| \geqslant |x - y| - |x_j - x| - |y_j - y| > |x - y|/3$. Le cas particulier s'obtient en considérant la suite particulière $(y_j = a)_j$. Pour le second point, on a, pour tout $j \geqslant J$, $y_j - x_j \geqslant y - x - |x_j - x| - |y_j - y| > (y - x)/3$. Pour le cas particulier, il suffit, ici aussi, de considérer une suite constante. □

Proposition 4.3.24 *Si la suite numérique réelle $(x_j)_j$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ et si, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a $x_j < a$ (resp. $x \leqslant a$, $x > a$, $x \geqslant a$) ($a \in \mathbb{R}$), alors on a $x \leqslant a$ (resp. $x \leqslant a$, $x \geqslant a$, $x \geqslant a$).*

Preuve. Vu la proposition précédente, il suffit de procéder par contradiction. □

Proposition 4.3.25 *Si une suite numérique réelle $(x_j)_j$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si la suite numérique réelle $(y_j)_j$ est telle que $x_j \leqslant y_j$ (resp. $x_j \geqslant y_j$) pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors elle converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Théorème 4.3.26 (étau) *Si les suites numériques réelles $(x_j)_j$ et $(z_j)_j$ convergent vers $a \in \mathbb{R}$ et si la suite numérique réelle $(y_j)_j$ vérifie $x_j \leqslant y_j \leqslant z_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors la suite $(y_j)_j$ converge vers a.*

Preuve. Cela résulte aussitôt des majorations $|y_j - a| \leqslant \sup\{|x_j - a|, |z_j - a|\}$, valables pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. □

Le résultat précédent est parfois appelé théorème du sandwich.

Traitons quelques exemples fondamentaux

Rappel 4.3.27 Nous établirons que pour tout nombre réel $r \geqslant 0$ et tout nombre naturel $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un et un seul $x \geqslant 0$ tel que $x^j = r$. Ce nombre est appelé racine j-ième de r et est noté $\sqrt[j]{r}$.

Exemple 4.3.28 Pour tous $r > 0$, la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = \sqrt[j]{r}$ tend vers 1. Tout d'abord, puisque $\sqrt[j]{1/r} = 1/\sqrt[j]{r}$, nous pouvons nous restreindre au cas $r \geqslant 1$. Posons $y_j = x_j - 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. On a, en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$r = (y_j + 1)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} y_j^k \geqslant j y_j,$$

ce qui permet d'obtenir les relations $0 \leqslant y_j \leqslant r/j \to 0$.

Exemple 4.3.29 La suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = \sqrt[j]{j}$ converge vers 1. Comme précédemment, posons $y_j = x_j - 1$. On a

$$j = (y_j + 1)^j = \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} y_j^k \geqslant \frac{j(j-1)}{2} y_j^2,$$

ce qui prouve que l'on a $0 \leqslant y_j \leqslant \sqrt{2/n - 1} \to 0$.

Exercice 4.3.30 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $x > 0$, on a

$$\frac{j^n}{(1+x)^j} \to 0$$

Suggestion. Lorsque $j > 2n$, on a

$$\begin{aligned} (1+x)^j &\geqslant \binom{j}{n+1} x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} j(j-1)\cdots(j-n) \\ &\geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (\frac{j}{2})^{n+1} \geqslant \frac{(x/2)^{n+1}}{(n+1)!} j^{n+1} \end{aligned}$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{j^n}{(1+x)^j} \leqslant \frac{2^n (n+1)!}{x^n} \frac{1}{j} \to 0.$$

Exercice 4.3.31 Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, montrer que $j^n/z^j \to 0$.
Suggestion. Puisque

$$|\frac{j^n}{z^j}| = \frac{j^n}{(1 + |z| - 1)^j},$$

cela résulte de l'exemple précédent avec $x = |z| - 1$.

4.4 Compléments de théorie pour les suite réelles

4.4.1 Suites monotones

Théorème 4.4.1 *Une suite numérique réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge vers la borne supérieure (resp. inférieure) de ses éléments*

Preuve. Soit $(x_j)_j$ une suite de $\mathbb{R}$ croissante et majorée. Désignons par x la borne supérieure de l'ensemble $E = \{x_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ et montrons que l'on a $x_j \to x$. La proposition 2.2.14 implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x_J \in E$ tel que $x - \varepsilon < x_J$. La suite $(x_j)_j$ étant croissante, on a, pour tout $j \geqslant J$, $|x_j - x| \leqslant x - x_J < \varepsilon$, ce qui suffit pour démontrer le cas d'une suite croissante.

Le cas d'une suite décroissante $(x_j)_j$ se traite de même. On peut aussi considérer le cas de la suite croissante et majorée $(-x_j)_j$. Elle converge vers la borne supérieure de l'ensemble de ses éléments, qui est l'opposé de la borne inférieure de l'ensemble des éléments de la suite $(x_j)_j$. □

Exemple 4.4.2 Étudier la convergence de la suite réelle $(x_j)_j$ définie par

$$x_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k+j}.$$

Cette suite est strictement croissante, puisque

$$x_{j+1} - x_j = \frac{1}{(2j+2)} + \frac{1}{(2j+1)} - \frac{1}{(j+1)} = \frac{(2j+1) + 2(j+1) - 2(2j+1)}{2(2j+1)(j+1)} > 0,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. De plus, on a $x_j \leqslant j(1/j) = 1$. Vu le théorème 4.4.1, cette suite converge.

Exemple 4.4.3 La suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = \sum_{k=1}^{j} 1/k^2$ converge. En effet, cette suite est trivialement croissante et majorée, puisque

$$\begin{aligned} x_j &= 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2. \end{aligned}$$

Exercice 4.4.4 Montrer que la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = \sum_{k=0}^{j} 1/k!$ converge.
Suggestion. Cette suite est croissante et on a

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} + \sum_{k=4}^{j} \frac{1}{k^2},$$

puisque $k! > k^2$ pour tout entier k supérieur ou égal à 4, comme on le montre aisément par récurrence. Dès lors, l'exemple 4.4.3 permet de conclure.

Cet exercice donne lieu à l'exemple suivant.

Exemple 4.4.5 Établir que la suite $(x_j)_j$ définie par

$$x_j = (1 + \frac{1}{j})^j$$

converge vers le nombre

$$e = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!}.$$

Suggestion. Considérons la suite $(y_j)_j$ définie par $y_j = \sum_{k=0}^{j} 1/k!$. Grâce à l'exercice 4.4.4 (ou 4.4.13), nous savons que cette suite converge vers une limite que nous noterons e. Pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant j$, posons maintenant

$$r_j^{(k)} = (1 - \frac{1}{j})(1 - \frac{2}{j}) \cdots (1 - \frac{k-1}{j}).$$

On a bien sûr

$$r_j^{(k)} = (\frac{j-1}{j})(\frac{j-2}{j}) \cdots (\frac{j-k-1}{j}) = \frac{1}{j^k} \frac{j!}{(j-k)!}.$$

Par la formule du binôme de Newton, on obtient

$$(1 + \frac{1}{j})^j = \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} \frac{1}{j^k},$$

ce qui permet d'écrire, pour tout $j \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} y_j - x_j &= \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} - (1 + \frac{1}{j})^j = \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} - \frac{j!}{j^k (j-k)!} \\ &= \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{j^k} \frac{j!}{(j-k)!}) = \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} (1 - r_j^{(k)}). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$1 - \frac{k(k-1)}{2j} \leqslant r_j^{(k)} \leqslant 1$$

pour tous j, k tels que $2 \leqslant k \leqslant j$. C'est trivial si $k = 2$. Supposons l'inégalité de gauche démontrée pour $k = 2, \ldots, l$ et montrons qu'elle est encore vraie pour $k = l + 1$. On a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(l+1)l}{2j} &= 1 - \frac{l(l-1)}{2j} - \frac{l}{j} \leqslant r_j^{(l)} - \frac{l}{j} \\ &\leqslant (1 - \frac{1}{j})(1 - \frac{2}{j}) \cdots (1 - \frac{l-1}{j}) - \frac{l}{j} \\ &\leqslant (1 - \frac{1}{j})(1 - \frac{2}{j}) \cdots (1 - \frac{l-1}{j})(1 - \frac{l}{j}) = r_j^{(l+1)}. \end{aligned}$$

L'inégalité de droite étant triviale, la majoration et la minoration portant sur $r_j^{(k)}$ ont bien été démontrées. On obtient alors, pour tout $j \geqslant 2$,

$$0 \leqslant y_j - x_j \leqslant \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \frac{k(k-1)}{2j} = \frac{1}{2j} \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} = \frac{e}{2j},$$

ce qui prouve que la suite $(x_j)_j$ converge vers e, par le théorème de l'étau.

Remarque 4.4.6 L'étude de la suite $(1+1/j)^j$ est plus aisée si on considère la fonction $f(x) = (1/x)^x$ sur $]0,+\infty[$ et la limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$. En effet, grâce à la théorie concernant les fonctions, on montre que $f \in C^\infty(]0,+\infty[)$ et, en ayant recours au théorème de l'Hospital, $\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = 1$, ce qui suffit par continuité.

Exercice 4.4.7 Établir que, pour tout $a > 0$, la suite numérique réelle $(x_j)_j$ définie par récurrence par $x_1 > 0$ et

$$x_{j+1} = \frac{1}{2}(x_j + \frac{a}{x_j})$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ converge vers $\sqrt{a}$.
Suggestion. Établissons d'abord que pour tous $r, s \geqslant 0$, on a $\sqrt{rs} \leqslant (r+s)/2$. En élevant chaque membre au carré, cette relation est vérifiée si et seulement si $rs/2 \leqslant r^2 + s^2$, c'est-à-dire si et seulement si $(r-s)^2 \geqslant 0$.

Bien sûr, $x_j > 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. De plus, l'inégalité $\sqrt{rs} \leqslant (r+s)/2$ valable pour tous $r, s \geqslant 0$ implique

$$\sqrt{a} = \sqrt{x_j \frac{a}{x_j}} \leqslant \frac{1}{2}(x_j + \frac{a}{x_j}) = x_{j+1}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Ainsi, $j \in \mathbb{N}_0$ implique $x_{j+1}^2 \geqslant a$ et par conséquent $a/x_{j+1} \leqslant x_{j+1}$. Au total, la suite $(x_j)_j$ est décroissante à partir de x_2 et minorée, donc converge, vu le théorème 4.4.1. Puisque la limite x de cette suite doit vérifier $x \geqslant 0$ et $x = (x + a/x)/2$, on a $x = \sqrt{a}$.

Exercice 4.4.8 Si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^+$ vérifie $x_{p+q} \leqslant x_p x_q$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, établir que la suite $(y_j)_j$ définie par $y_j = x_j^{1/j}$ converge vers $\inf\{x_j^{1/j} : j \in \mathbb{N}_0\}$.
Suggestion. soit $x = \inf\{x_j^{1/j} : j \in \mathbb{N}_0\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}_0$ tel que $x_j \leqslant (x+\varepsilon)^j$. Posons $s = \sup\{x_1, \ldots, x_j\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soient $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ tels que $k = jp_k + q_k$ avec $0 \leqslant q_k < j$. Il vient successivement $x_k = x_{jp_k+q_k} \leqslant x_{jp_k} x_{q_k} \leqslant (x+\varepsilon)^{jp_k} s$. Donc, $x \leqslant x_k^{1/k} \leqslant (x+\varepsilon)^{jp_k/k} s^{1/k} = (x+\varepsilon) s^{1/k} (x+\varepsilon)^{-q_k/k}$. Or, puisque $r^{1/j}$ tend vers 1 pour tout $r > 0$, la suite $(\sqrt[k]{s(a+\varepsilon)^{-q_k}})_k$ tend vers 1. Par conséquent, il vient $a \leqslant a_k^{1/k} \leqslant (a+2\varepsilon)$ pour k suffisamment grand, ce qui permet de conclure[2].

Corollaire 4.4.9 *Si une sous-suite d'une suite numérique réelle croissante (resp. décroissante) converge, alors la suite converge.*

Preuve. Soit $(x_j)_j$ une suite de $\mathbb{R}$ croissante dont la sous-suite $(x_{k(j)})_j$ converge. Comme toute suite convergente est bornée, il existe $C > 0$ tel que $|x_{k(j)}| \leqslant C$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. On a dès lors $|x_j| \leqslant |x_{k(j)}| \leqslant C$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, ce qui montre que la suite $(x_j)_j$ est bornée. La proposition précédente permet alors de conclure. Pour le cas d'une sous-suite décroissante, on peut soit procéder de manière semblable, soit remarquer que la suite $(-x_j)_j$ est croissante. □

4.4.2 Suites adjacentes

Une conséquence du théorème 4.4.1 est connue sous le nom de théorème des suites adjacentes.

2. Dès lors, pour tout élément x d'une algèbre normée $(X, \|\cdot\|)$, la suite $(\|a^j\|^{1/j})_j$ converge vers $\inf\{\|a^j\|^{1/j} : j \in \mathbb{N}_0\}$.

Définition 4.4.10 Deux suites réelles $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence $(x_j - y_j)_j$ tend vers zéro.

Lemme 4.4.11 *Si deux suites réelles $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont adjacentes, alors, si $(x_j)_j$ désigne la suite croissante, on a $x_j \leqslant y_k$ pour tous les indices $j, k \in \mathbb{N}_0$.*

Preuve. Puisque, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$y_{j+1} - y_j \leqslant 0 \leqslant x_{j+1} - x_j,$$

la suite $(y_j - x_j)_j$ décroît vers zéro. Il s'ensuit que $y_j - x_j \geqslant 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Soient maintenant j et k deux nombres naturels non-nuls ; si $j \leqslant k$, on a $x_j \leqslant x_k \leqslant y_k$. Si $j \geqslant k$, on a $x_j \leqslant y_j \leqslant y_k$. □

Proposition 4.4.12 (suites adjacentes) *Si les deux suites réelles $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite $l \in \mathbb{R}$. Qui plus est, si $(x_j)_j$ désigne la suite croissante, on a $x_j \leqslant l \leqslant y_k$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$.*

Preuve. Puisque $x_j < y_1$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, le théorème 4.4.1 implique que la suite $(x_j)_j$ converge vers la borne supérieure $x_0 \in \mathbb{R}$ de ses éléments. De même, puisque la suite $(y_j)_j$ est décroissante et minorée par x_1, elle converge vers la borne inférieure $y_0 \in \mathbb{R}$ de ses éléments. La suite $(x_j - y_j)_j$ converge donc vers $x_0 - y_0$; or, par hypothèse, elle converge également vers zéro. L'unicité de la limite implique donc $x_0 = y_0$. Enfin, il est évident que l'on a, par définition de x_0 et y_0, $x_j \leqslant x_0 = y_0 \leqslant y_k$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$. □

Exercice 4.4.13 Montrer que la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = \sum_{k=0}^{j} 1/k!$ converge.
Suggestion. Considérons la suite auxiliaire $(y_j)_j$ définie par $y_j = x_j + 1/(j(j!))$. Cette suite est décroissante, puisque

$$\begin{aligned}
y_{j+1} - y_j &= \frac{1}{(j+1)!} + \frac{1}{(j+1)(j+1)!} - \frac{1}{j(j!)} \\
&= \frac{1}{(j+1)!}(1 + \frac{1}{j+1}) - \frac{1}{j(j!)} \\
&= \frac{1}{j!}(\frac{1}{j+1}(1 + \frac{1}{j+1}) - \frac{1}{j}) \\
&= \frac{1}{j!}\frac{1}{j(j+1)^2}(j(j+1) + j - (j+1)^2) \\
&= \frac{-1}{j(j+1)^2 j!} < 0.
\end{aligned}$$

Puisque $1/(j(j!)) \to 0$, les suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont adjacentes, ce qui implique qu'elles convergent vers une limite commune.

On définit le nombre e comme suit : $e = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} 1/k!$. Ce nombre est irrationnel.

Remarque 4.4.14 Dans l'exercice précédent, on remarque que $j(j!)x_j$ est un nombre entier et qu'il existe (en utilisant la suite auxiliaire $(y_j)_j$) une suite $(r_j)_j$ d'entiers telle que

$$\frac{r_j}{j(j!)} < e < \frac{r_j + 1}{j(j!)},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Si e était un nombre rationnel, on aurait alors $e = p/q$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}_0$, mais les inégalités précédentes impliqueraient

$$r_q < pq! < r_q + 1,$$

ce qui est impossible, puisque $pq!$ est un nombre entier.

4.4.3 Limites supérieures et inférieures

Définition 4.4.15 Si $(x_j)_j$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$, posons $y_j = \sup\{x_k : k \geqslant j\}$. La suite $(y_j)_j$ ainsi définie est décroissante et minorée ; elle converge donc. Sa limite est appelée *limite supérieure* de la suite $(x_j)_j$ et est notée

$$\limsup_{j\to\infty} x_j = \overline{\lim_{j\to\infty}}\, x_j = \lim_{j\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant j\}.$$

Si la suite $(x_j)_j$ n'est pas majorée, on pose $\limsup_{j\to\infty} x_j = +\infty$; si elle est majorée et que la suite $(y_j)_j$ n'est pas minorée, on pose $\limsup_{j\to\infty} x_j = -\infty$.

Définition 4.4.16 Si $(x_j)_j$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$, posons $y_j = \inf\{x_k : k \geqslant j\}$. La suite $(y_j)_j$ ainsi définie est croissante et majorée ; elle converge donc. Sa limite est appelée *limite inférieure* de la suite $(x_j)_j$ et est notée

$$\liminf_{j\to\infty} x_j = \underline{\lim_{j\to\infty}}\, x_j = \lim_{j\to\infty} \inf\{x_k : k \geqslant j\}.$$

Si la suite $(x_j)_j$ n'est pas minorée, on pose $\liminf_{j\to\infty} x_j = -\infty$; si elle est minorée et que la suite $(y_j)_j$ n'est pas majorée, on pose $\liminf_{j\to\infty} x_j = +\infty$.

Exemples 4.4.17 Donnons quelques exemples simples :
- Si $x_j = (-1)^j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors $\limsup_{j\to\infty} x_j = 1$ et $\liminf_{j\to\infty} x_j = -1$.
- Si $x_j = (-1)^j j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors $\limsup_{j\to\infty} x_j = +\infty$ et $\liminf_{j\to\infty} x_j = -\infty$.
- Si $x_j = j + (-1)^j j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors $\limsup_{j\to\infty} x_j = +\infty$ et $\liminf_{j\to\infty} x_j = 0$.
- Si $x_j = j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors $\limsup_{j\to\infty} x_j = \liminf_{j\to\infty} x_j = +\infty$.

Remarque 4.4.18 Pour toute suite $(x_j)_j$ bornée de $\mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{j\to\infty} x_j = -\liminf_{j\to\infty}(-x_j) \quad \text{et} \quad \liminf_{j\to\infty} x_j = -\limsup_{j\to\infty}(-x_j)$$

Proposition 4.4.19 *Soient $(x_j)_j$ une suite bornée de $\mathbb{R}$ et x un nombre réel. On a $x = \limsup_{j\to\infty} x_j$ (resp. $x = \liminf_{j\to\infty} x_j$) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
- *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice J tel que $j \geqslant J$ implique $x_j \leqslant x + \varepsilon$ (resp. $x_j \geqslant x - \varepsilon$),*
- *pour tout $\varepsilon > 0$ et tout un indice j, il existe un indice j_0 supérieur à j tel que $x_{j_0} \geqslant x - \varepsilon$ (resp. $x_{j_0} \leqslant x + \varepsilon$).*

Preuve. Traitons le cas de la limite supérieure, le cas de la limite inférieure se traitant de même ou en considérant la suite $(-x_j)_j$. Remarquons d'abord que la première condition est vérifiée si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}_0 : x_j > x + \varepsilon\}$ est fini et que la seconde condition est vérifiée si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}_0 : x_j \geqslant x - \varepsilon\}$ est infini. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, posons $y_j = \sup\{x_k : k \geqslant j\}$.

Les conditions sont nécessaires. Si l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}_0 : x_j > x + \varepsilon\}$ est infini, alors on a $y_j > x + \varepsilon$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et donc $\limsup_{j\to\infty} x_j \geqslant x + \varepsilon$, ce qui est contradictoire. Si l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}_0 : x_j \geqslant x - \varepsilon\}$ est fini, alors, il existe un indice J tel que $j \geqslant J$ implique $x_j < x - \varepsilon$. Pour un tel indice j, on a $y_j < x - \varepsilon$ et donc $\limsup_{j\to\infty} x_j \leqslant x - \varepsilon$, ce qui est également impossible.

Les conditions sont suffisantes. Soit $\varepsilon > 0$. La première condition implique l'existence d'un indice J tel que $y_J \leqslant x + \varepsilon$ et la seconde implique simplement $y_j \geqslant x - \varepsilon$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, pour tout $j \geqslant J$, on a

$$x - \varepsilon \leqslant y_j \leqslant y_J \leqslant x + \varepsilon,$$

ce qui prouve que l'on a $y_j \to x$. □

Théorème 4.4.20 *Une suite bornée $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}$ converge si et seulement si*

$$\limsup_{j\to\infty} x_j = \liminf_{j\to\infty} x_j,$$

auquel cas,

$$\lim_{j\to\infty} x_j = \limsup_{j\to\infty} x_j.$$

Preuve. La condition est nécessaire. Posons, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $y_j = \sup\{x_k : k \geqslant j\}$ et supposons avoir $x_j \to x$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice J tel que $j \geqslant J$ implique

$$x - \varepsilon < x_j < x + \varepsilon.$$

Pour un tel indice j, on a donc $y_j \leqslant x + \varepsilon$ et ainsi

$$x - \varepsilon < x_j \leqslant y_j \leqslant x + \varepsilon,$$

ce qui montre que la limite supérieure de la suite $(x_j)_j$ est x. On montre de la même manière que la limite inférieure de cette suite est également x.

La condition est suffisante. Posons

$$x = \limsup_{j\to\infty} x_j = \liminf_{j\to\infty} x_j$$

et soit $\varepsilon > 0$. Vu la proposition précédente, il existe un indice J_1 tel que $j \geqslant J_1$ implique $x_j < x+\varepsilon$ et un indice J_2 tel que $j \geqslant J_2$ implique $x_j > x-\varepsilon$. En posant $J = \max\{J_1, J_2\}$, on obtient, pour tout $j \geqslant J$,

$$x - \varepsilon < x_j < x + \varepsilon,$$

ce qui suffit. □

Corollaire 4.4.21 *Si $(x_j)_j$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite qui converge vers la limite supérieure cette suite.*

Preuve. Posons $x = \limsup_{j\to\infty} x_j$; par la proposition 4.4.19, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout indice j, il existe un indice $j_0 \geqslant j$ tel que $x_{j_0} \geqslant x - \varepsilon$. Ainsi, il existe un indice $k(1)$ tel que $x_{k(1)} \geqslant x - 1$ et si $k(1), \ldots, k(j-1)$ on été construits, il existe un indice $k(j) > k(j-1)$ tel que $x_{k(j)} > x - 1/j$. Puisque, quelque soit $\varepsilon > 0$, $x_j < x + \varepsilon$ pour j assez grand, on a $x_{k(j)} \to x$. □

Chapitre 5

L'espace euclidien $\mathbb{R}^d$

Nous allons nous intéresser ici aux propriétés plus spécifiques de l'espace métrique $\mathbb{R}^d$ équipé de la distance euclidienne.

5.1 Rappels

Dans cette section, les définitions et propriétés de base des espaces métriques sont appliquées à l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ muni de la distance euclidienne $d(x, y) = |x - y|$. Le lecteur familié avec cette théorie s'attardera essentiellement sur les exemples et exercices.

5.1.1 Ouverts et fermés

Rappel 5.1.1 Soient $c \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$; la *boule* ou *boule ouverte* de $\mathbb{R}^d$ de centre c et de rayon r est la partie de $\mathbb{R}^d$ $B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |c - y| < r\}$. La boule fermée de centre c et de rayon r est l'ensemble $\bar{B}(c, r) = B(c, \leqslant r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |c - y| < r\}$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on utilise parfois le mots disque en lieu et place de boule.

Rappel 5.1.2 Étant donné un point x de $\mathbb{R}^d$, un *voisinage* de x est une partie de $\mathbb{R}^d$ contenant une boule centrée en x.

Dans $\mathbb{R}$, une boule ouverte $B(x, r)$ est l'intervalle ouvert $]x - r, x + r[$ et inversement, l'intervalle ouvert $]a, b[$ est la boule ouverte $B(\frac{1}{2}(a + b), \frac{1}{2}(b - a))$. De la même manière, une boule fermée $B(x, \leqslant r)$ est l'intervalle fermé $[x - r, x + r]$ et un intervalle fermé $[a, b]$ est la boule fermée $B(\frac{1}{2}(a + b), \leqslant \frac{1}{2}(b - a))$.

Rappel 5.1.3 Une partie U de $\mathbb{R}^d$ est *ouverte* (on dit que U est un ouvert) si tout point de U est le centre d'une boule incluse dans U :

$$\forall x \in U : \exists r > 0 : B(x, r) \subset U,$$

ou encore

$$\forall x \in U : \exists \varepsilon > 0 : |x - y| < \varepsilon \Rightarrow y \in U.$$

Rappel 5.1.4 Une partie F de $\mathbb{R}^d$ est *fermée* (on dit que F est un fermé) si son complémentaire F^c est ouvert.

On vérifie directement que $\mathbb{R}^d$ et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés.

Exemple 5.1.5 On montre aisément qu'un intervalle du type $]-\infty, b[$ ou $]a, +\infty[$ $(a, b \in \mathbb{R})$ est ouvert ; il en résulte que les intervalles du type $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont fermés.

Rappelons la propriété fondamentale suivante.

Proposition 5.1.6 *Une partie de $\mathbb{R}^d$ est fermée si et seulement si elle contient la limite de ses suites convergentes*

Preuve. La condition est nécessaire. Soit $(x_j)_j$ une suite du fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ qui converge vers un point x. Si $x \in F^c$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - y| < \varepsilon$ implique $y \in F^c$, puisque F^c est ouvert. Or, il existe un indice J tel que $j \geqslant J$ implique $|x - x_j| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $j \geqslant J$, $x_j \in F \cap F^c$, ce qui est absurde.

La condition est suffisante. Supposons la partie F de $\mathbb{R}^d$ n'est pas fermée ; F^c n'est donc pas ouvert et il existe donc un point $x \in F^c$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point y de F pour lequel $|x - y| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un point $x_j \in F$ tel que $|x - x_j| < 1/j$. La suite $(x_j)_j$ de F ainsi construite converge donc vers x, ce qui implique $x \in F$. □

Théorème 5.1.7 *Toute union d'ouverts est ouverte, toute intersection de fermés est fermée.*

Preuve. Si x est un point d'une union d'ouverts, il appartient à l'un de ces ouverts, disons U. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $|x - y| < \varepsilon$ implique $y \in U$. Un tel point y appartient donc à l'union, ce qui prouve qu'une union d'ouverts est ouverte.

Montrons la seconde assertion. Soient J un ensemble quelconque et, pour tout $j \in J$, F_j un fermé de $\mathbb{R}^d$. On a $(\cap_{j \in J} F_j)^c = \cup_{j \in J} F_j^c$, ce qui suffit pour conclure, vu la première partie. □

Théorème 5.1.8 *Toute intersection finie d'ouverts est ouverte, toute union finie de fermés est fermée.*

Preuve. Soient $U_1, \ldots, U_J$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et x un point de l'intersection de ces ensembles. Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, il existe $\varepsilon_j > 0$ tel que $|x - y| < \varepsilon_j$ implique $y \in U_j$. En posant $\varepsilon = \min_{1 \leqslant j \leqslant J} \varepsilon_j$, on obtient $|x - y| < \varepsilon$ implique $y \in U_j$ quelque soit $j \in \{1, \ldots, J\}$. Un tel point y appartient donc à l'intersection des U_j, ce qui prouve qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte.

La seconde partie s'obtient par passage au complémentaire. □

Les résultats qui suivent peuvent se déduire des résultats généraux portant sur le produit fini d'espaces métriques.

Exercice 5.1.9 Montrer qu'un intervalle de $\mathbb{R}^d$ est ouvert si et seulement si chacun de ses intervalles constitutifs est ouvert dans $\mathbb{R}$.
Suggestion. Soit $I = \prod_{j=1}^d I_j$ un intervalle de $\mathbb{R}^d$ d'intervalles constitutifs $I_1, \ldots, I_d$. Montrons que la condition est nécessaire. Soit $j \in \{1, \ldots, d\}$; pour tout $s \in I_j$, il existe un point $x \in I$ tel que $[x]_j = s$. Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset I$, donc tel que $B(s, r) = \{[y]_j : |x - y| < r\} \subset I_j$.

La condition est suffisante. Soit x un point de I. Pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, il existe $r_j > 0$ tel que $B(x_j, r_j) \subset I_j$. On obtient de suite $B(x, \inf_{1 \leqslant j \leqslant d} r_j) \subset I$, ce qui suffit pour conclure.

Exercice 5.1.10 Montrer qu'un intervalle de $\mathbb{R}^d$ est fermé si et seulement si chacun de ses intervalles constitutifs est ouvert dans $\mathbb{R}$.
Suggestion. Un intervalle fermé de $\mathbb{R}^d$ s'écrit comme une intersection de d ensembles du type $E_j = \{x \in \mathbb{R}^d : a \leqslant [x]_j \leqslant b\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $j \in \{1, \ldots, d\}$, eux-mêmes intersection d'intervalles du type $A_j = \{x \in \mathbb{R}^d : a \leqslant [x]_j\}$ et $B_j = \{x \in \mathbb{R}^d : [x]_j \leqslant b\}$. Pour tout indice j, les complémentaires de A_j et B_j étant des ensembles ouverts, le complémentaire d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}^d$ s'écrit comme une union (finie) d'ensembles ouverts (qui sont en fait des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$), ce qui suffit.

Le corollaire 4.1.8 peut être directement obtenu.

Exercice 5.1.11 Montrer qu'une partie U de $\mathbb{R}^d$ est ouverte si et seulement si tout point de U est le centre d'un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^d$.
Suggestion. Soit $r > 0$; si $x \in \prod_{j=1}^d]-r, r[$, on a $|x| \leqslant \sum_{j=1}^d |x_j| < 2dr$ et donc $x \in B(0, 2r)$. Si $x \in B(0, r)$, alors, pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, $|x_j| \leqslant |x| < r$ et donc $x \in \prod_{j=1}^d]-r/2, r/2[$. On conclut directement puisque, si I est un intervalle de $\mathbb{R}^d$, pour tous $r, r' > 0$, on a $B(0, r) \subset I \subset B(0, r')$ si et seulement si $B(c, r) \subset c + I \subset B(c, r')$ pour tout $c \in \mathbb{R}^d$.

5.1.2 Intérieur, adhérence, frontière

Rappel 5.1.12 Un point x de $\mathbb{R}^d$ est un *point intérieur* d'une partie E de $\mathbb{R}^d$ s'il est le centre d'une boule incluse dans E :

$$\exists \varepsilon > 0 : |x - y| < \varepsilon \Rightarrow y \in E.$$

L'*intérieur* de E est l'ensemble des points intérieurs à E ; il est noté E°.

Rappel 5.1.13 Un point x des $\mathbb{R}^d$ est un *point adhérent* d'une partie E de $\mathbb{R}^d$ si toute boule de centre x est d'intersection non-vide avec E :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in E : |x - y| < \varepsilon.$$

L'*adhérence* d'une partie E de $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble des points adhérents à E ; il est noté $\bar{E}$.

Rappel 5.1.14 Un point x de $\mathbb{R}^d$ est un point *frontière* d'une partie E de $\mathbb{R}^d$ si toute boule de centre x est d'intersection non-vide avec E et E^c :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in E,\ z \in E^c : |x - y| < \varepsilon \text{ et } |x - z| < \varepsilon.$$

La *frontière* de E est l'ensemble des points frontières de E ; elle est notée $E^\bullet$ ou ∂E.

On a clairement $E^\bullet = \bar{E} \setminus E^\circ$.

Rappelons les résultats suivant, qui montrent notamment que E° est le plus grand ouvert inclus dans E et que $\bar{E}$ est le petit fermé contenant E.

Proposition 5.1.15 *L'intérieur de $E \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert inclus dans E contenant tout ouvert inclus dans E.*

Preuve. Bien sûr $x \in E^\circ$ implique $x \in E$ et si U est un ouvert inclus dans E, on a également $x \in U$ implique $x \in E$. ontrons que E° est ouvert. Si x est un point de E°, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - y| < \varepsilon$ implique $y \in E$. De là, si y' vérifie $|x - y'| < \varepsilon/2$, on a $|y' - z| < \varepsilon/2$ implique $|x - z| < |x - y'| + |y' - z| < \varepsilon$ et donc $z \in E$. Au total, $|x - y'| < \varepsilon/2$ implique $y' \in E^\circ$, ce qui montre que E° est ouvert. □

Proposition 5.1.16 *Un point appartient à l'adhérence d'une partie E de $\mathbb{R}^d$ si et seulement s'il existe une suite de E qui converge vers ce point.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si x est un point de $\bar{E}$, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un point x_j de E tel que $|x - x_j| < 1/j$. La suite $(x_j)_j$ de E ainsi construite converge vers x.

La condition est évidemment suffisante. □

Exercice 5.1.17 Montrer que l'on a $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$ et $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.
Suggestion. On a $x \notin \bar{E}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - y| < \varepsilon$ implique $y \in E^c$, c'est-à-dire si $x \in (E^c)^\circ$. L'autre égalité se démontre de même.

Proposition 5.1.18 *L'adhérence de E est un fermé contenant E et est inclus dans tout fermé contenant E. Bien sûr $\bar{E}$ est fermé, puisque $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ$.*

Preuve. On a bien sûr $E \subset \bar{E}$. Vu la proposition précédente, $\bar{E}$ est inclus dans tout fermé contenant E. □

Proposition 5.1.19 *Pour toute partie E de $\mathbb{R}^d$, on a $E^\bullet = \bar{E} \cap \overline{E^c}$.*

Preuve. On a $\bar{E} \cap \overline{E^c} = \bar{E} \cap (E^\circ)^c = E \setminus E^\circ$. □

Exemple 5.1.20 On vérifie directement que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b]^\circ =]a, b[$, $\overline{]a, b[} = [a, b]$ et $]a, b[^\bullet = [a, b]^\bullet = \{a, b\}$.

5.1.3 Bornés

Rappel 5.1.21 Une partie E de $\mathbb{R}^d$ est *bornée* s'il existe $r > 0$ tel que $E \subset B(0, r)$; autrement dit tel que $|x| < r$ quelque soit $x \in E$.

Rappel 5.1.22 Un voisinage de l'infini est une partie non-bornée de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 5.1.23 Une partie E de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.
Suggestion. La condition est nécessaire. De fait, s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $|x| \leqslant C$, on a $-C \leqslant x \leqslant C$ pour tout $x \in E$. Dès lors, C est un majorant et $-C$ un minorant de E.

La condition est suffisante. De fait, si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de E, on vérifie de suite que la majoration $|x| \leqslant C$ a lieu pour tout $x \in E$, avec $C = \sup\{|m|, |M|\}$.

Bien sûr dans $\mathbb{R}$, les seuls intervalles bornés sont ceux du type $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Dans $\mathbb{R}^d$, nous avons déjà obtenu un critère, qui peut être ré-obtenu en utilisant spécifiquement la distance eulidienne.

Exercice 5.1.24 Une partie E de $\mathbb{R}^d$ est bornée si et seulement si, pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, l'ensemble $\{x_j : x \in E\}$ est borné.
Suggestion. La condition est nécessaire. De fait, si, pour tout $x \in E$, $|x| \leqslant C$, on a également $|x_j| \leqslant |x| \leqslant C$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$.

La condition est suffisante. Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, soient $E_j = \{x_j : x \in E\}$ et $C_j > 0$ tels que, pour tout $r \in E_j$, $|r| \leqslant C_j$. On a, pour tout $x \in E$, $|x| \leqslant \sum_{j=1}^d |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^d C_j$.

Le cas des intervalles de $\mathbb{R}^d$ est réglé par le critère suivant.

Corollaire 5.1.25 *Un intervalle de $\mathbb{R}^d$ est borné si et seulement si chacun de ses intervalles constitutifs est borné dans $\mathbb{R}$.*

5.1.4 Diamètre d'une partie

Rappel 5.1.26 Soit E une partie non-vide de $\mathbb{R}^d$; si $\{|x - y| : x, y \in E\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, on appelle *diamètre* de E le nombre

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}.$$

Exemple 5.1.27 Toute boule de $\mathbb{R}^d$ admet un diamètre ; plus précisément,

$$\operatorname{diam}(B(c, r)) = \operatorname{diam}(B(c, \leqslant r)) = 2r.$$

En effet, soit $B = B(c, r)$ ou $B = B(c, \leqslant r)$. Nous savons déjà que toute boule de $\mathbb{R}^d$ est non vide et bornée ; elle admet donc un diamètre. D'une part, $2r$ est un majorant de $\{|x - y| : x, y \in B\}$. De fait, pour tous x, y appartenant à cette boule, $|x - y| \leqslant |x - c| + |c - y| \leqslant 2r$. Soient maintenant $x = c - (r - \delta/2)e_1$ et $y = c + (r - \delta/2)e_1$, avec $0 < \delta \leqslant 2r$. On a $x, y \in B$. Qui plus est, $|x - y| = 2r - \delta$. La proposition 2.2.14 permet de conclure.

Exemple 5.1.28 Tout intervalle borné admet un diamètre. Plus précisément, si, pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, I_j est un intervalle d'origine a_j et d'extrémité b_j,

$$\operatorname{diam}(\prod_{j=1}^d I_j) = |b - a|.$$

En effet, soit $I = \prod_{j=1}^d I_j$. Tout intervalle est non vide et donc tout intervalle borné admet un diamètre. Le nombre $|b - a|$ est un majorant de $\{|x - y| : x, y \in I\}$. De fait, si $x, y \in I$, $|x - y|^2 = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j| \leqslant \sum_{j=1}^d |b_j - a_j| = |b - a|^2$. D'autre part, si $x = a + (\delta/2)(b - a)$ et $y = a + (1 - \delta/2)(b - a)$, avec $0 < \delta < 1$, on a $x, y \in I$. Qui plus est, $|x - y| = (1 - \delta)|b - a|$. La proposition 2.2.14 permet de conclure.

Même s'il existe, le diamètre d'une partie non-vide E n'est pas nécessairement réalisé.

Remarque 5.1.29 Pour $E \subset \mathbb{R}^d$, il n'existe pas nécessairement deux points x, y tels que $\operatorname{diam}(E) = d(x, y)$. Pour le voir, il suffit de considérer un intervalle du type $]a, b[$. Nous savons cependant que le diamètre d'un compact non-vide est toujours réalisé.

Remarque 5.1.30 Le diamètre d'une partie non-vide de $\mathbb{R}^d$ vaut zéro si et seulement si cette partie est un singleton.

5.2 Propriétés de l'espace euclidien

5.2.1 Complétude

Théorème 5.2.1 (Cauchy) *L'espace $\mathbb{R}^d$ (muni de la distance euclidienne) est complet, i.e. toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}^d$ converge.*

Preuve. Nous avons déjè vu que la condition est nécessaire : si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ converge vers x, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j - x| < \varepsilon/2$. Ainsi, $|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon$ pour tous $p, q \geqslant J$.

La condition est suffisante. Il suffit, étant donné une suite $(x_j)_j$ de Cauchy de $\mathbb{R}^d$, d'en extraire une sous-suite convergente. Soit $k(1) \in \mathbb{N}_0$ le premier indice tel que $|x_p - x_q| \leqslant 10^{-1}$ pour tous $p, q \geqslant k(1)$. L'indice $k(j) \in \mathbb{N}_0$, avec $j > 1$ est construit par récurrence. Si les indices $k(1), \ldots, k(j-1)$ ont été déterminés, $k(j)$ est le premier indice strictement supérieur à $k(j-1)$ tel que $|x_p - x_q| \leqslant 10^{-j}$ pour tous $p, q \geqslant k(j)$.

Montrons que la sous-suite $(x_{k(j)})_j$ ainsi construite de $(x_j)_j$ converge. Il suffit pour cela d'établir que la suite $([x_{k(j)}]_l)_j$ des l-ièmes composantes converge pour tout $l \in \{1, \ldots, d\}$. Soit $(s_j^{(l)})_j$ la suite définie par

$$s_j^{(l)} = [x_{k(j)} - x_{k(j-1)}]_l^+ + \cdots + [x_{k(2)} - x_{k(1)}]_l^+ + [x_{k(1)}]_l^+.$$

Il s'agit d'une suite numérique réelle croissante. Puisque $|s_j^{(l)}| \leqslant |x_{k(1)}| + 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, elle est convergente. De même, on montre que la suite $(n_j^{(l)})_j$ définie par

$$n_j^{(l)} = [x_{k(j)} - x_{k(j-1)}]_l^- + \cdots + [x_{k(2)} - x_{k(1)}]_l^- + [x_{k(1)}]_l^-$$

est croissante et majorée. Au total, la suite $(s_j^{(l)} - n_j^{(l)})_j = ([x_{k(j)}]_l)_j$ converge, ce qui suffit pour conclure. □

Remarque 5.2.2 Remarquons que, dans la démonstration précédente, $s_j^{(l)}$ n'est pas la partie positive de $[x_{k(j)}]_l$.

Voici une preuve, reposant sur la notion de limite supérieure.

Preuve. Pour montrer qu'une suite de $\mathbb{R}^d$ converge, il suffit de montrer que chacune de ses composantes converge. Il suffit donc de montrer que si $(x_j)_j$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, elle converge. Soient x la limite supérieure de cette suite et $\varepsilon > 0$. La suite étant de Cauchy, il existe J_1 tel que $|x_j - x_J| < \varepsilon/3$ pour tout $j \geqslant J_1$. Qui plus est, la proposition 4.4.21 implique l'existence d'un indice J_2 tel que $j \geqslant J_2$ implique $x_j < x + \varepsilon$. La même proposition implique l'existence d'un indice $j_0 \geqslant J_1$ tel que $x_{j_0} > x - \varepsilon/3$. Pour tout $j \geqslant \max\{J_1, J_2\}$, on a

$$-\varepsilon < x - x_j = x - x_{j_0} + x_{j_0} - x_{J_1} + x_{J_1} - x_j < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ce qui prouve que l'on a $x_j \to x$. □

Une troisième manière de procéder repose sur le résultat suivant.

Proposition 5.2.3 *[principe du choix de Bolzano-Weierstraß] Toute suite de $\mathbb{R}$ contient une sous-suite monotone. En particulier, de toute suite bornée de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Preuve. Soit $(x_j)_j$ une suite de $\mathbb{R}$ et appelons pivot de cette suite tout entier $j \in \mathbb{N}_0$ tel que $x_l < x_j$ pour tout $l > j$. S'il existe une infinité de pivots, désignons les successivement par $k(1), \ldots, k(j), \ldots$; la suite $(x_{k(j)})_j$ ainsi obtenue est strictement monotone.

S'il n'y a qu'un nombre fini de pivots, soit $k(1) \in \mathbb{N}_0$ le premier indice strictement plus grand que tous les pivots. Comme $k(1)$ n'est pas un pivot, il existe $k(2) > k(1)$ tel que $x_{k(2)} \geqslant x_{k(1)}$. L'indice $k(2)$ n'est pas non plus un pivot. En procédant de la sorte, on construit une suite strictement monotone $(k(j))_j$ telle que $x_{k(j+1)} \geqslant x_{k(j)}$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. La cas particulier résulte du théorème 4.4.1. □

On en déduit aussitôt le critère de Cauchy (dans $\mathbb{R}$).

5.2.2 Théorème de Borel-Lebesgue

La caractérisation qui suit permet d'assimiler les compacts de $\mathbb{R}^d$ aux parties fermées et bornées.

Lemme 5.2.4 *Dans $\mathbb{R}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'ensemble $[a, b]$ est compact.*

Preuve. Soit U_j avec $j \in J$ des parties ouvertes de $\mathbb{R}$ telles que $[a, b] \subset \cup_{j \in J} U_j$. Posons $I = \{x \in \mathbb{R} : [a, x]$ admet un recouvrement fini$\}$. On a $a \in I$, puisque $\{a\} = [a, a]$ est recouvert par un ensemble U_j pour un indice $j \in J$ en tant qu'élément de $[a, b]$. De plus, I est un intervalle ; si $x \in I$ et x' vérifie $a < x' < x$, tout recouvrement fini du segment $[a, x]$ est un recouvrement fini du segment $[a, x']$, ce qui implique $x' \in I$.

Montrons que I n'est pas de la forme $[a, c[$ pour un $c \in]a, b]$. Sinon, soit U_{j_0} un ouvert contenant c ; puisque U_{j_0} est ouvert, il contient un intervalle du type $[x, c]$ pour un $x \in [a, c[$. On a alors $x \in [a, c[= I$ et il existe un recouvrement fini de $[a, x]$. Le recouvrement fini constitué du recouvrement fini de $[a, x]$ avec U_{j_0} recouvre $[a, c]$, ce qui implique $c \in I$ et contredit l'hypothèse $I = [a, c[$.

L'intervalle I n'est pas non plus de la forme $[a, c]$ avec $c < b$. Sinon, soit une partie finie J' de J telle que $[a, c] \subset \cup_{j \in J'} U_j$. Si $j_0 \in J'$ est un indice tel que $c \in U_{j_0}$, il existe $x \in]c, b[$ tel que $[c, x] \subset U_{j_0}$. On a donc $[a, x] \subset \cup_{j \in J'} U_j$, ce qui implique $x \in I$ et contredit l'hypothèse $I = [a, c]$.

On a donc nécessairement $I = [a, b]$, ce qui permet de conclure. □

Une seconde preuve utilise la notion de limite supérieure pour montrer que $[a, b]$ est extractable.

Preuve. Soit $(x_j)_j$ une suite de $[a, b]$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, posons $y_j = \sup\{x_k : k \geqslant j\}$. On a $y_j \in [a, b]$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et donc

$$x = \limsup_{j \to \infty} x_j = \lim_{j \to \infty} y_j \in [a, b].$$

Par la proposition 4.4.21, il existe une sous-suite de la suite $(x_j)_j$ qui converge vers x, ce qui suffit. □

Enfin, remarquons que ce résultat découle également directement de la proposition 5.2.3.

Le théorème fondamental suivant est parfois appelé théorème de Heine-Borel.

Théorème 5.2.5 (Borel-Lebesgue) *Dans $\mathbb{R}^d$, les ensembles compacts sont les ensembles bornés et fermés.*

Preuve. Nous savons déjà qu'un ensemble compact est nécessairement borné et fermé.

Si K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$, il existe $C > 0$ tel que $K \subset B(0, C) \subset [-C, C]$. L'ensemble K est donc un fermé inclus dans un compact, ce qui prouve que K est compact.

Si K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$ ($d > 1$), il existe $C > 0$ tel que $K \subset B(0, C) \subset [-C, C]^d$. Or, $[-C, C]^d$ est un compact, comme produit de compacts. On conclut comme précédemment. □

Une seconde preuve montre qu'une partie est extractable dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si elle est bornée et fermée.

Preuve. Il suffit de montrer que tout ensemble compact est borné et fermé. Il existe une constante $C > 0$ telle que $K \subset B(0, C) \subset [-C, C]^d$. Il suffit donc de montrer que ce dernier ensemble est compact ; on pourra en effet conclure, puisque cela implique que K est un fermé inclus dans un compact.

Soit donc $(x_j)_j$ une suite de $[-C, C]^d$. Puisque $[-C, C]$ est compact, il existe un point $x^{(1)}$ de $[-C, C]$ et une sous-suite $([x_{k_1(j)}]_1)_j$ de $([x_j]_1)_j$ qui converge vers $x^{(1)}$. Maintenant, $([x_{k_1(j)}]_2)_j$ est une suite de $[-C, C]$ et il existe une sous-suite $([x_{k_2(k_1(j))}]_2)_j$ qui converge vers un point $x^{(2)}$ de $[-C, C]$. Pour tout $l \in \{1, \dots, d\}$, on peut construire une sous-suite $([x_{k_l(\cdots k_1(j)\cdots)}]_l)_j$ qui converge vers un point $x^{(l)}$ de $[-C, C]$. En posant, $k = k_d \circ \cdots \circ k_1$, on obtient, que pour tout $l \in \{1, \dots, d\}$, la sous-suite $([x_{k(j)}]_l)_j$ converge vers $x^{(l)} \in [-C, C]$. Au total, la suite $(x_{k(j)})_j$ converge vers le point x_0 tel que $[x_0]_l = x^{(l)}$ pour tout $l \in \{1, \dots, d\}$. Le point x_0 appartient donc à $[-C, C]^d$, ce qui suffit. □

Une autre manière de procéder, ne nécessitant pas le lemme 5.2.4, consiste à démontrer le résultat suivant.

Lemme 5.2.6 *De toute suite bornée de $\mathbb{R}^d$, on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Preuve. Soit $(x_j)_j$ une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Procédons par récurrence et considérons le quadrillage décimal d'équidistance 10^{-1}. Puisque la suite est bornée, le nombre de mailles de ce réseau qui contiennent au moins un élément de la suite est fini. Il existe donc au moins une maille I_1 de ce quadrillage qui contient un nombre infini d'éléments. Soit $k(1) \in \mathbb{N}_0$ un indice tel que $x_{k(1)} \in I_1$.

Si les mailles $I_1, \dots, I_{l-1}$ et les points $x_{k(1)}, \dots, x_{k(l-1)}$ ont été déterminés, on définit I_l et $x_{k(l)}$ comme suit. Le nombre de mailles du quadrillage décimal d'équidistance 10^{-l} incluses dans I_{l-1} est fini. Il existe donc au moins une maille I_l de ce quadrillage qui contient un nombre infini d'éléments de la suite. Soit $k(l) \in \mathbb{N}_0$ un indice strictement supérieur à $k(l-1)$ tel que $x_{k(l)}$ est un élément de I_l. La suite $(x_{k(j)})_j$ ainsi construite est bien sûr une sous-suite de la suite $(x_j)_j$. Qui plus est, pour tous indices $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \leqslant q$, on a $x_{k(p)}, x_{k(q)} \in I_p$ et

$$|x_{k(p)} - x_{k(q)}| \leqslant \mathrm{diam}(I_p) = \sqrt{d}10^{-p},$$

ce qui permet de conclure. □

Voici quelques applications topologiques.

Proposition 5.2.7 *Dans $\mathbb{R}^d$, la distance d'un compact non-vide à un fermé non-vide est réalisée, i.e. pour tout compact non-vide K et tout fermé non-vide F de $\mathbb{R}^d$, il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(K, F) = |x - y|$.*

Preuve. On a $d(K, F) = \inf\{|x - y| : x \in K,\, y \in F\}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_j \in K$ et $y_j \in F$ tels que

$$d(K, F) \leqslant |x_j - y_j| < d(K, F) + 1/j.$$

Ainsi, la suite $(|x_y - y_j|)_j$ converge vers $d(K, F)$. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ de $(x_j)_j$ qui converge vers un point x de K. Maintenant, la suite $(y_j)_j$ est bornée puisque, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $|y_j| \leqslant |y_j - x_j| + |x_j|$. La suite $(y_{k(j)})_j$ étant bornée, il existe une sous-suite $(y_{l(k(j))})_j$ qui converge vers un point $y \in \overline{\{y_{k(j)} : j \in \mathbb{N}_0\}}$; puisque F est fermé, on a $y \in F$. Cela étant, la suite $(|x_{l(k(j))} - y_{l(k(j))}|)_j$ converge vers $d(K, F)$ mais aussi vers $|x - y|$, avec $x \in K$ et $y \in F$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 5.2.8 *Si la distance entre le compact non-vide K et le fermé non-vide F de $\mathbb{R}^d$ est nulle, alors $K \cap F \neq \varnothing$.*

Corollaire 5.2.9 *Si le compact non-vide K et l'ouvert non-vide U de $\mathbb{R}^d$ sont tels que $U \neq \mathbb{R}^d$ et $K \subset U$, alors $d(K, U^c) > 0$.*

Preuve. Sinon, il existerait un point appartenant à K et à U^c. Or, tout point de K est le centre d'une boule incluse dans U. □

5.2.3 Connexes de $\mathbb{R}$

On peut caractériser les parties connexes de $\mathbb{R}$.

Théorème 5.2.10 *Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement s'il s'agit de l'ensemble vide ou d'un intervalle.*

Preuve. La condition est nécessaire. Montrons que si C est une partie connexe de $\mathbb{R}$ contenant deux points distincts, alors C est un intervalle. Soit α la borne inférieure de C si cet ensemble est minoré ou le symbole $-\infty$ sinon. De même, soit β la borne supérieure de C si cet ensemble est majoré ou le symbole $+\infty$ sinon. Montrons que C contient $]\alpha, \beta[$. Si ce n'est pas le cas, soit x_0 un point de $]\alpha, \beta[\setminus C$. On conclut en remarquant que $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$ forment une disconnexion de C.

La condition est suffisante. Il suffit de prouver que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. Si ce n'est pas le cas, il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui admet une disconnexion, formée par les ensembles U_1 et U_2. Soient x_1 et x_2 des points de U_1 et U_2 respectivement. Quitte à permuter les rôles de ces deux ouverts, on peut supposer avoir $x_1 < x_2$. Soit alors $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : [x_1, x[\subset U_1\}$; on a $x_1 < x_0 < x_2$, $x_0 \notin U_1$ et $x_0 \notin U_2$. Le point x_0 est donc un point de I qui n'appartient ni à U_1, ni à U_2, ce qui est contradictoire. □

Chapitre 6

Séries de l'espace euclidien

Les séries sont des suites particulières. Leur importance est telle que allons ici nous pencher sur leurs propriétés spécifiques.

6.1 Définition et premières propriétés

6.1.1 Définition

Définition 6.1.1 On appelle *série* associée à la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ la suite $(y_k)_k$ dont le k-ième élément est $y_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$. Elle est notée $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ ou simplement $\sum_j x_j$. L'élément x_j est appelé le j-ième *terme* de la série $\sum_j x_j$. On parle de la série de terme général x_j. Enfin, $\sum_{j=1}^{k} x_j$ est appelé la k-ième *somme partielle* de la série $\sum_j x_j$.

La série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ associée à la suite $(x_j)_j$ apparaît comme la suite des sommes partielles successives de la série. L'étude d'une série peut donc se ramener à l'étude d'une suite. L'inverse est également vrai. Si $(x_j)_j$ est une suite de $\mathbb{R}^d$, posons $y_1 = x_1$ et $y_{j+1} = x_{j+1} - x_j$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. On a bien sûr $x_j = \sum_{k=1}^{j} y_k$.

Les définitions qui suivent nous permettront de considérer les suites de manière autonome.

Définition 6.1.2 La série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ est convergente si la suite $(y_j = \sum_{k=1}^{j} x_k)_j$ de ses sommes partielles converge. Dans ce cas, la limite de la suite y_j est appelée *somme de la série* et est notée $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$. La série est divergente si elle ne converge pas.

Remarque 6.1.3 Si la série associée à la suite $(x_j)_j$ converge, la notation $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ peut aussi bien désigner la série que sa limite. Il s'agit là d'un abus d'écriture consacré par l'usage. Qui plus est, si la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ ne converge pas, cette expression n'est pas véritablement définie.

6.1.2 Critère de Cauchy

Voici la traduction du critère de Cauchy dans le « langage des séries ».

Théorème 6.1.4 (Critère de Cauchy) *La série $\sum_j x_j$ converge si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que $J \leqslant p \leqslant q$ implique $|\sum_{j=p}^{q} x_j| < \varepsilon$.*

Preuve. De fait, une telle série converge si la suite des sommes partielles converge, c'est-à-dire si et seulement si la suite $(\sum_{j=1}^{k} x_j)_k$ est de Cauchy. C'est le cas si et seulement si, pout tout $\varepsilon > 0$, il existe J tel que $p, q \geqslant J$ implique $|\sum_{j=1}^{p} x_j - \sum_{j=1}^{q} x_j| < \varepsilon$. Ainsi, en posant $J' = J + 1$, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $J' \leqslant p \leqslant q$, on a $p - 1, q \geqslant J$ et $|\sum_{j=p}^{q} x_j| < \varepsilon$. □

Exercice 6.1.5 Montrer que la série $\sum_j (-1)^j / j^2$ converge.
Suggestion. Posons $x_j = \sum_{k=1}^{j} (-1)^k / k^2$. La suite $(y_j = \sum_{k=1}^{j} 1/k^2)_j$ converge donc est de Cauchy. Si p et q sont deux nombres entiers positifs tels que $p < q$, on a

$$|x_p - x_q| = |\sum_{k=p+1}^{q} \frac{(-1)^k}{k^2}| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |\frac{(-1)^k}{k^2}| = |y_p - y_q|,$$

ce qui prouve que $(x_j)_j$ est une suite de Cauchy.

Corollaire 6.1.6 *Si la série $\sum_j x_j$ converge, la suite $(x_j)_j$ converge vers zéro.*

Preuve. Si la série converge, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J tel que $J \leqslant p \leqslant q$ implique $|\sum_{j=p}^{q} x_j| < \varepsilon$. En particulier, en prenant $p = q$, on a $|x_j| < \varepsilon$ pour tout $j \geqslant J$. □

Il n'existe pas de résultat réciproque, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6.1.7 La *série harmonique* $\sum_j 1/j$ ne converge pas. En effet, posons $x_j = \sum_{k=1}^{j} 1/k$; on a

$$x_{2j} - x_j = \sum_{k=j+1}^{2j} 1/k \geqslant j \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}.$$

Puisqu'il n'existe pas de nombre réel J tel que $|x_p - x_q| < 1/3$ pour tous $p, q \geqslant J$, cette suite n'est pas de Cauchy et ne converge donc pas.

6.1.3 Propriétés des séries convergentes

Proposition 6.1.8 *Soit $(x_j)_j$ une suite numérique ; cette suite converge si et seulement si la série $\sum_j (x_{j+1} - x_j)$ converge. Dans ce cas, on a*

$$\lim_{j \to \infty} x_j = x_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_{j+1} - x_j).$$

Preuve. C'est trivial si l'on considère l'égalité $\sum_{j=1}^{n} (x_{j+1} - x_j) = x_{n+1} - x_1$. □

Notation 6.1.9 Soient $(x_j)_j$ une suite de $\mathbb{R}^d$ et J un entier strictement positif. On peut alors introduire la suite $(y_j^{(J)})_j$ telle que $y_j^{(J)} = x_{j+J-1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et considérer la série $\sum_{j=1}^{\infty} y_j^{(J)}$. Cette dernière série sera plutôt notée $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$ ou $\sum_j x_{j+J-1}$, sa signification étant claire et cette notation ne faisant pas appel aux $y_j^{(J)}$. La limite de cette suite, si elle existe, sera quant à elle notée $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$.

Théorème 6.1.10 *Si la série $\sum_j x_j$ converge, alors, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, la série $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$ converge et*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \sum_{j=1}^{J-1} x_j + \sum_{j=J}^{\infty} x_j.$$

Inversement, s'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que la série $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$ converge, alors la série $\sum_j x_j$ converge.

Preuve. Cette une conséquence immédiate de la propriété relative aux combinaisons linéaires de suites convergentes. Pour tout $J \in \mathbb{N}$, la suite $(y_k)_{k>J}$ définie par $y_k = \sum_{j=1}^{J} x_j + \sum_{j=J+1}^{k} x_j$ pour tout $k > J$ converge si et seulement si la suite $(z_k)_{k>J}$ définie par $z_k = \sum_{j=J+1}^{k} x_j$ pour tout $k > J$ converge. Cette même propriété donne aussi l'égalité concernant les limites. □

Définition 6.1.11 Si la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge, alors, pour tout $J \in N_0$, $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$ est appelé le *J-ième reste* de la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$.

6.1.4 Séries numériques

Définition 6.1.12 Une série est *numérique* si tous ses termes sont des nombres complexes. Elle est *numérique réelle* ou *réelle* si tous ses termes sont des nombres réels.

Proposition 6.1.13 *Une série numérique réelle à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

Preuve. De fait, la suite des sommes partielles est alors une suite numérique réelle croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée. □

Exemple 6.1.14 La *série harmonique* est la série $\sum_j 1/j$. Cette série ne converge pas. En effet, posons $x_j = \sum_{k=1}^{j} 1/k$; on a

$$x_{2^j} = \sum_{k=1}^{j}(x_{2^k} - x_{2^{k-1}}) + x_1 = \sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{(2^{k-1}+l)} + x_1 \geqslant \frac{j}{2} + x_1,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

6.2 Séries fondamentales

6.2.1 Séries géométriques dans $\mathbb{C}$

Définition 6.2.1 Soit z un nombre complexe non-nul. La *série géométrique* de raison z est la série $\sum_{j=0}^{\infty} z^j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} z^j$.

Lemme 6.2.2 *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, alors $\sum_{j=0}^{k} z^j = (1 - z^{k+1})/(1 - z)$.*

Preuve. De fait, en posant $S_k = \sum_{j=0}^{k} z^j$, on obtient $S_k - zS_k = 1 - z^{k+1}$. □

Théorème 6.2.3 *La série géométrique de raison $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Auquel cas, la somme vaut $1/(1 - z)$.*

Preuve. Bien sûr, si $0 < |z| < 1$,

$$|\frac{z^{k+1}}{1-z}| = \frac{|z|^{k+1}}{|1-z|} \to 0.$$

Pour un tel z, le lemme précédent implique

$$\sum_{j=0}^{k} z^j = (\frac{1}{1-z} - \frac{z^{k+1}}{1-z}) \to \frac{1}{1-z}.$$

Si $|z| \geqslant 1$, la suite $(z^j)_j$ ne tend pas vers zéro et la série gémétrique de raison z ne peut converger. □

6.2.2 Séries de Riemann

Définition 6.2.4 La *série de Riemann* d'ordre $\alpha \geqslant 0$ est la série $\sum_j j^{-\alpha}$.

Le résultat suivant, aussi connu sous le nom de principe de la loupe ou de condensation, va nous permettre l'étude de la convergence de la série de Riemann.

Lemme 6.2.5 (Cauchy) *Si la suite numérique réelle et positive $(x_j)_j$ est décroissante, la série $\sum_j x_j$ converge si et seulement si la série $\sum_j 2^j x_{2^j}$ converge.*

Preuve. La condition est nécessaire. La suite $(\sum_{j=1}^k 2^j x_{2^j})_k$ est croissante et majorée car, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sum_{j=1}^{J} 2^j x_{2^j} = 2\sum_{j=1}^{J} 2^{j-1} x_{2^j} \leqslant 2(x_2 + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2^{J-1}+1} + \cdots + x_{2^J})) \leqslant 2\sum_{j=1}^{2^J} x_j.$$

La condition est suffisante. La suite des sommes partielles $(\sum_{j=1}^k x_j)_k$ est croissante et majorée car, pout tout $J \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} x_j &\leqslant x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2^{J-1}+1} + \cdots + x_{2^J}) \\ &\leqslant x_1 + x_2 + 2^1 x_{2^1} + \cdots + 2^{J-1} x_{2^{J-1}} \leqslant x_1 + x_2 + \sum_{j=1}^{J} 2^j x_{2^j}.\end{aligned}$$

La preuve est donc complète. □

Théorème 6.2.6 *La série de Riemann d'ordre $\alpha \geqslant 0$ converge pour $\alpha \in]1, +\infty[$ et diverge pour $\alpha \in [0, 1]$.*

Preuve. Si α est positif ou nul, la suite $(j^{-\alpha})_j$ est décroissante. Par le principe de condensation de Cauchy, la série $\sum_j j^{-\alpha}$ converge si et seulement si la série $\sum_j 2^j (2^j)^{-\alpha} = \sum_j (2^{1-\alpha})^j$ converge. Or, cette dernière est une série géométrique, qui converge si et seulement si on a $2^{1-\alpha} < 1$. □

6.3 Étude de la convergence de séries

6.3.1 Critères d'Abel

Les critères d'Abel, relatifs à la convergence des séries, sont basés sur l'inégalité suivante.

Lemme 6.3.1 (inégalité d'Abel) *Étant donné $J \in \mathbb{N}_0$, J points $x_1, \ldots, x_J$ de $\mathbb{R}^d$ et J nombres réels $r_1, \ldots, r_J$, on a*

$$|\sum_{j=1}^{J} r_j x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{J-1} |r_j - r_{j+1}| \sup_{1 \leqslant k \leqslant J-1} |\sum_{j=1}^{k} x_j| + |r_J| |\sum_{j=1}^{J} x_j|.$$

Preuve. L'identité

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} r_j x_j &= (r_1 - r_2)x_1 + (r_2 - r_3)(x_1 + x_2) + \cdots \\ &\quad + (r_{J-1} - r_J)(x_1 + \cdots + x_{J-1}) + r_J(x_1 + \cdots + x_J)\end{aligned}$$

permet directement de conclure. □

Théorème 6.3.2 (Abel) *Si la suite $(r_j)_j$ de $\mathbb{R}$ converge vers zéro et est telle que la série $\sum_{j=1}^{\infty} |r_j - r_{j+1}|$ converge (c'est le cas de toute suite numérique positive décroissant vers zéro) et s'il existe $C > 0$ tel que la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^d$ vérifie $|\sum_{j=p}^{q} x_j| \leqslant C$ quels que soient p, q tels que $p \leqslant q$, alors la série $\sum_{j=1}^{\infty} r_j x_j$ converge et, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a la majoration suivante du reste :*

$$|\sum_{j=J}^{\infty} r_j x_j| \leqslant C \sum_{j=J}^{\infty} |r_j - r_{j+1}|.$$

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J tel que $|r_p| < \varepsilon/(2C)$ et $\sum_{j=p}^{q} |r_j - r_{j+1}| < \varepsilon/(2C)$, pour tous $p, q \geqslant J$ tels que $p \leqslant q$. Dès lors, si $J \leqslant p \leqslant q$,

$$\begin{aligned}|\sum_{j=p}^{q} r_j x_j| &\leqslant \sum_{j=p}^{q-1} |r_j - r_{j+1}| \sup_{p \leqslant k \leqslant q-1} |\sum_{j=p}^{k} x_j| + |r_q| |\sum_{j=p}^{q} x_j| \\ &\leqslant C \sum_{j=p}^{q-1} |r_j - r_{j+1}| + C|r_q| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, la série converge puisqu'elle est de Cauchy. La majoration du reste s'obtient directement en passant à la limite (sur q) dans la majoration que nous venons d'obtenir. La démonstration est donc complète. □

Théorème 6.3.3 (Abel) *Si la suite de nombres réels $(r_j)_j$ est telle que la série $\sum_{j=1}^{\infty} |r_j - r_{j+1}|$ converge (c'est le cas de toute suite numérique positive et décroissante) et si la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge dans $\mathbb{R}^d$, alors la série $\sum_{j=1}^{\infty} r_j x_j$ converge et, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a la majoration du reste*

$$|\sum_{j=J}^{\infty} r_j x_j| \leqslant (|r_J| + 2 \sum_{j=J}^{\infty} |r_j - r_{j+1}|) \sup_{k \geqslant J} |\sum_{j=J}^{k} x_j|.$$

Preuve. Soit $C = 1 + |r_1| + \sum_{j=1}^{\infty} |r_j - r_{j+1}|$ et remarquons que, vu l'égalité $r_k = r_1 + \sum_{j=1}^{k-1}(r_{j+1} - r_j)$ valable pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a bien sûr $|r_k| \leqslant C$. Montrons que la série $\sum_j r_j x_j$ est de Cauchy. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J tel que $J \leqslant p \leqslant q$ implique $|\sum_{j=p}^{q} x_j| < \varepsilon/(2C)$. Ainsi, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $J \leqslant p \leqslant q$, on a

$$|\sum_{j=p}^{q} r_j x_j| \leqslant \sum_{j=p}^{q-1} |r_j - r_{j+1}| \sup_{p \leqslant k \leqslant q-1} |\sum_{j=p}^{k} x_j| + |r_q| |\sum_{j=p}^{q} x_j| < \varepsilon.$$

L'inégalité portant sur le reste de la série s'obtient en passant à la limite (sur q) dans cette dernière inégalité. □

Le cas de $\mathbb{C}$ se traîte de manière analogue et procure les résultats suivants.

Lemme 6.3.4 (inégalité d'Abel) *Étant donné $J \in \mathbb{N}_0$ et $2J$ nombres complexes $c_1, \ldots, c_J, z_1, \ldots, z_J$, on a*

$$|\sum_{j=1}^{J} c_j z_j| \leqslant \sum_{j=1}^{J-1} |c_j - c_{j+1}| \sup_{1 \leqslant k \leqslant J-1} |\sum_{j=1}^{k} z_j| + |c_J| |\sum_{j=1}^{J} z_j|.$$

Théorème 6.3.5 (Abel) *Si la suite $(c_j)_j$ de $\mathbb{C}$ converge vers zéro et est telle que la série $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j - c_{j+1}|$ converge et s'il existe $C > 0$ tel que la suite z_j de $\mathbb{C}$ vérifie $|\sum_{j=p}^{q} z_j| \leqslant C$ quels que soient p, q tels que $p \leqslant q$, alors la série $\sum_{j=1}^{\infty} c_j z_j$ converge et, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a la majoration suivante du reste :*

$$|\sum_{j=J}^{\infty} c_j z_j| \leqslant C \sum_{j=J}^{\infty} |c_j - c_{j+1}|.$$

Théorème 6.3.6 (Abel) *Si la suite de nombres complexes $(c_j)_j$ est telle que la série $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j - c_{j+1}|$ converge et si la série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge dans $\mathbb{C}$, alors la série $\sum_{j=1}^{\infty} c_j z_j$ converge et, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a la majoration du reste*

$$|\sum_{j=J}^{\infty} c_j z_j| \leqslant (|c_J| + 2 \sum_{j=J}^{\infty} |c_j - c_{j+1}|) \sup_{k \geqslant J} |\sum_{j=J}^{k} z_j|.$$

6.3.2 Séries alternées

Définition 6.3.7 Une *série alternée* est une série numérique réelle qui peut se mettre sous la forme $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j r_j$, avec $r_j \geqslant 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

Le résultat suivant porte aussi le nom de critère de Leibniz.

Corollaire 6.3.8 (Critère des séries alternées) *Si $(r_j)_j$ est une suite numérique réelle décroissante vers zéro, la série alternée $\sum_j (-1)^j r_j$ converge et, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a la majoration du reste*

$$|\sum_{j=J}^{\infty} (-1)^j r_j| \leqslant r_J.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate du premier critère d'Abel car, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \leqslant q$, on a évidemment $|\sum_{j=p}^{q}(-1)^j| \leqslant 1$. □

Voici une preuve ne faisant pas intervenir le critère d'Abel, mais la notion de suites adjacentes.

Preuve. Soient $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ les suites définies respectivement par $x_j = \sum_{k=1}^{2j+1}(-1)^k r_k$ et $y_j = \sum_{k=1}^{2j}(-1)^k r_k$. Puisque $(r_j)_j$ est une suite décroissante vers zéro, on constate immédiatement que les suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite, par la proposition 4.4.12.

Montrons à présent la majoration. Soit $J \in \mathbb{N}_0$. Si J est pair, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $J = 2k$. On a alors

$$|\sum_{j=2k}^{\infty}(-1)^j r_j| = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j r_j - x_{k-1} \leqslant y_k - x_{k-1} = (-1)^{2k} r_{2k}.$$

Si J s'écrit $J = 2k+1$ pour un $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$|\sum_{j=2k+1}^{\infty}(-1)^j r_j| = y_k - \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j r_j \leqslant y_k - x_k = -(-1)^{2k+1} r_{2k+1}.$$

Enfin, on a trivialement $-r_1 \leqslant x_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j r_j \leqslant y_1 \leqslant 0$. □

6.3.3 Séries absolument convergentes et séries semi-convergentes

Introduisons une distinction essentielle parmi les séries convergentes.

Définition 6.3.9 Une série $\sum_j x_j$ est *absolument convergente* si la série des modules $\sum_j |x_j|$ converge.

Théorème 6.3.10 *Toute série $\sum_j x_j$ absolument convergente de $\mathbb{R}^d$ converge. De plus, on a l'inégalité $|\sum_j x_j| \leqslant \sum_j |x_j|$.*

Preuve. C'est immédiat puisque, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \leqslant q$, on a $|\sum_{j=p}^{q} x_j| \leqslant \sum_{j=p}^{q} |x_j|$. □

La réciproque de ce résultat est fausse, comme en atteste la série $\sum_j (-1)^j/j$.

Définition 6.3.11 Une série $\sum_j x_j$ de $\mathbb{R}^d$ est *semi-convergente* si elle converge sans être absolument convergente.

Les séries absolument convergentes jouissent de propriétés remarquables vis-à-vis des regroupements et permutations de leurs termes.

Définition 6.3.12 Soit E un ensemble ; une *permutation* sur E est la donnée d'une bijection de E dans E.

Si une série de $\mathbb{R}^d$ est absolument convergente, on peut arbitrairement regrouper et permuter ses termes sans altérer sa convergence ou sa limite.

Théorème 6.3.13 *Soient $\sum_j x_j$ une série absolument convergente de $\mathbb{R}^d$ et π une permutation sur $\mathbb{N}_0$; la série $\sum_j x_{\pi(j)}$ converge vers la même limite.*

Preuve. Posons $s = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $n \geqslant J$,

$$|\sum_{j=1}^{n} x_j - s| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=J}^{n} |x_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque π est une bijection, il existe $K \in \mathbb{N}_0$ tel que $\{1, \ldots, J\} \subset \{\pi(1), \ldots, \pi(K)\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $n \geqslant K \geqslant J$, posons $n' = \max\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$. On a

$$\begin{aligned} |s - \sum_{j=1}^{n} x_{\pi(j)}| &\leqslant |s - \sum_{\substack{j=1 \\ \pi(j)\leqslant J}}^{n} x_{\pi(j)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ \pi(j)>J}}^{n} |x_{\pi(j)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=J}^{n'} |x_j| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui suffit. □

Si la série $\sum_j x_j$ n'est pas absolument convergente, on ne peut grouper impunément les termes. Ainsi, la série $\sum_j (-1)^j$ ne converge pas, son terme général ne tendant pas vers zéro, alors que la série $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{2j-1} + (-1)^{2j}$ converge trivialement vers zéro.

Même dans le cas d'une série semi-convergente, on ne peut permuter les termes sans rencontrer de problème.

Lemme 6.3.14 *Si la série numérique réelle $\sum_j x_j$ est semi-convergente, les séries $\sum_j x_j^+$ et $\sum_j x_j^-$ divergent.*

Preuve. Si, par exemple, la série $\sum_j x_j^+$ converge, la série $\sum_j x_j^- = \sum_j (x_j^+ - x_j)$ converge également, comme différence de deux séries convergentes. Cela étant, la série $\sum_j x_j$ converge absolument, puisque $\sum_{j=1}^{J} |x_j| \leqslant \sum_j x_j^+ + \sum_j x_j^-$, pour tout $J \in \mathbb{N}_0$. □

Le théorème suivant porte le nom de théorème de réarrangement de Riemann.

Théorème 6.3.15 (Riemann) *Si la série réelle $\sum_j x_j$ est semi-convergente, pour tous nombres s_1 et s_2 tels que $s_1 \leqslant s_2$, il existe une permutation π de $\mathbb{N}_0$ telle que*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_{\pi(j)} = s_1 \quad \textit{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_{\pi(j)} = s_2.$$

En particulier, pour tout nombre s, il existe une permutation π de $\mathbb{N}_0$ telle que $\sum_j x_{\pi(j)} = s$.

Preuve. Soient $N = \{j \in \mathbb{N}_0 : x_j < 0\}$ et $P = \{j \in \mathbb{N}_0 : x_j \geqslant 0\}$ et définissons π par récurrence. Posons $\pi(1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\pi(n)$ est défini, $y_n = \sum_{j=1}^{n} x_{\pi(j)}$. Si $\pi(n)$ a est défini, on pose

$$\pi(n+1) = \begin{cases} \inf(N \setminus \{\pi(1), \ldots \pi(n)\}) & \text{si } (\pi(n) \in N \text{ et } y_n \geqslant s_1) \text{ ou } y_n > s_2 \\ \inf(P \setminus \{\pi(1), \ldots \pi(n)\}) & \text{si } (\pi(n) \in P \text{ et } y_n \leqslant s_2) \text{ ou } y_n < s_1 \end{cases}.$$

On constate directement qie $\pi(n+1)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Qui plus est, la fonction π est injective, puisque $\pi(n+1) \notin \{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$. Montrons qu'elle est également surjective. Montrons d'abord qu'on a $N \subset \pi(\mathbb{N}_0)$. Si ce n'est pas le cas, il existe $k \in N \setminus \pi(\mathbb{N}_0)$; par construction, pour tout $k' \geqslant k$, on a $k' \in N \setminus \pi(\mathbb{N}_0)$. Il existe donc un indice $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $j \geqslant J$ implique $x_j \geqslant 0$. Dès lors, les séries $\sum_j x_j^+$ et $\sum_j x_{\pi(j)}$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes non-nuls (J au plus). De plus, par construction, on a $y_n \leqslant s_2$ pour tout $n \geqslant J$. Il s'ensuit que la suite $\sum_j x_j^+$ est croissante et majorée, ce qui contredit le lemme précédent. On montre de la même manière que $P \subset \pi(\mathbb{N}_0)$.

Posons $l_i = \liminf_{n\to\infty} y_n$ et $l_s = \limsup_{n\to\infty} y_n$ et montrons qu'on a $l_i \leqslant s_1$. Si ce n'est pas le cas, la proposition 4.4.19 avec $\varepsilon = l_i - s_1$ implique l'existence d'un indice $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $n \geqslant N$ implique $y_n \geqslant l_i$. Dès lors, pour tout $n \geqslant N$, $\pi(n) \in N$ implique $\pi(n+1) \in N$. Il s'ensuit que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}_0 : \pi(n) \in P\}$ est fini. Ceci est absurde, puisque P est infini (sinon $\sum_j x_j^+$ convergerait) et $P \subset \pi(\mathbb{N}_0)$. De fait, il existerait alors un élément $n_0 \in P$ tel que $\pi(n) \neq n_0$ pour aucun $n \in \mathbb{N}_0$. De la même manière, on montre que $l_s \geqslant s_2$.

Montrons que $l_s \leqslant s_2$. Si ce n'est pas le cas, la proposition 4.4.19 avec $\varepsilon = l_s - s_2 - \varepsilon'$, où ε' vérifie $0 < \varepsilon' < l_s - s_2$, implique que l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}_0 : y_n > s_2 + \varepsilon'\}$ est infini. Qui plus est, puisque la suite $(x_j)_j$ tend vers zéro, l'ensemble $E' = \{n \in \mathbb{N}_0 : |x_{\pi(n)}| > \varepsilon'\}$ est fini. Ainsi, pour tout $n \in E \setminus E'$, on a $y_{n-1} = y_n - x_{\pi(n)} > s_2$ et donc $\pi(n) \in N$. Autrement dit, $x_{\pi(n)} \leqslant 0$, ce qui implique $y_{n-1} \geqslant y_n > s_2 + \varepsilon'$, c'est-à-dire $n - 1 \in E$. Au total, nous avons montré que $n \in E \setminus E'$ implique $n - 1 \in E$. Puisque E' est fini et que E est infini, nous avons obtenu que $\mathbb{N}_0 \setminus E$ est fini. Il existe donc $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $n \geqslant N$ implique $y_n > s_2 + \varepsilon'$; on obtient ainsi $l_i \geqslant s_2 + \varepsilon' > s_2$. Ceci est absurde, puisque $l_i \leqslant s_1 \leqslant s_2$. De la même manière, on montre que $l_i \geqslant s_1$. $\square$

Exercice 6.3.16 Si la suite numérique réelle $\sum_j x_j$ converge et si on a $0 \leqslant x_j \leqslant x_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, alors la suite $(jx_j)_j$ converge vers zéro.
Suggestion. Si ce n'est pas le cas, il existe une sous-suite $x_{k(j)}$ de la suite x_j et $\varepsilon > 0$ tels que $k(j)x_{k(j)} \geqslant \varepsilon$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. On peut supposer avoir $k(j+1) \geqslant 2k(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, pour tout entier $J \geqslant 2$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k(J)} x_j &= \sum_{j=1}^{k(1)} x_j + \sum_{j=2}^{J} \sum_{l=k(j-1)+1}^{k(j)} x_l \\ &\geqslant k(1)x_{k(1)} + \sum_{j=2}^{J} (k(j) - k(j-1))x_{k(j)} \geqslant \varepsilon + (J-1)\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

d'où une contradiction.

Exercice 6.3.17 Si la série $\sum_j x_j$ converge absolument, établir que

$$K = \{\sum_{j=1}^{\infty} r_j x_j : r_j \in \{0,1\} \, \forall j \in \mathbb{N}_0\}$$

est compact.
Suggestion. Bien sûr, pour toute suite r_j de $\{0,1\}$, la série $\sum_j r_j x_j$ converge absolument.

Il est aussi clair que K est un borné de $\mathbb{R}^d$. Pour conclure, il suffit donc d'établir que de toute suite $(\sum_k r_{j,k}x_k)_j$ de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de K. Or, de la suite $(r_{j,1})_j$, on peut extraire une sous-suite $(r_{1(j),1})_j$ dont tous les éléments sont égaux à un même élément $r_1 \in \{0,1\}$. En procédant par récurrence, de la suite $(r_{(k-1)(j),k})_j$, on peut extraire une sous-suite $(r_{k(j),k})_j$ qui converge vers un élément r_k de $\{0,1\}$. On peut alors montrer que la suite $(\sum_k r_{k(j),k}x_k)_j$ converge vers $\sum_{k=1}^{\infty} r_k x_k$.

6.3.4 Théorème de Mertens

Si $\sum_j x_j$ et $\sum_j y_j$ sont deux séries convergentes, nous avons vu que $\sum_j x_j + \sum_j y_j = \sum_j (x_j + y_j)$. La situation est moins évidente pour le produit. On peut cependant, dans certains cas, exprimer un produit de séries comme un produit de convolution, où l'idée est de regrouper les termes des deux séries dont la somme des indices respectifs vaut j.

Théorème 6.3.18 (Mertens) *Si $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ et $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ sont deux séries numériques convergentes dont une au moins converge absolument, la série $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k}$ est convergente et*

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j \sum_{k=0}^{\infty} y_k = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k}.$$

Preuve. Supposons que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j = X$, $\sum_{j=0}^{\infty} y_j = Y$, $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| = X_0$ et soient $z_j = \sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k}$ $(j \in \mathbb{N})$, $X_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$, $Y_n = \sum_{j=0}^{n} y_j$ et $Z_n = \sum_{j=0}^{n} z_j$ $(n \in \mathbb{N})$; enfin, posons $R_n = Y - Y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. On a

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} x_k y_{j-k} = \sum_{k=0}^{n} x_k \sum_{j=k}^{n} y_{j-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x_k Y_{n-k} = X_n Y - \sum_{k=0}^{n} x_k R_{n-k}. \end{aligned}$$

Puisque $X_n Y$ tend vers XY, il reste à démontrer que $\sum_{k=0}^{n} x_k R_{n-k}$ tend vers zéro.

Puisque R_n tend vers zéro, cette suite est bornée et il existe $C > 0$ tel que $|R_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=N}^{n} |x_j| < \varepsilon/(2C)$ et $|R_n| < \varepsilon/(2X_0)$ pour tout $n \geqslant N$. Pour tout $n \geqslant 2N$, on a

$$\begin{aligned} |\sum_{k=0}^{n} x_k R_{n-k}| &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |x_k||R_{n-k}| + \sum_{k=N}^{n} |x_k||R_{n-k}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2X_0}\sum_{k=0}^{N-1} |x_k| + C\sum_{k=N}^{n} |x_k| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Les hypothèses du théorème de Mertens sont optimum.

Remarque 6.3.19 Soit $x_j = (-1)^j/\sqrt{j+1}$ $(j \in \mathbb{N})$; vu le critère des séries alternées, la série $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge. Puisque $(j-k+1)(k+1) = ((j/2)+1)^2 - ((j/2)-k)^2 \leqslant ((j/2)+1)^2$, on a

$$|\sum_{k=0}^{j} x_k x_{j-k}| = |\sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^j}{\sqrt{(j-k+1)(k+1)}}| \geqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{2}{j+2} = 2\frac{j+1}{j+2},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} x_k x_{j-k}$ ne converge pas, son terme général ne tendant pas vers zéro.

6.3.5 Critères de convergence des séries

Commençons par donner un *critère théorique.*

Théorème 6.3.20 (comparaison) *Soient $\sum_j w_j$, $\sum_j x_j$, $\sum_j y_j$ et $\sum_j z_j$ des séries numériques réelles à termes positifs ou nuls.*

- *Si la série $\sum_j w_j$ converge et s'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $C > 0$ tels que $x_j \leqslant C w_j$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j x_j$ converge.*
- *Si la série $\sum_j y_j$ diverge et s'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $C > 0$ tels que $z_j \geqslant C y_j$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j z_j$ diverge.*

Preuve. Supposons que la série $\sum_j w_j$ converge. Pour tous p, q tels que $J \leqslant p \leqslant q$, on a

$$|\sum_{j=p}^{q} x_j| = \sum_{j=p}^{q} x_j \leqslant \sum_{j=p}^{q} C w_j = C |\sum_{j=p}^{q} w_j|.$$

Le critère de Cauchy permet de conclure que la série $\sum_j x_j$ converge.

Supposons maintenant que $\sum_j y_j$ est une série divergente. Si la série $\sum_j z_j$ converge, puisque $y_j \leqslant z_j / C$, la série $\sum_j y_j$ converge également, ce qui est absurde. □

Définition 6.3.21 Les séries $\sum_j w_j$ et $\sum_j y_j$ qui apparaissent dans le théorème précédent sont appelées *séries de comparaison.*

En spécifiant les séries de comparaison, on obtient des critères de convergence appelés *critères pratiques.* Nous allons en donner trois parmi les plus utilisés. Les deux premiers reposent sur la série géométrique $\sum_j \theta^j$ qui, rappelons-le, converge si $\theta \in]0, 1[$ et diverge si $\theta \in [1, +\infty[$.

Théorème 6.3.22 (critère de la racine) *Soit $\sum_j x_j$ une série numérique réelle à termes positifs ou nuls.*

- *S'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $\theta \in]0, 1[$ tels que $\sqrt[j]{x_j} \leqslant \theta$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j x_j$ converge. Cela arrive notamment si $\sqrt[j]{x_j} \to \theta' < 1$.*
- *S'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sqrt[j]{x_j} \geqslant 1$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j x_j$ diverge. Cela arrive notamment si $\sqrt[j]{x_j} \to 1^+$ ou si $\sqrt[j]{x_j} \to \Theta$, avec $\Theta > 1$.*

Preuve. C'est une application immédiate du critère théorique, puisque $\sqrt[j]{x_j} \geqslant \theta$ (resp. $\leqslant \theta$) si et seulement si $x_j \geqslant \theta^j$ (resp. $\leqslant \theta^j$).

De plus, si la suite $(\sqrt[j]{x_j})_j$ converge vers θ', avec $\theta' \in [0, 1[$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sqrt[j]{x_j} \leqslant (1 + \theta')/2 < 1$, pour tout $j \geqslant J$. Enfin, si la suite $(\sqrt[j]{x_j})_j$ converge vers 1^+ ou vers Θ, avec $\Theta > 1$, la suite $(x_j)_j$ ne converge pas vers zéro et la série $\sum_j x_j$ ne peut donc converger. □

Ce résultat peut être exprimé en utilisant la notion de limite inférieure.

Théorème 6.3.23 (critère de la racine) *Soit $(x_j)_j$ une suite réelle à termes positifs ou nuls et posons $l = \limsup_{j \to \infty} \sqrt[j]{x_j}$.*

- *Si $l < 1$, alors la série $\sum_j x_j$ converge.*

– *Si $l > 1$, alors la série $\sum_j x_j$ diverge.*

Preuve. Supposons avoir $l < 1$; il existe $\varepsilon > 0$ tel que $l+\varepsilon < 1$. Vu la proposition 4.4.19, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $j \geqslant J$ implique $\sqrt[j]{x_j} < l+\varepsilon$. Pour un tel indice j, on a $x_j < (l+\varepsilon)^j$. Le critère théorique implique donc que la série $\sum_j x_j$ converge.

Si on a $l > 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $j_0 \geqslant j$ tel que $\sqrt[j_0]{x_{j_0}} > l - \varepsilon$ et donc tel que $x_{j_0} > (l-\varepsilon)^{j_0} > 1$. Puisque la suite $(x_j)_j$ ne tend pas vers zéro, la série $\sum_j x_j$ ne peut converger. □

Théorème 6.3.24 (critère du quotient) *Soit $\sum_j x_j$ une série numérique réelle à termes strictement positifs.*

- *S'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $\theta \in]0,1[$ tels que $x_{j+1}/x_j \leqslant \theta$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j x_j$ converge. Cela arrive notamment si $x_{j+1}/x_j \to \theta'$, avec $\theta' < 1$,*
- *s'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $x_{j+1}/x_j \geqslant 1$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j x_j$ diverge. Cela arrive notamment si $x_{j+1}/x_j \to 1^+$ ou si $x_{j+1}/x_j \to \Theta$, avec $\Theta > 1$.*

Preuve. On a, bien entendu, $\theta = \theta^{j+1}/\theta^j$ et $1 = 1^{j+1}/1^j$, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, en posant $C = x^J/\theta^J$, on a, pour tout $j \geqslant J$, $x^{j+1}/\theta^{j+1} \leqslant x^j/\theta^j \leqslant \cdots \leqslant C$ et donc $x_j \leqslant C\theta^j$ pour tout $j \geqslant J$. Le critère théorique permet de conclure. De même, $x_{j+1}/x_j \geqslant 1$ implique $x_{j+1} \geqslant x_j \geqslant \cdots \geqslant x_J > 0$. Puisque le terme général de la série ne tend pas vers zéro, elle ne peut converger.

De plus, si la suite $(x_{j+1}/x_j)_j$ converge vers θ', avec $\theta' \in [0,1[$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $j \geqslant J$ implique $x_{j+1}/x_j \leqslant (1+\theta')/2 < 1$. Enfin, si la suite $(x_{j+1}/x_j)_j$ converge vers 1^+ ou vers Θ, avec $\Theta > 1$, la suite $(x_j)_j$ ne tend pas vers zéro et la série associée ne peut converger. □

Le critère de la racine est toujours applicable lorsque de critère du quotient est applicable, comme en témoigne le résultat qui suit ; cependant il est bien souvent aisé de calculer un quotient qu'une racine.

Proposition 6.3.25 *Si $(x_j)_j$ est une suite réelle à termes strictement positifs, on a*

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{x_{j+1}}{x_j} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j} \leqslant \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j} \leqslant \limsup_{j\to\infty} \frac{x_{j+1}}{x_j}.$$

Preuve. Posons $l_s = \limsup_{j\to\infty} x_{j+1}/x_j$ et soit $\varepsilon > 0$. Par la proposition 4.4.19, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que $j \geqslant J$ implique $x_{j+1} \leqslant (l_s+\varepsilon)x_j$. Par récurrence, on obtient

$$x_j \leqslant \frac{x_J}{(l_s+\varepsilon)^J}(l_s+\varepsilon)^j,$$

pour tout $j \geqslant J$. Posons $c = x_J/(l_s+\varepsilon)^J$. Puisque $\sqrt[j]{c} \to 1$, on a

$$\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j} \leqslant \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{c}(l_s+\varepsilon) = l_s+\varepsilon.$$

Puisque ces relations doivent être vérifiées pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j} \leqslant l_s$.

La première inégalité se traite de même. En posant $l_i = \liminf_{j\to\infty} x_{j+1}/x_j$, on obtient l'existence d'un indice J tel que $j \geqslant J$ implique $x_j \geqslant c(l_i-\varepsilon)^j$, avec $c = x_J/(l_i-\varepsilon)^J$. Dès lors,

$$\liminf_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j} \geqslant \liminf_{j\to\infty} \sqrt[j]{c}(l_i-\varepsilon) = l_i-\varepsilon,$$

ce qui suffit. □

L'exemple suivant montre la supériorité du critère de la racine sur le critère du quotient.

Exemple 6.3.26 Soit $(x_j)_j$ la suite définie par $x_1 = 1/2$, $x_{2j} = (1/2)^{2j}$ et $x_{2j+1} = x_{2j}$. On constate directement que le critère de la racine implique la convergence de la série $\sum_j x_j$ (on a $\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j} = 1/2$).Le critère du quotient quant à lui ne permet pas de conclure (on a $\limsup_{j\to\infty} x_{j+1}/x_j = 1$).

Insistons sur le fait que si la suite $(\sqrt[j]{x_j})_j$ ou la suite $(x_{j+1}/x_j)_j$ converge vers 1 sans que cette limite soit 1^+, les critères précédents ne permettent pas de conclure. Il n'est par exemple pas possible, en utilisant les deux cirtères précédents, de montrer que la série $\sum_j 1/j$ diverge ou que la série $\sum_j 1/j^2$ converge. Le critère de Riemann permet de remédier partiellement à cet état de fait.

Théorème 6.3.27 (critère de Riemann) *Soit $\sum_j x_j$ une suite numérique réelle à termes positifs ou nuls.*
- *S'il existe $J \in \mathbb{N}_0$, $C > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $j^\alpha x_j \leqslant C$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j x_j$ converge. Cela arrive notamment si on a $j^\alpha x_j \to C$, avec $\alpha > 1$ et $C \in \mathbb{R}^+$,*
- *s'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et $C > 0$ tels que $jx_j \geqslant C$ pour tout $j \geqslant J$, alors la série $\sum_j x_j$ diverge. Cela arrive notamment si $jx_j \to C$, avec $C > 0$ ou si $jx_j \to +\infty$.*

Preuve. C'est une conséquence directe du critère théorique et du théorème 6.2.6. □

6.3.6 Séries de puissances

Définition 6.3.28 Soient $(x_j)_j$ est une suite numérique et $z \in \mathbb{C}$, $\sum_j x_j z^j$ est appelé une *série de puissances* associée à $(x_j)_j$.

Définition 6.3.29 Si $(x_j)_j$ est une suite numérique, soit $l = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j}$. Le *rayon de convergence* des séries de puissances associées à $(x_j)_j$ est le nombre R défini par $R = 1/l$ si $l \in]0,\infty[$, $R = 0$ si $l = +\infty$ et $R = +\infty$ si $l = 0$. On dit que R est le rayon de convergence de la série de puissance $\sum_j x_j z^j$.

Cette dénomination est justifiée par le résultat suivant.

Proposition 6.3.30 *Soient $(x_j)_j$ est une suite numérique et R le rayon de convergence associé. La série de puissances $\sum_j x_j z^j$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$.*

Preuve. Cela résulte directement du critère de la racine. En effet, en posant $l = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{x_j}$, on a $\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|x_j z^j|} = |z|l$. Dès lors, on a $|z|l < 1$ si $|z| < R$ et $|z|l > 1$ si $|z| > R$. □

Lorsque $|z| = R$, le résultat précédent ne fournit aucun résultat, comme le montre la remarque qui suit. En fait, il est nécessaire d'utiliser des critères plus subtils que ceux du quotient ou de la racine.

Remarque 6.3.31 Le rayon de convergence associé aux séries de puissances $\sum_j z^j/j^2$ et $\sum_j z^j$ est $R = 1$. On remarque directement que la série $\sum_j 1/j^2$ converge et que la série $\sum_j 1$ diverge.

Proposition 6.3.32 *Soit $(x_j)_j$ est une suite numérique. Si la suite $|x_{j+1}|/|x_j|$ converge, éventuellement vers l'infini, alors le rayon de convergence associé à $(x_j)_j$ est égal à cette limite.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 6.3.25. □

Voici une conséquence directe du théorème de Mertens

Proposition 6.3.33 *Soient $\sum_{j=0}^{\infty} x_j z^j$ et $\sum_{j=0}^{\infty} y_j z^j$ deux séries de puissances de rayon de convergence R_x et R_y respectivement. On a*

$$(\sum_{j=0}^{\infty} x_j z^j)(\sum_{j=0}^{\infty} y_j z^j) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j z^j$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_x, R_y\}$, où on a posé $w_j = \sum_{k=0}^{j} x_j y_{j-k}$ $(j \in \mathbb{N})$.

Preuve. Posons $x'_j = x_j z^j$, $y'_j = y_j z^j$ et $w'_j = \sum_{k=0}^{\infty} x'_k y'_{j-k}$. On a ainsi

$$w'_j = z^j \sum_{k=0}^{j} x_j y_{j-k} = w_j z^j.$$

Puisque $\sum_j x'_j$ et $\sum_j y'_j$ convergent absolument lorsque $|z| < \min\{R_x, R_y\}$, le théorème 6.3.18 permet de conclure. □

Les séries de puissances sont continues.

Proposition 6.3.34 *Si $\sum_j x_j z^j$ est une série de puissances de rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction*

$$f : B(0,R) \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_j x_j z^j$$

est continue.

Preuve. Soient z_0 un point de $B(0,R)$, $r > 0$ tel que $|z_0| < r < R$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, posons

$$f_j : B(0,R) \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{k=1}^{j} x_k z^k.$$

Chaque application f_j étant continue, il reste à montrer que la suite $(f_j)_j$ converge uniformément vers f sur $B(0,r)$.

Soit $\varepsilon > 0$; puisque la série $\sum_j x_j r^j$ converge absolument, il existe un indice J tel que $\sum_{j=J}^{\infty} |x_j| r^j < \varepsilon$. Pour tous $z \in B(0,r)$ et $J' \geqslant J$, on a alors

$$|f(z) - f_{J'}(z)| = |\sum_{j=J'+1}^{\infty} x_j z^j| \leqslant \sum_{j=J'+1}^{\infty} |x_j||z|^j \leqslant \sum_{j=J'+1}^{\infty} |x_j| r^j < \varepsilon,$$

ce qui suffit. □

6.3.7 Exemples d'étude de série

Exercice 6.3.35 Établir que la série $\sum_j j^{-j}$ converge.
Suggestion. Il s'agit d'une série numérique réelle à termes strictement positifs. Puisque $\sqrt[j]{|x_j|} = 1/j \to 0$, elle converge en vertu du critère de la racine. Remarquons que l'application du critère du quotient est plus délicate.

Exercice 6.3.36 Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

converge absolument.
Suggestion. Puisque $|x_{j+1}/x_j| = |z|/(j+1) \to 0$, le critère du quotient permet de conclure (le rayon de convergence de cette série de puissance est donc $R = \infty$). Remarquons que le critère de la racine s'applique moins aisément.

Exemple 6.3.37 Soit z un nombre complexe et notons $\exp(z)$ la limite de la suite $(y_j)_j$ définie par

$$y_j = 1 + \sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{k!}.$$

Montrer que la suite $(x_j)_j$ définie par

$$x_j = (1 + \frac{z}{j})^j$$

converge également vers $\exp(z)$. De fait, on a

$$x_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{z^k}{j^k} = \sum_{k=0}^{j} \frac{z^k}{j^k}(1 \cdot \frac{j-1}{j} \cdots \frac{j-k+1}{j}) = \sum_{k=0}^{j} \frac{z^k}{j^k} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{j-l}{j}.$$

La formule triviale $rr' - ss' = r(r' - s') + s'(r - s)$ permet d'obtenir, pour tous nombres complexes $r_0, \ldots, r_m, s_0, \ldots, s_m$ tels que $|r_l|, |s_l| \leqslant 1$ ($l \in \{0, \ldots, m\}$),

$$\Big|\prod_{l=0}^{m} r_l - \prod_{l=0}^{m} s_l\Big| \leqslant \sum_{l=0}^{l} |r_l - s_l|.$$

En effet, il suffit de procéder par récurrence. Si la formule a été montrée pour $m = 0, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\prod_{l=0}^{n+1} r_l - \prod_{l=0}^{n+1} s_l\Big| &= |r_{n+1} \prod_{l=0}^{n} r_l - s_{n+1} \prod_{l=0}^{n} s_l| \\
&= |r_{n+1}(\prod_{l=0}^{n} r_l - s_{n+1} \prod_{l=0}^{n} s_l) + \prod_{l=0}^{n} s_l(r_{n+1} - s_{n+1})| \\
&\leqslant |r_{n+1}| \sum_{l=0}^{n} |r_l - s_l| + \Big|\prod_{l=0}^{n} s_l\Big| |r_{n+1} - s_{n+1}| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{n} |r_l - s_l| + |r_{n+1} - s_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
|y_j - x_j| &\leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{|z|^k}{k!} \Big| \prod_{l=0}^{k-1} 1 - \prod_{l=0}^{k-1} \frac{j-l}{j} \Big| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{|z|^k}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} |1 - \frac{j-l}{j}| = \sum_{k=0}^{j} \frac{|z|^k}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l}{j} \\
&= \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j} \frac{|z|^k}{k!} \frac{(k-1)k}{2} = \frac{|z|^2}{2j} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{|z|^k}{k!} \\
&\leqslant \frac{|z|^2}{2j} \exp(|z|) \to 0,
\end{aligned}$$

ce qui suffit.

Exercice 6.3.38 Établir que pour tous $a, b > 0$, la série $\sum_j 1/(a + jb)$ diverge.
Suggestion. Il s'agit d'une série numérique réelle à termes strictement positifs. On a $j/(a+jb) \to 1/a$ et donc, par le critère de Riemann, la série ne converge pas. Par contre, ni le critère de la racine ni le critère du quotient ne permettent de conclure.

Exercice 6.3.39 Établir que la suite $\sum_j 1/j^2$ converge.
Suggestion. C'est la série de Riemann d'ordre deux.

Exercice 6.3.40 Étudier la convergence de la série numérique dont le terme général est donné par $x_j = (a-2)^j/(2^j a^j \sqrt{2j+1})$, quelque soit $j \in \mathbb{N}_0$, pour toutes les valeurs possibles du paramètre réel a.
Suggestion. Le terme général n'a de sens que si a est non-nul. La valeur $a = 2$ donne évidemment lieu à une série absolument convergente. Dans les autres cas, vu la forme du terme général, il y a lieu de recourir au critère du quotient. On a

$$\frac{|x_{j+1}|}{|x_j|} = \frac{|a-2|}{2|a|} \frac{\sqrt{2j+1}}{\sqrt{2j+3}} \to (\frac{|a-2|}{2|a|})^-.$$

Ainsi, $|a-2|/2|a| < 1$ si et seulement si $(a-2)^2 < 4a^2$, c'est-à-dire si et seulement si $3a^2 + 4a - 4 > 0$. En procédant de même avec les symboles « $>$ » et « $=$ », on obtient le résultat suivant. Si $a < -2$, la série est absolument convergente. Si $-2 < a < 2/3$ $(a \neq 0)$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers zéro. Si $a > 2/3$ $(a \neq 2)$, la série est absolument convergente. Il reste alors à envisager les cas $a = -2$ et $a = 2/3$. Pour $a = -2$, la série $\sum_j (2j+1)^{-1/2}$ ne converge pas, vu le critère de Riemann. Pour $a = 2/3$, la série $\sum_j (-1)^j (2j+1)^{-1/2}$ est une série alternée. Puisque $(2j+1)^{-1/2} \searrow 0$, elle est semi-convergente.

Chapitre 7

Espaces vectoriels normés

Danc ce chapitre, nous allons notamment montrer que, d'une certaine manière, tout espace vectoriel de dimension finie d est équivalent à l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Ce résultat explique pourquoi l'espace euclidien occupe une place prépondérante en analyse.

7.1 Espace vectoriel

7.1.1 Définition

Définition 7.1.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps (on peut lire $\mathbb{K}$ comme étant le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$) ; un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un ensemble E dont les éléments sont appelés *vecteurs*, muni d'une loi interne $+ : E^2 \to E$ appelée *somme vectorielle* et d'une loi de composition externe à gauche $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ appelé *multiplication par un scalaire* jouissant des propriétés suivantes :

– la loi $+$ est commutative, associative et admet un élément neutre 0 (ou 0_E pour différentier ce vecteur de l'élément neutre additif $0_{\mathbb{K}}$ du corps $\mathbb{K}$), appelé *vecteur nul*. Tout vecteur v admet un opposé[1] $-v$.
– La loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$, distributive à droite par rapport à l'addition du corps $\mathbb{K}$ et associative à droite par rapport à la multiplication dans $\mathbb{K}$. Enfin, l'élément neutre multiplicatif 1 du corps $\mathbb{K}$ est neutre à gauche pour la loi externe $\cdot$.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *scalaire*.

Ainsi, si u, v, w sont des vecteurs de E et λ, μ deux éléments de $\mathbb{K}$, on a

$$\begin{array}{ll}
u + v = v + u & u + (v + w) = (u + v) + w \\
0_E + v = v & u + (-u) = 0_E \\
\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v) & (\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u) \\
(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u) & 1 \cdot u = u
\end{array}$$

Du premier axiome, il découle que E est non-vide. Les axiomes ensemble impliquent que 0 est absorbant à droite pour la loi $\cdot$ (i.e. le produit de 0_E par un scalaire quelconque vaut 0_E) et que le produit d'un vecteur quelconque de E par le scalaire $0_{\mathbb{K}}$ vaut aussi 0_E. Cette

1. Autrement dit, $(E, +)$ est un groupe abélien.

propriété et le second axiome impliquent que l'opposé $-v$ du vecteur v est le produit de v par le scalaire -1. En résumé, on a aussi

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E \qquad \lambda \cdot 0_E = 0_E \qquad -1 \cdot u = -u$$

Si $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on parle d'espace vectoriel rationnel, réel ou complexe respectivement. On insiste parfois sur le fait que les éléments de E sont des vecteurs en les surmontant d'une flèche : on écrit donc $\vec{u} \in E$ au lieu de $u \in E$. L'intérêt d'un espace vectoriel réside dans la possibilité d'effectuer des combinaisons linéaires.

Définition 7.1.2 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et J un ensemble d'indexation. Pour tout $j \in J$, soit x_j un vecteur de E et λ_j un scalaire tel que, si J est infini, le nombre d'indices J tels que λ_j est non-nul soit fini [2] ; les familles x_j et λ_j pour $j \in J$ sont naturellement notées $(x_j)_{j\in J}$ et $(\lambda_j)_{j\in J}$ respectivement. La *combinaison linéaire* de la famille de vecteurs $(x_j)_{j\in J}$ par la famille de scalaires $(\lambda_j)_{j\in J}$ est le vecteur $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j$. Les scalaires λ_j $(j \in J)$ sont souvent appelés *coefficients*.

Définition 7.1.3 Un *sous-espace vectoriel* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une partie non-vide de E stable [3] par addition vectorielle et multiplication par un scalaire (ou de manière équivalente, stable par combinaison linéaire).

Muni des lois induites, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. On vérifie immédiatement que l'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels est encore un espace vectoriel, mais en général, l'union, même finie, d'une famille de sous-espaces vectoriels ne l'est pas.

Exemples 7.1.4 Donnons quelques exemples classiques.
- L'*espace nul* est l'espace vectoriel [4] sur le corps $\mathbb{K}$ ne comportant qu'un seul élément ; il s'agit nécessairement du vecteur nul.
- L'ensemble des suites numériques satisfaisant une relation de récurrence linéaire est un espace vectoriel réel.
- L'ensemble des polynômes est un espace vectoriel complexe.
- L'ensemble des fonctions est un espace vectoriel complexe.
- L'espace $\mathbb{R}^d$ est un espace vectoriel réel.

Définition 7.1.5 Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. Une application f de E dans F est une *application linéaire* si elle est additive et commute à la multiplication par les scalaires :
- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$,
- $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Autrement dit, une application linéaire préserve les combinaisons linéaires : pour toute famile finie $(v_j)_{j\in J}$ de vecteurs et toute famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires, on a

$$f(\sum_{j\in J} \lambda_j \cdot v_j) = \sum_{j\in J} \lambda_j \cdot f(v_j).$$

2. On dit que le support des indices est fini.
3. Une telle partie contient les opposés de ses éléments et forme donc un sous-groupe de $(E, +)$.
4. L'espace nul est l'objet initial et l'objet final de la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Notation 7.1.6 Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 7.1.7 Soit E un espace vectoriel ; un élément de $\mathcal{L}(E, E)$ est appelé un *endomorphisme*[5] de l'espace vectoriel E.

7.1.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 7.1.8 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une famille $(v_j)_{j\in J}$ de vecteurs de E est *libre* sur $\mathbb{K}$ si pour toute partie J' finie de J, toute famille $(v_j)_{j\in J'}$ de vecteurs et toute famille $(\lambda_j)_{j\in J'}$ de scalaires, on a $\sum_{j\in J'} \lambda_j v_j = 0$ implique $\lambda_j = 0_{\mathbb{K}}$ pour tout $j \in J'$. Les vecteurs v_j, avec $j \in J$, sont dits *linéairement indépendants.* Dans le cas contraire, la famille est dite *liée* et les vecteurs constituants *linéairement dépendants.*

Exemples 7.1.9 La famille vide est libre. Une famille constituée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non-nul. Deux vecteurs u et v sont liés si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda \cdot v$ ou $v = \lambda \cdot u$. Dans ce cas, les deux vecteurs sont dits *colinéaires.*

Définition 7.1.10 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le *sous-espace vectoriel engendré* par la famille $(v_j)_{j\in J}$ de vecteurs de E, noté $\text{span}(\{v_j : j \in J\})$, est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_j $(j \in J)$. La famille $(v_j)_{j\in J}$ *engendre* E (on dit aussi que cette famille est *génératrice*) si $\text{span}(\{v_j : j \in J\}) = E$.

On vérifie de suite que $\text{span}(\{v_j : j \in J\})$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs v_j, avec $j \in J$.

Définition 7.1.11 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une base de E est une famille $(v_j)_{j\in J}$ génératrice minimale de E : il n'existe pas de partie J' de J avec $J' \neq J$ telle que $(v_j)_{j\in J'}$ est une famille génératrice de E.

Nous allons maintenant montrer qu'une base est une famille génératrice libre.

Lemme 7.1.12 *Une base est nécessairement libre.*

Preuve. Soit $(v_j)_{j\in J}$ une base de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Si cette famille n'est pas libre, il existe une partie finie $J' \subset J$ et une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j\in J'}$ non tous nuls tels que $\sum_{j\in J'} \lambda_j v_j = 0$. Il existe donc un indice $j_0 \in J'$ et des scalaires $(\mu_j)_{j\in J'\setminus\{j_0\}}$ tels que $v_{j_0} = \sum_{j\in J'\setminus\{j_0\}} \mu_j v_j$. Autrement dit, $(v_j)_{j\in J\setminus\{j_0\}}$ est une partie génératrice de E, ce qui implique que la famille $(v_j)_{j\in J}$ n'est pas une base. □

Proposition 7.1.13 *Une famille génératrice $(v_j)_{j\in J}$ de E est une base si et seulement si tout élément de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs v_j $(j \in J)$.*

Preuve. La condition est nécessaire. S'il existe deux familles finies de scalaires différentes $(\lambda_j)_{j\in J}$ et $(\lambda'_j)_{j\in J'}$ telles que

$$\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = \sum_{j\in J'} \lambda'_j v_j,$$

5. Un endomorphisme est un morphisme d'un objet mathématique sur lui-mmê, ici un espace vectoriel.

alors, en posant $J'' = J \cup J'$, il existe une famille de scalaires non tous nuls $(\lambda''_j)_{j \in J''}$ telle que $\sum_{j \in J''} \lambda''_j v_j = 0$, ce qui est absurde, vu le lemme précédent.

La condition est suffisante. Supposons que $(\lambda_j)_{j \in J}$ soit une partie génératrice telle que tout élément de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs v_j $(j \in J)$. S'il existe une partie J' de J différente de J telle que $(\lambda_j)_{j \in J'}$ soit une famille génératrice, il existe $j_0 \in J \setminus J'$ et une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j \in J'}$ tels que $v_{j_0} = \sum_{j \in J'} \lambda_j v_j$, ce qui contredit le lemme précédent. □

Nous allons maintenant introduire la notion de base.

Théorème 7.1.14 (base incomplète, AC) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $(v_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice, toute sous-famille libre $(v_j)_{j \in K}$ avec $K \subset J$ peut être complétée de manière à obtenir une base de E : il existe K' avec $K \subset K' \subset J$ tel que $(v_j)_{j \in K'}$ soit une base de E.*

Preuve. Si J est fini, la démonstration repose simplement sur l'algorithme en trois étapes suivant :

1. on pose $K_1 = K$ et $l = 1$,
2. si la famille $(v_j)_{j \in K_l}$ n'est pas génératrice, il existe un indice $j_0 \in J$ qui n'est pas combinaison linéaire des v_j avec $j \in K_l$. Cet indice n'appartenant pas à K_l, on pose $K_{l+1} = K_l \cup \{j_0\}$ et on incrémente l d'une unité. La nouvelle famille $(v_j)_{j \in K_l}$ est nécessairement libre et on recommence cette étape.
3. Si la famille $(v_j)_{j \in K_l}$ est génératrice, on pose $K' = K_l$. Cette famille étant aussi libre, il s'agit bien d'une base de E.

Remarquons que la dernière étape est nécessairement abordée ; au pire la deuxième étape est répétée $\#J - \#K$ fois, ce qui correspond au cas où la famille $(v_j)_{j \in J}$ est libre.

La démonstration de ce résultat lorsque J est infini est plus ardue et fait appel à l'axiomatique de la théorie des ensembles. En effet, ce résultat repose sur l'axiome du choix, ou plus précisément, dans la preuve qui va suivre, sur le lemme de Zorn qui lui est équivalent. Soit F l'ensemble des parties K' de J contenant K et telles que la famille $(v_j)_{j \in K'}$ soit libre. Cet ensemble F est non-vide, puisque $K \in F$. Il est aussi inductif[6] pour l'inclusion : en posant $K' \leqslant K''$ si K' et K'' sont deux éléments de F tels que $K' \subset K''$, toute partie totalement ordonée admet un majorant. Par le lemme de Zorn, F possède un élément maximal ; soit K_M cet ensemble. Pour tout $j_0 \in J$, v_{j_0} s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs v_j avec $j \in K_M$, sinon $(v_j)_{j \in K_M \cup \{j_0\}}$ serait une famille libre et K_M ne serait pas maximal. Tout élément de E s'exprimant comme une combinaison linéaire des vecteurs v_j avec $j \in J$, il s'exprime aussi comme une combinaison linéaire des vecteurs v_j avec $j \in K_M$, ce qui prouve que $(v_j)_{j \in K_M}$ est une famille génératrice. □

Ce théorème affirme que tout espace vectoriel E admet une base : la famille vide étant libre, elle peut être complétée en une base de E.

Théorème 7.1.15 (dimension) *Si $(v_j)_{j \in J}$ et $(u_k)_{k \in K}$ sont deux bases d'un même espace vectoriel, alors J et K ont même cardinalité.*

6. L'ensemble F est stable par union de chaînes non-vides.

Preuve. Supposons que le cardinal de J soit strictement supérieur à celui de K et montrons que la famille $(v_j)_{j\in J}$ est liée. La preuve diffère selon que l'on suppose J fini ou non.

Si J n'est pas fini, pour tout $k \in K$, il existe un ensemble $J_k \subset J$ fini et une famille de scalaires $(\lambda_j^{(k)})_{j\in J_k}$ tels que

$$u_k = \sum_{j\in J_k} \lambda_j^{(k)} v_j.$$

Puisque le cardinal de J est strictement supérieur à celui de K et que J_k est un sous-ensemble fini de J pour tout $k \in \mathbb{K}$, le cardinal de J est strictement supérieur à celui de $\cup_{k\in K} J_k$ (c'est argument n'est pas valable si J est fini). Il existe donc un indice $j_0 \in J$ tel que $j_0 \notin \cup_{k\in K} J_k$. Par hypothèse, l'élément v_{j_0} est combinaison linéaire finie des u_k $(k \in K)$. Or, il résulte des considérations qui précèdent que l'on peut exprimer les u_k $(k \in K)$ comme combinaison linéaire des v_j, avec $j \in J \setminus \{j_0\}$. Il en résulte que v_{j_0} est linéairement dépendant des scalaires v_j, avec $j \in J \setminus \{j_0\}$.

Si J est fini, l'hypothèse que la famille $(v_j)_{j\in J}$ est génératrice est superflue. On peut utiliser le lemme de Steinitz ; voici une seconde méthode. Soient m et n les nombres d'éléments respectifs de J et K (on a donc $m > n$). Pour tout $j \in J$, il existe une famille $(\lambda_k^{(j)})_{k\in K}$ telle que

$$v_j = \sum_{k\in K} \lambda_k^{(j)} u_k.$$

La matrice M de type $m \times n$ dont l'élément j, k est $\lambda_j^{(k)}$ est de rang au plus égal à n et par conséquent ses m lignes sont liées. Soit L_j sa j-ième ligne $(j \in \{1, \ldots, m\})$; il existe des scalaires $(\mu_j)_{j\in J}$ non tous nuls tels que la ligne $\sum_{j\in J} \mu_j L_j = 0$. Par conséquent

$$\sum_{j\in J} \mu_j v_j = \sum_{j\in J} \mu_j \sum_{k\in K} \lambda_k^{(j)} u_k = \sum_{k\in K} (\sum_{j\in J} \mu_j \lambda_k^{(j)}) u_j = 0,$$

ce qui prouve que les v_j $(j \in J)$ sont liés. □

Définition 7.1.16 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $(v_j)_{j\in J}$ est une base de E, E est dit de dimension infinie si J n'est pas fini. Dans le cas contraire, la *dimension* de E est le cardinal de J.

Un espace vectoriel est donc de dimension finie si et seulement s'il possède une partie génératrice finie.

Exemple 7.1.17 La dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ est égale à d, puisque $(e_j)_{j\in\{1,\ldots,d\}}$ est une base de $\mathbb{R}^d$. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un corps, alors pour tout $d \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $\mathbb{K}^d$ muni de

– l'opération addition

$$+ : (\mathbb{K}^d)^2 \to \mathbb{K}^d \quad ((\lambda_1, \ldots, \lambda_d), (\mu_1, \ldots, \mu_d)) \mapsto (\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_d + \mu_d)$$

– et de l'opération multiplication par un scalaire

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^d \to \mathbb{K} \quad (\mu, (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)) \mapsto (\mu\lambda_1, \ldots, \mu\lambda_d)$$

est un espace vectoriel de dimension d dont la famille $(e_j)_{j\in\{1,\ldots,d\}}$, définie par $e_j = (e_{j,1}, \ldots, e_{j,d})$ avec $e_{j,k} = 0_{\mathbb{K}}$ si $j \neq k$ et $e_{j,j} = 1_{\mathbb{K}}$ $(j, k \in \{1, \ldots, d\})$, est une base.

Exemple 7.1.18 L'espace vectoriel des polynômes est de dimension infinie et une base de cet espace est donnée par la famille $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$.

7.1.3 Théorème d'isomorphie

Nous allons maintenant montrer que tout espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{K}$ possède essentiellement la même structure (en langage mathématique nous parlerons d'isomorphisme) que $\mathbb{K}^d$.

Définition 7.1.19 Deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection T entre E et F telle que $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. L'application T est appelée un *isomorphisme*.

Un isomorphisme est donc une bijection qui préserve les relations linéaires.

Lemme 7.1.20 *Si deux espaces vectoriels sont isomorphes, ils ont la même dimension.*

Preuve. Supposons que T soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels E et F, soit $(v_j)_{j\in J}$ une base de E et posons, pour tout $j \in J$, $u_j = T(v_j)$. Si y est un vecteur de F, il existe $x \in E$ tel que $T(x) = y$ et une famille de scalaires (dont seul un nombre fini sont non-nuls) $(\lambda_j)_{j\in J}$ telle que $x = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j$. Par conséquent, on a $y = \sum_{j\in J} \lambda_j u_j$ et la famille $(u_j)_{j\in J}$ est génératrice. Si y s'écrit également $y = \sum_{j\in J} \mu_j u_j$ (où seul un nombre fini de u_j $(j \in J)$ sont non-nuls), on a $0 = \sum_{j\in J}(\lambda_j - \mu_j)u_j$. Par conséquent, on doit avoir $0 = \sum_{j\in J}(\lambda_j - \mu_j)v_j$ et donc $\lambda_j = \mu_j$ pour tout $j \in J$, puisque $(v_j)_{j\in J}$ est une base. $\square$

Le résultat qui suit est fondamental pour les espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 7.1.21 (isomorphie) *Tout espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^d$.*

Preuve. Soit E un espace vectoriel de dimension d et $(v_j)_{j\in J}$ une base de E ; puisque E est de dimension finie, on peut indexer les éléments de la base sur les d premiers nombres naturels non-nuls, i.e. supposer que J est l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$. Pour tout $x \in E$, il existe donc d scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j v_j$. On vérifie de suite que l'application qui à un tel élément de E fait correspondre l'élément $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ de $\mathbb{K}^d$ est un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^d$. $\square$

7.2 Espaces vectoriels normés

7.2.1 Définition

Dans la suite, nous supposerons que E est un espace vectoriel réel ou complexe et écrirons λx plutôt que $\lambda \cdot x$, si $x \in E$ et λ est un scalaire de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 7.2.1 Soit E un espace vectoriel ; une *norme* sur E est une fonction

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \|x\|$$

telle que, pour tout $x \in E$,

- (séparation) $\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$,
- (homogénéité) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, pour tout scalaire λ,
- (inégalité triangulaire) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, pour tout $y \in E$.

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé un *espace vectoriel normé* ; il est noté $(E, \|\cdot\|)$ ou simplement E si aucune confusion n'est possible.

Remarque 7.2.2 Faisons à présent deux remarques :
- La condition $\|0\| = 0$ est superflue, puisque la condition d'homogénéité impose, pour tout $x \in E$, $\|0x\| = 0\|x\|$.
- Une fonction réelle satisfaisant les trois propriétés de la norme est nécessairement positive, puisqu'on a, pour tout $x \in E$,

$$0 = \|0\| = \|x - x\| \leqslant \|x\| + \| - x\| = 2\|x\|.$$

Remarque 7.2.3 Si la propriété de séparation n'est pas vérifiée, on parle de *semi-norme* sur E.

Définition 7.2.4 Une application entre deux espaces vectoriels normés est appelé un *opérateur*. Plus généralement, Un*opérateur* est une application entre deux espaces vectoriels topologiques.

Proposition 7.2.5 (inégalité triangulaire renversée) *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé, on a*

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|,$$

pour tous $x, y \in E$.

Preuve. Il suffit de considérer successivement les deux décompositions suivantes : $x = (x - y) + y$ et $y = (y - x) + x$, pour tous $x, y \in E$. □

7.2.2 Distance induite par une norme

Proposition 7.2.6 *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé, l'application*

$$\mathrm{dist} : E^2 \to \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

définit une distance sur E.

Définition 7.2.7 La distance définie par le résultat précédent est appelée *distance induite* par la norme $\|\cdot\|$.

Remarque 7.2.8 Toute les distances ne sont pas induites par une norme. Ainsi la distance discrète, définie implicitement par

$$\mathrm{dist}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

sur l'ensemble E (de plus d'un élément) ne peut donner une distance sur E, puisque l'application $\|x\| = d(x, 0)$ ne vérifie pas la condition d'homogénéité.

Donnons quelques exemples.

Exemples 7.2.9 Pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$, les normes usuelles sont le module $|\cdot|$, la distance de Manhattan : $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j|$ et la norme de Tchebychev, $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$. Plus généralement, pour $p \geqslant 1$, on peut munir $\mathbb{R}^d$ de la norme de Minkowski : $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^d |x_j|^p}$. Le fait que cette fonction $\|\cdot\|_p$ est une distance résulte de l'inégalité de Minkowski (proposition 11.7.9).

Exemple 7.2.10 Si $K \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble compact, l'ensemble des fonctions définies et continues[7] sur K muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$ est un espace vectoriel normé.

7. Plus généralement, on peut prendre les fonctions définies et continues sur l'ensemble métrique compact (X, d).

7.2.3 Applications linéaires continues

Exprimons la notion de continuité spécifiquement pour les applications linéaires entre deux espaces vectoriels normés.

Définition 7.2.11 Une application f entre deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est continue si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|x - y\|_E < \eta$ implique $\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$, pour tous $x, y \in E$.

Remarque 7.2.12 Par l'inégalité triangulaire inversée, une norme sur un espace vectoriel est une application continue sur l'espace normé.

Pour les applications linéaires, on peut adopter une définition alternative.

Proposition 7.2.13 *Une application linéaire f entre deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est continue si et seulement si*
- *elle est continue en zéro,*
- *il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$.*

Preuve. Montrons la première équivalence. Puisque $f(0) = 0$, la condition est nécessaire. La condition est suffisante. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\|_E < \eta$ implique $\|f(x)\|_F < \varepsilon$. De là, si $\|x - y\|_E < \eta$, on a

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F < \varepsilon.$$

Montrons la seconde équivalence. La condition est suffisante. On a

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leqslant C\|x - y\|_E,$$

ce qui suffit.

Montrons que la condition est nécessaire. Il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\|_E < \eta$ implique $\|f(x)\|_F < 1$. Pour tout $x \in E$ non nul, soit $y = x/\|2x/\eta\|_E$. On a $\|f(y)\|_F < 1$ et donc

$$\|f(x)\|_F = \|f(\frac{2}{\eta}\|x\|_E y)\|_F = \frac{2}{\eta}\|f(y)\|_F\|x\|_E < \frac{2}{\eta}\|x\|_E.$$

On conclut en posant $C = 2/\eta$. □

Proposition 7.2.14 *Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F continues muni de la norme*

$$\|\cdot\| : f \mapsto \sup_{x \in \{y \in E : \|y\|_E \leqslant 1\}} \|f(x)\|_F$$

est un espace vectoriel normé.

Preuve. Seule l'inégalité triangulaire de l'application $\|\cdot\|$ n'est pas triviale. Soit $B = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$. Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, on a, pour tout $x \in B$

$$\|f + g(x)\|_F \leqslant \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leqslant \sup_{x \in B} \|f(x)\|_F + \sup_{x \in B} \|g(x)\|_F,$$

ce qui implique

$$\sup_{x \in B} \|f + g(x)\|_F \leqslant \|f\| + \|g\|$$

et permet de conclure. □

7.2.4 Normes équivalentes

Définition 7.2.15 Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont *équivalents* s'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1,$$

pour tout $x \in E$.

Exemple 7.2.16 Pour tout $p \geqslant 1$, la norme de Minkowski $\|\cdot\|_p$ est équivalent à la norme de Tchebychev $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, puisqu'on a

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \sqrt[p]{d}\|x\|_\infty.$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Incidemment, nous avons montré que $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ lorsque p tend vers l'infini.

Exemple 7.2.17 Voici un exemple de normes qui ne sont pas équivalentes ; il fait appel au calcul intégral. Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ respectivement définies par

$$\|f\| = \int_0^1 |f|\, dx \quad \text{et} \quad \|f(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, soit f_j la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_j(x) = \begin{cases} -j^2x + j & \text{si } x \in [0, 1/j] \\ 0 & \text{si } x \in [1/j, 1] \end{cases}.$$

On vérifie directement que $\|f\|_1 = j$ et $\|f\|_\infty = 1/2$, ce qui implique qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|f_j\|_\infty \leqslant C\|f_j\|_1$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

7.2.5 Théorème d'isomorphie isométrique

Nous allons maintenant montrer qu'en dimension finie, les propriétés topologiques d'un espace vectoriel sont indépendantes de la norme choisie. Si E est un espace vectoriel de dimension finie d, soit $(e_j)_{j\in\{1,\ldots,d\}}$ une base de E. Puisque pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{j=1}^d x_je_j$ pour d scalaires uniques $x_1, \ldots, x_d$, on peut munir cet espace de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}.$$

Lemme 7.2.18 *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, toute norme $\|\cdot\|$ est une application continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; plus précisément, il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$, on a $|\|x\| - \|y\|| \leqslant C\|x - y\|_\infty$.*

Preuve. En utilisant l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme, on a

$$\|x\| = \|\sum_{j=1}^d x_je_j\| \leqslant \sum_{j=1}^d |x_j|\|e_j\| \leqslant (\sum_{j=1}^d \|e_j\|)\|x\|_\infty,$$

pour tout $x \in E$. En posant $C = \sum_{j=1}^d \|e_j\|$, on obtient donc $\|x - y\| \leqslant C\|x - y\|_\infty$ pour tout $x, y \in E$. L'inégalité triangulaire renversée implique alors

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \leqslant C\|x - y\|_\infty,$$

qui est l'inégalité annoncée. □

Remarque 7.2.19 En fait, nous avons montré que la fonction $\|\cdot\| : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est lipschitzienne.

Lemme 7.2.20 *La sphère unité pour $\|\cdot\|_\infty$, $S = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_\infty = 1\}$, est un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. On vérifie directement que $S \subset \prod_{j=1}^d [0,1]$, cet intervalle étant un compact de $\mathbb{R}^d$. De plus, S est fermé ; de fait, si $(x_j)_j$ est une suite de S qui converge vers $x \in \mathbb{R}^d$, les propriétés relatives au suites impliquent que $\|x_j\|_\infty$ converge vers $\|x\|_\infty$. Or, $(\|x_j\|_\infty)_j$ étant la suite constante 1, on a nécessairement $\|x\|_\infty = 1$, c'est-à-dire $x \in S$. Au total, S est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^d$, ce qui suffit. $\square$

Preuve. On peut aussi voir S comme étant l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$, avec

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x\|_\infty$$

Cette application étant une continue, S est fermé. Il s'agit donc d'un compact, puisque S est trivialement borné. $\square$

Lemme 7.2.21 *Sur $\mathbb{R}^d$, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Montrons que $\|\cdot\|$ est équivalent à $\|\cdot\|_\infty$, ce qui permettra de conclure par transitivité. Par le premier lemme, $\|\cdot\|$ est continu sur S, où S est la sphère pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie au second lemme. Ainsi, cette fonction est bornée (et atteint ses bornes) sur S : il existe $m, M \in \mathbb{R}^+$ tels que $m \leqslant \|S\| \leqslant M$. Si x est un vecteur non-nul, soit $y = x/\|x\|_\infty$; on a

$$m \leqslant \|y\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \leqslant M$$

et donc $m\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant M\|x\|_\infty$. $\square$

Le théorème d'isomorphie peut être amélioré.

Définition 7.2.22 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une isométrie de E dans F est une application f de E dans F telle que $\|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E$ pour tous $x, y \in E$.

Théorème 7.2.23 (isomorphie isométrique) *Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension d, il existe un isomorphisme isométrique entre $\mathbb{K}^d$ et E*

Preuve. Soient $(e_j)_{j\in\{1,\ldots,d\}}$ une base de E et f l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^d \to E \quad (x_1, \ldots, x_d) \mapsto \sum_{j=1}^d x_j e_j.$$

On a, avec des notations évidentes

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|_\infty &= \|\sum_{j=1}^d x_j e_j - \sum_{j=1}^d y_j e_j\|_\infty = \|\sum_{j=1}^d (x_j - y_j) e_j\|_\infty \\ &= \sup_{j\in\{1,\ldots,d\}} |x_j - y_j| = \|x - y\|_\infty.\end{aligned}$$

On remarque aussi que f est une bijection. $\square$

Remarque 7.2.24 L'inverse de l'isométrie f définie dans le théorème précédent est aussi une isométrie.

Théorème 7.2.25 *Si E est un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes*

Preuve. Soient S' la sphère dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: $S' = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$ et f l'isomorphisme isométrique défini dans le théorème précédent. Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E, on a $\|S'\| = \|f(S)\|$, ce qui prouve que $\|S'\|$ est compact, par continuité. Le raisonnement est alors analogue au cas de $\mathbb{R}^d$. $\square$

Remarque 7.2.26 Si E est un espace vectoriel de dimension finie, les normes étant équivalentes, les distance induites le sont également ; il en résulte que les ouverts induits par ces deux distances sont identiques. Sur un espace vectoriel de dimension finie, les normes induisent donc une topologie[8] unique.

Théorème 7.2.27 *Toute application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimensions finies est continue.*

Preuve. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et munissons-les de la distance de Manhattan : par exemple, si $(e_j)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ est une base de E, on a $\|x\| = \|\sum_{j=1}^d x_j e_j\| = \sum_{j=1}^d |x_j|$, pour tout $x \in E$. Ainsi, si f est une application linéaire entre E et F,

$$\|f(x)\| = \|f(\sum_{j=1}^d x_j e_j)\| = \|\sum_{j=1}^d x_j f(e_j)\| \leqslant \sum_{j=1}^d |x_j| \|f(e_j)\|,$$

pour tout $x \in E$. En posant $C = \sup_{j\in\{1,\dots,d\}} \|f(e_j)\|$, on trouve $\|f(x)\| \leqslant C\|x\|$, ce qui suffit. $\square$

Remarque 7.2.28 Ce théorème n'a pas d'équivalent si le corps de base $\mathbb{K}$ n'est pas complet. Par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on vérifie que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-espace vectoriel rationnel de dimension 2. Cependant, les normes $\|p + q\sqrt{2}\|_1 = |p| + |q|$ et $\|p + q\sqrt{2}\|_2 = |p + \sqrt{2}|$ ne sont pas équivalentes. En effet, en posant $x_j = (1 - \sqrt{2})^j$, on peut construire, en utilisant le binôme de Newton, deux suites $(a_j)_j$ et $(b_j)_j$ telles que $x_j = a_j - b_j\sqrt{2}$. La suite $(y_j)_j$ définie par $y_j = (1 + \sqrt{2})^j$ vérifie $y_j = a_j + b_j\sqrt{2}$. Ainsi $a_j = (x_j + y_j)/2$, x_j tend vers 0 et y_j vers l'infini lorsque j tend vers l'infini. Au total, $\|x_j\|_1$ tend vers l'infini et $\|x_j\|_2$ vers 0, ce qui implique que ces normes ne sont pas équivalentes.

8. On peut montrer, grâce au théorème précédent, que l'espace est complet ; il s'agit donc d'espaces de Banach.

Chapitre 8

Fonctions

8.1 Généralités

8.1.1 Définitions

Définition 8.1.1 Une *fonction* définie sur $A \subset \mathbb{R}^d$ est une application de A dans $\mathbb{C}$. Rappelons que la notation suivante est d'usage,

$$f : A \to \mathbb{C} \quad x \mapsto f(x).$$

On dit que la fonction est définie sur A et que A est l'*ensemble de définition* ou le *domaine de définition* de f ; cet ensemble est en général noté $\mathrm{dom}(f)$. On appelle x la *variable* et $f(x)$ la *valeur de f en x*. Si $B \subset A$, $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$ est l'*ensemble de variation* ou l'*ensemble des valeurs* de f sur B. Plus spécifiquement, on note $\mathrm{im}(f) = \{f(x) : x \in A\}$ l'image par f de A.

Remarquons que $\mathrm{im}(f) = f(\mathrm{dom}(f))$. Si, ent théorie, on accorde une signification différente aux notations f (qui représente la fonction) et $f(x)$ (qui représente la valeur de f en x, c'est-à-dire un nombre complexe), il est fréquent d'utiliser des expressions telles que « la fonction $f(x)$ ». Il s'agit là d'un abus consacré par l'usage.

Définition 8.1.2 Une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est *réelle* si $f(x)$ est réel pour tout $x \in A$. Une fonction réelle $f : A \to \mathbb{R}$ est *positive* (resp. *négative*) si $f(x) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) pour tout $x \in A$. Si on désire insister sur le fait qu'une fonction n'est pas réelle, on dit que f est une *fonction complexe* ou *à valeurs complexes*.

Exemples 8.1.3 Dans les chapitres précédents, nous avons déjà introduit quelques fonctions remarquables :
- $[\cdot]_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad x \mapsto [x]_j \ (j \in \{1, \ldots, d\}$,
- $|\cdot| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad x \mapsto |x|$,
- $\cdot^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x^+$,
- $\cdot^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x^-$.

L'application 0 est l'application

$$0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 0.$$

On utilise donc le symbole « 0 » pour désigner à la fois un nombre et une fonction. L'application 1, aussi notée $\chi_{\mathbb{R}^d}$ est l'application

$$1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1.$$

Enfin, si $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r^2\}$ $(r>0)$, l'application qui à tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2 \setminus C_r$ associe le nombre $1/(r^2-x^2-y^2)$ est une fonction ; on la note

$$\mathbb{R}^2 \setminus C_r \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{r^2-[x]_1^2-[x]_2^2}.$$

Bien souvent, on préfère parler simplement de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{r^2-x^2-y^2}.$$

Définition 8.1.4 Si f est une fonction complexe définie sur $A \subset \mathbb{R}^d$, le *graphe* de f est l'ensemble $\Gamma(f) = \{(x, \Re f(x), \Im f(x)) : x \in A\}$; c'est donc une partie de $\mathbb{R}^{d+2}$. Si f est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^d$, on appelle plutôt *graphe* de f l'ensemble $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$; c'est donc une partie de $\mathbb{R}^{d+1}$. Le graphe de f est parfois noté $G(f)$.

Il ne s'agit pas ici de confondre le graphe d'une fonction avec sa représentation géométrique appelée *graphique*. Cette représentation peut certes être des plus instructives dans l'étude d'une fonction mais présente plusieurs écueils. D'abord, il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles il est impossible de représenter le graphique. Il en est par exemple ainsi pour la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \{0,1\} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}.$$

De plus, il est impossible d'obtenir une représentation graphique d'une fonction réelle définie sur $A \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 3$ ou d'une fonction complexe définie sur $A \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$.

8.1.2 Opérations entre fonctions

Introduisons quelques relations de comparaison. Deux fonctions f et g définies sur A et B respectivement sont *égales* si $A = B$ et si, dans ce cas, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$. On écrit $f = g$. Si ce n'est pas le cas, on dit que f et g sont différents, ce que l'on note $f \neq g$.

Si les fonctions sont réelles, on peut introduire d'autres opérations de comparaison. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $A \subset \mathbb{R}^d$. La fonction f *majore* ou est *supérieure ou égale à* g si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in A$. On écrit $f \geqslant g$. De la même manière, f *minore* ou est *inférieure ou égale à* g si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A$. On écrit alors $f \leqslant g$. En particulier, f est *positif* (resp. *négatif*) si $f \geqslant 0$ (resp. $f \leqslant 0$).

Si f et g sont des fonctions définies sur A et B respectivement, alors g est la *restriction* de f sur B si $B \subset A$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in B$. Dans ce cas, g s'écrit $g = f|_B$. On dit également que f est un *prolongement* de g sur A.

Intéressons-nous maintenant aux opérations algébriques. Soient $J \in \mathbb{N}_0$ et $f, g, f_1, \ldots, f_J$ des fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}^d$. Soient aussi J nombres complexes $c_1, \ldots, c_J$. On définit les opérations algébriques élémentaires suivantes :

– la *combinaison linéaire* correspondant aux c_j et aux f_j $(1 \leqslant j \leqslant J)$, notée $\sum_{j=1}^J c_j f_j$, est la fonction définie en tout point x de A par

$$(\sum_{j=1}^J c_j f_j)(x) = \sum_{j=1}^J c_j f_j(x).$$

– Le *produit* des f_j, noté $\prod_{j=1}^J f_j$ est la fonction définie en tout point x de A par

$$(\prod_{j=1}^J f_j)(x) = \prod_{j=1}^J f_j(x).$$

– si $g(x)$ diffère de zéro en tout point $x \in A$, le *quotient* de f par g, noté f/g est la fonction définie en tout point x de A par

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Une *opération algébrique* est une opération entre fonctions qui peut être écrite explicitement au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques élémentaires entre ces fonctions. Un exemple est fourni par la fonction suivante, si $g(x) \neq 0$ et $f(x) \neq \prod_{j=1}^J f_j(x)$ pour tout $x \in A$, on peut définir la fonction

$$\frac{f}{g} - \frac{\sum_{j=1}^J c_j f_j}{f - \prod j = 1^J f_j}.$$

Un cas particulier du produit fini est le concept de *fonction séparée*. Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}^d$ est séparée s'il existe $J \in \mathbb{N}_0$ et J fonctions définies sur des parties adéquates telles que $f(x) = f_1(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k(1))}) \cdots f_J(x_{\pi(k(J-1)+1)}, \ldots, x_{\pi(k(J))})$ pour tout $x \in I$, avec $k(J) = d$ et où π est une permutation sur $\{1, \ldots, d\}$. Ainsi, une fonction qui ne dépend que d'une partie des composantes de la variable est une fonction séparée car elle peut être considérée comme étant le produit d'elle-même avec la fonction qui, aux autres composantes de la variable, associe la valeur 1. En particulier, une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}^d$ est à *variables séparées* s'il existe d fonctions $f_1, \ldots, f_d$ définies sur des parties adéquates de $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)$ pour tout x de I.

Nous allons maintenant considérer les fonctions composées. Soit $J \in \mathbb{N}_0$ et J fonctions réelles $f_1, \ldots, f_J$ définies sur une même partie A de $\mathbb{R}^d$. Bien sûr, pour tout $x \in A$, $(f_1(x), \ldots, f_J(x))$ est un point de $\mathbb{R}^J$. Si f est une fonction définie sur une partie B de $\mathbb{R}^J$ telle que $\{(f_1(x), \ldots, f_J(x)) : x \in A\} \subset B$, alors $f(f_1(x), \ldots, f_d(x))$ est un nombre complexe pour tout x de A. Sous ces conditions, la fonction

$$f(f_1, \ldots, f_d) : A \to \mathbb{C} \quad x \mapsto f(f_1(x), \ldots, f_d(x))$$

est une fonction, appelée *fonction composée* de f et des $f_1, \ldots, f_J$. C'est donc la composition $f \circ (f_1, \ldots, f_J)$ des applications $f : B \to \mathbb{C}$ et $(f_1, \ldots, f_J) : A \to B$. Par exemple, la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x + y^2$ est une fonction composée de la fonction $f(\cdot) = [\cdot]_1 + [\cdot]_2$ et des fonctions $f_1(\cdot) = [\cdot]_1$, $f_2(\cdot) = [\cdot]_2^2$ définies sur $\mathbb{R}^2$: $g = f(f_1, f_2)$. Une *fonction de fonction* est une fonction composée pour laquelle $J = 1$.

8.1.3 Fonctions associées

Étant donné une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ et une application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la composition $\varphi \circ f : A \to \mathbb{C}$ est une fonction sur A, souvent notée $\varphi(f)$. Cela étant, à une fonction $f : A \to \mathbb{C}$, on associe

– la *partie réelle* de f, à savoir $\Re \circ f$, que l'on note plutôt $\Re f$,

- la *partie imaginaire* de f, à savoir $\Im \circ f$, que l'on note plutôt $\Im f$,
- le *module* de f, à savoir $|\cdot| \circ f$, que l'on note plutôt $|f|$,
- la *fonction conjuguée* de f, à savoir $\bar{\cdot} \circ f$, que l'on note plutôt $\bar{f}$.

Il est clair que $\Re f$ et $\Im f$ sont des fonctions réelles, que $|f|$ est une fonction positive et que $\bar{f}$ est une fonction à valeurs complexes sur A. Nous avons bien sûr la décomposition fondamentale suivante : $f = \Re f + i\Im f$.

À une fonction réelle $f : A \to \mathbb{R}$, on associe

- la *partie positive* de f, à savoir $\cdot^+ \circ f$, que l'on note plutôt f^+,
- la *partie n'egative* de f, à savoir $\cdot^- \circ f$, que l'on note plutôt f^-.

Il s'agit bien sûr de deux fonctions positives sur A telles que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. Si f est une fonction à valeurs complexes définie sur A, la décomposition suivante permet d'expremier g au moyen d'un combinaison linéaire de fonctions positives,

$$f = (\Re f)^+ - (\Re f)^- + i(\Im f)^+ - i(\Im f)^-.$$

Soient $J \in \mathbb{N}_0$ et J fonctions réelles $f_1, \ldots, f_J$ définies sur une même partie A de $\mathbb{R}^d$. Leur *enveloppe supérieure* est la fonction

$$\max\{f_1, \ldots, f_J\} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \max\{f_1(x), \ldots, f_J(x)\}.$$

Leur *enveloppe inférieure* est la fonction

$$\min\{f_1, \ldots, f_J\} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \min\{f_1(x), \ldots, f_J(x)\}.$$

On a aussi les notations suivantes, $\max_{1\leqslant j\leqslant J} f_j$ pour l'enveloppe supérieure et $\min_{1\leqslant j\leqslant J} f_j$ pour l'enveloppe inférieure. On peut aussi remplacer max par sup et min par inf. On obtient immédiatement le théorème de structure suivant.

Proposition 8.1.5 *Soient $J \in \mathbb{N}_0$ et J fonctions réelles définies sur une même partie A de $\mathbb{R}^d$. Leurs enveloppes supérieure et inférieure peuvent être obtenues au moyen d'un nombre fini de combinaisons linéaires et de recours aux parties positives, aux parties négatives et aux modules de fonctions.*

Par exemple, pour $J = 2$, on a

$$\max\{f_1, f_2\} = f_1 + (f_2 - f_1)^+ = (f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)/2$$

et

$$\min\{f_1, f_2\} = f_1 - (f_2 - f_1)^- = (f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|)/2.$$

Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctions réelles définies sur une même partie A de $\mathbb{R}^d$ et si, pour tout $x \in A$, l'ensemble $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est majoré (resp. minoré), l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) de $\mathcal{F}$ est la fonction

$$\sup \mathcal{F} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

$$(\text{resp. } \inf \mathcal{F} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \inf\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}).$$

Il convient de remarquer que dans ce cas, il n'existe plus de théorème de structure.

8.1.4 Fonctions bornées

Définition 8.1.6 Une fonction f définie sur A est bornée sur $B \subset A$ si l'ensemble $f(B)$ est borné. Si f est borné sur A, on dit simplement que f est *borné*. Une fonction réelle f définie sur A est majorée (resp. minorée) sur $B \subset A$ si $f(B)$ est une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$. On définit alors la *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) de f sur B comme étant la borne supérieure (resp. inférieure) de cet ensemble. On la note $\sup_{x\in B} f(x)$ (resp. $\inf_{x\in B} f(x)$) ou parfois simplement $\sup_B f$ (resp. $\inf_B f$). Si $B = A$ on dit simplement que f est *majoré* (resp. *minoré*).

Remarquons qu'une fonction majorée ne réalise pas nécessairement sa borne supérieure. Plus précisément, si f est une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}^d$, le fait que f soit majoré sur une partie B de A n'implique pas l'existence d'un point x_0 de B tel que $\sup_{x\in B} f(x) = f(x_0)$. Cette remarque reste bien sûr valable pour la borne inférieure.

Exercice 8.1.7 Si f et g sont deux fonctions réelles et bornées sur une partie A de $\mathbb{R}^d$, établir que $f - g$ est borné sur A et que

$$|\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)| \leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|.$$

Suggestion. Le fait que, pour tout $x \in A$,

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \sup_{y\in A} |f(y)| + \sup_{y\in A} |g(y)|$$

implique évidemment que $f - g$ est borné. Établissons maintenant l'inégalité. Bien sûr, pour tout $x \in A$,

$$f(x) - g(x) \leqslant |f(x) - g(x)| \leqslant \sup_{y\in A} |f(y) - g(y)|$$

et donc $f(x) - \sup_{z\in A} g(z) \leqslant \sup_{y\in A} |f(y) - g(y)|$. De là, on tire

$$\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|.$$

Il suffit alors de permuter les rôles de f et g pour conclure.

Exercice 8.1.8 Soient A_1 et A_2 deux parties de $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$ respectivement. Si la fonction f définie sur $A = A_1 \times A_2$ est réelle et bornée, établir que les relations suivantes :
- $\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{y\in A_1} \sup_{z\in A_2} f(y,z)$,
- $\inf_{x\in A} f(x) = \inf_{y\in A_1} \inf_{z\in A_2} f(y,z)$,
- $\sup_{z\in A_2} \inf_{y\in A_1} f(y,z) \leqslant \inf_{y\in A_1} \sup_{z\in A_2} f(y,z)$

sont toujours vérifiées.
Suggestion. Établissons la relation relative aux bornes supérieures, la relation relative aux bornes inférieures s'établissant de même. Bien sûr, pour tout point (y,z) de $A_1 \times A_2$, on a $f(y,z) \leqslant \sup_{x\in A} f(x)$. De la sorte, pour tout $y \in A_1$, on a $\sup_{z\in A_2} f(y,z) \leqslant \sup_{x\in A} f(x)$ et donc $\sup_{y\in A_1} \sup_{z\in A_2} f(y,z) \leqslant \sup_{x\in A} f(x)$. Inversement, on a évidemment $f(x) \leqslant \sup_{y\in A_1} \sup_{z\in A_2} f(y,z)$, d'où l'autre majoration et par conséquent la conclusion.

Passons à l'inégalité. Pour tout $(y,z) \in A_1 \times A_2$, on a évidemment $f(y,z) \leqslant \sup_{z'\in A_2} f(y,z)$ et donc, pour tout $z \in A_2$, $\inf_{y\in A_1} f(y,z) \leqslant \inf_{y\in A_1} \sup_{z'\in A_2} f(y,z)$. La conclusion est alors directe.

Remarque 8.1.9 On ne peut améliorer l'inégalité dans l'exercice précédent. De fait, la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant y \\ 1 & \text{si } x < y \end{cases}$$

est telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) = 0$ et $\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y) = 1$.

8.1.5 Zéros d'une fonction

Définition 8.1.10 Un *zéro* d'une fonction f définie sur A est un point x de A tel que $f(x) = 0$. L'*ensemble d'annulation* de f est l'ensemble des zéros de f.

Définition 8.1.11 Si Z_f dénote l'ensemble d'annulation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$, un zéro de f est un *zéro identique* s'il appartient à Z_f°. Un zéro non-identique est un *zéro accidentel*. Le *support* de f, noté $[f]$ ou $\mathrm{supp}(f)$, est l'ensemble

$$[f] = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}.$$

On a donc $[f] = \mathbb{R}^d \setminus Z_f^\circ$. Dès lors, étant donné J fonctions $f_1, \ldots, f_J$ définies sur $\mathbb{R}^d$ ($J \in \mathbb{N}_0$) et J nombres complexes $c_1, \ldots, c_J$, on a

$$[\sum_{j=1}^{J} c_j f_j] \subset \cup_{j=1}^{J} c_j[f_j] \qquad \text{et} \qquad [\prod_{j=1}^{J} f_j] \subset \cap_{j=1}^{J} [f_j].$$

Il est facile de montrer que ces relations ne peuvent être améliorées. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon et $g(x) = 1$ si $x \leqslant 0$, $g(x) = 0$ sinon. On a bien sûr $[f] = [0, +\infty[$ et $[g] =]-\infty, 0]$, ainsi que $[f + g] = \mathbb{R}$, $[f - f] = \varnothing$ et $[fg] = \varnothing$.

8.1.6 Fonction caractéristique

Définition 8.1.12 La *fonction caractéristique* d'un ensemble A est la fonction χ_A telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon.

On vérifie de suite que $\chi_\varnothing = 0$, $\chi_{\mathbb{R}^d} = 1$, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ et $[\chi_A] = \bar{A}$. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^d$, on a $B \subset A$ si et seulement si $\chi_B \leqslant \chi_A$; de plus, $A = B$ si et seulement si $\chi_A = \chi_B$. Si $A_1, \ldots, A_J$ sont des parties de $\mathbb{R}^d$ ($J \in \mathbb{N}_0$),

$$\chi_{\cap_{j=1}^{J} A_j} = \prod_{j=1}^{J} \chi_{A_j} = \inf\{\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_J}\} \quad \text{et} \quad \chi_{\cup_{j=1}^{J} A_j} = \sup\{\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_J}\}.$$

8.2 Limite des valeurs d'une fonction

8.2.1 Définitions

Définition 8.2.1 Soient f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$, x_0 un point de $\bar{A}$ et l un nombre complexe. On dit que l *est la limite de* f *pour* x *tendant vers* x_0 ou f *converge vers* l *si* x *converge vers* x_0 (on dit aussi « tend » en lieu et place de « converge ») si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon$. On écrit alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $f(x) \to l$ si $x \to x_0$.

Cette notion peut être interprétée à l'aide des voisinages : on a $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si, pour tout voisinage U de l, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(V \cap A) \subset U$. La définition peut être étendue comme suit.

Définition 8.2.2 Soient f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$ et x_0 un point de $\bar{A}$. On dit que f *tend vers l'infini si x converge vers x_0*, ce que l'on note $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si, pour tout $N > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $|f(x)| \geqslant N$.

Bien que l'écriture $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ soit moins explicite, c'est cette dernière que nous utiliserons pour des raisons pratiques. En effet, nous pourrons ainsi regrouper les cas faisant intervenir l'infini avec les autres en n'utilisant qu'une seule notation.

Définition 8.2.3 Soient f une fonction définie sur une partie non-vide et non-bornée A de $\mathbb{R}^d$ et l un nombre complexe. On dit que f *tend vers l si x tend vers l'infini*, ce que l'on note $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon$.

De même, f *tend vers l'infini si x tend vers l'infini*, ce que l'on note $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$ ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si, pour tout $N > 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $|f(x)| \geqslant N$.

Tous ces cas peuvent être regroupés de la manière suivante :
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $|f(x)| \geqslant N$,
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon$,
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0$, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $|f(x)| \geqslant N$.

Dans la suite nous utiliserons les conventions suivantes.

Notation 8.2.4 Soit f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Désignons par ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné, et par γ un nombre complexe ou le symbole ∞. On écrit donc $\lim_{x\to\xi} f(x) = \gamma$ pour exprimer que f tend vers γ lorsque x tend vers ξ.

Dans le cas où la fonction f est réelle, différents cas peuvent être précisés. Ainsi, nous utiliserons les notations suivantes :
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $f(x) \geqslant N$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $f(x) \leqslant -N$,
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0$, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $f(x) \geqslant N$,
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0$, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $f(x) \leqslant -N$,

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $0 < f(x) - l < \varepsilon$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x - x_0| < \eta$, on a $0 < l - f(x) < \varepsilon$,
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $0 < f(x) - l < \varepsilon$,
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$ vérifiant l'inégalité $|x| \geqslant M$, on a $0 < l - f(x) < \varepsilon$.

On introduit aussi la notion de limite restreinte.

Définition 8.2.5 Soient f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$ et B une partie non-vide de A. Soit ξ un point de $\bar{B}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si B n'est pas borné. Soit enfin γ un nombre complexe ou le symbole ∞. Si f est une fonction réelle, γ peut aussi être un des symboles l^+, l^-, $+\infty$, $-\infty$, avec $l \in \mathbb{R}$. Alors *f tend vers γ si x tend vers ξ dans B* si la restriction de f à B tend vers γ si x tend vers ξ. On écrit

$$\lim_{\substack{x\to\xi \\ x\in B}} f(x) = l = \lim_{x\to\xi} f|_B(x).$$

Exercice 8.2.6 Établir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Suggestion. Puisque la fonction $f(x, y) = (x^3 + y^3)/(x^2 + y^2)$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, le point $(0, 0)$ appartient à l'adhérence de l'ensemble de définition de f. Cela étant, les majorations $|x|^3 \leqslant |(x, y)|^3$, $|y|^3 \leqslant |(x, y)|^3$ et $|(x, y)|^2 = x^2 + y^2$ permettent d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $|(x, y)| < \varepsilon/2$ est tel que $|(x^3 + y^3)/(x^2 + y^2)| \leqslant 2|(x, y)| < \varepsilon$.

8.2.2 Critère par les suites

La notion de limite d'une fonction peut être exprimée via les suites.

Théorème 8.2.7 (critère par les suites) *Soit f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant evisagée que si A n'est pas borné. Soit enfin γ un nombre complexe ou le symbole ∞. Alors, f tend vers γ lorsque x tend vers ξ si et seulement si pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui tend vers ξ, la suite $(f(x_j))_j$ tend vers γ.*

Preuve. Nous allons établir l'énoncé dans le cas où ξ est un point x_0 de $\bar{A}$ et γ un nombre complexe l, les autres cas se démontrant de manière analogue. Montrons que la condition est nécessaire. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $x \in A$ et $|x - x_0| < \eta$ impliquent $|f(x) - l| < \varepsilon$. Si la suite $(x_j)_j$ de A converge vers x_0, il existe J tel que $j \geqslant J$ implique $|x_j - x_0| < \eta$. Dès lors, pour tout $j \geqslant J$, on a $|f(x_j) - l| < \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

La condition est suffisante. Si ce n'est pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in A$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. Dès lors, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_j \in A$ tel que $|x_j - x_0| < 1/j$ et $|f(x_j) - l| \geqslant \varepsilon$. D'où une contradiction car la suite $(x_j)_j$ converge vers x_0, alors que la suite $(f(x_j))_j$ ne converge pas vers l. $\square$

Proposition 8.2.8 *Soit f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Alors,*

- *il existe une suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers ξ,*
- *si ξ est un élément de A et si f admet une limite si x tend vers ξ, alors cette limite est égale à $f(\xi)$,*
- *si, pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers ξ, la suite $(f(x_j))_j$ converge ou converge vers l'infini, alors toutes ces limites sont égales et f tend vers cette valeur si x tend vers ξ.*

Preuve. Le premier point est bien connu. Pour le deuxième point, il suffit de remarquer que la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = \xi$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ est une suite de A qui converge vers ξ et que $f(x_j) \to f(\xi)$. Enfin, si $(y_j)_j$ et $(z_j)_j$ sont deux suites de A qui convergent vers ξ telles que les suites $(f(y_j))_j$ et $(f(z_j))_j$ convergent vers γ_y et γ_z respectivement, la suite $(x_j)_j$ définie par $x_{2j-1} = y_j$ et $x_{2j} = z_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ converge vers ξ. Cela étant, la suite $(f(x_j))_j$ converge alors que les suites $(f(y_j))_j$ et $(f(z_j))_j$ en sont deux sous-suites, ce qui suffit. □

Le critère par les suites fournit des moyens commodes pour prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en ξ. Il suffit par exemple de trouver une suite $(x_j)_j$ qui converge vers ξ alors que la suite $(f(x_j))_j$ ne converge pas. Une autre méthode consiste à exhiber deux suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ qui convergent chacunes vers ξ alors que les suites $(f(x_j))_j$ et $(f(y_j))_j$ convergent vers des limites différentes. Ainsi, la fonction $\chi_{]0,+\infty[}$ n'admet pas de limite en zéro. Pour le voir, il suffit de considérer la suite $(x_j = (-1)^j/j)_j$.

Exercice 8.2.9 Établir que la fonction $xy/(x^2 + y^2)$ n'admet pas de limite à l'origine.
Suggestion. Puisque la fonction $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, le point $(0, 0)$ appartient à l'adhérence de l'ensemble de définition de f. Soient $(r_j)_j$ une suite qui converge vers zéro telle que $r_j \neq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et r un nombre strictement positif. La suite $((r_j, rr_j))_j$ est une suite de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui converge vers $(0, 0)$ telle que $f(r_j, rr_j) = r/(1+r^2)$. Pour conclure, il suffit de considérer deux valeurs différentes de r.

8.2.3 Critère par les limites restreintes

Proposition 8.2.10 *Soient f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$ et J ensembles $A_1, \ldots, A_J$ ($J \in \mathbb{N}_0$) formant une partition de A. Soient ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné et γ un nombre complexe ou le symbole ∞. Si, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$ tel que $\xi \in \bar{A}_j$ si $\xi \in \bar{A}$ ou tel que A_j n'est pas borné si $\xi = \infty$, la restriction de f à A_j tend vers γ si x tend vers ξ, alors f tend vers γ si x tend vers ξ.*

Preuve. Établissons le cas où ξ est un point de $\bar{A}$ (on peut supposer que $\xi \in \bar{A}_j$ $\forall j \in \{1, \ldots, J\}$) et γ est un nombre complexe l, les autres cas pouvant être démontrés de manière analogue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1, \ldots, \eta_J > 0$ tels que $x \in A_j$ et $|x - x_0| < \eta_j$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$ ($j \in \{1, \ldots, J\}$). En posant $\eta = \inf\{\eta_1, \ldots, \eta_J\}$, il vient $x \in A$ et $|x - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 8.2.11 *Soient f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point n'appartenant pas à A. Si γ est à la fois limite à gauche et à droite de f en x_0, alors f tend vers γ si x tend vers x_0.*

Preuve. De fait, les ensembles $A_1 = \{x \in A : x > x_0\}$ et $A_2 = \{x \in A : x < x_0\}$ constituent une partition de A et $\lim_{x\to x_0} f|_{A_1} = \lim_{x\to x_0} f|_{A_2} = \gamma$. □

Corollaire 8.2.12 *Soient f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point appartenant à A. Si $f(x_0)$ est à la fois limite à gauche et à droite de f en x_0, alors f tend vers $f(x_0)$ si x tend vers x_0.*

8.2.4 Critère de Cauchy

Si, en général, la fonction, son ensemble de définition et le symbole ξ sont donnés, il n'en est pas de même pour la limite γ. Le problème est comparable à celui posé par la convergence des suites.

Théorème 8.2.13 (Critère de Cauchy) *Soit f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *existe et est fini,*
- *pour toutes suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ de A qui convergent vers ξ, $|f(x_j) - f(y_j)| \to 0$,*
- *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de ξ tel que* $\sup_{x,y\in A\cap V} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Preuve. Le premier point implique le deuxième. Supposons que f tend vers $l \in \mathbb{C}$ si x tend vers ξ. Le critère par les suites implique $|f(x_j) - l| \to 0$ et $|f(y_j) - l| \to 0$, ce qui suffit. Le second point implique le troisième, sinon il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout voisinage V de ξ, $\sup_{x,y\in A\cap V} |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. En particulier, si $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont deux suites de A qui convergent vers ξ, on a $|f(x_j) - f(y_j)| \geqslant \varepsilon$, ce qui est absurde.

Montrons que le troisième point implique le premier. De fait, si la suite $(x_j)_j$ de A converge vers ξ, le troisième point implique que la suite $(f(x_j))_j$ est de Cauchy, donc converge. La conclusion découle alors de la proposition 8.2.8. □

8.2.5 Propriétés de la limite

Les propriétés de la limite des valeurs d'une fonction dépendent bien sûr des fonctions considérées et des propriétés des limites des suites convergentes.

Théorème 8.2.14 *Soient $J \in \mathbb{N}_0$, $f_1, \ldots, f_J$ des fonctions définies sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$ et J nombres complexes $c_1, \ldots, c_J$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, supposons que* $\lim_{x\to\xi} f_j(x) = \gamma_j$*, où γ_j est un nombre complexe ou le symbole ∞. On a les égalités suivantes :*
- *si γ_j est un nombre complexe pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, on a*

$$\lim_{x\to\xi} \sum_{j=1}^{J} c_j f_j(x) = \sum_{j=1}^{J} c_j \gamma_j,$$

- *si γ_j est un nombre complexe pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$ tel que $j \neq k$, si $\gamma_k = \infty$ et $c_k \neq 0$,*

$$\lim_{x\to\xi} \sum_{j=1}^{J} c_j f_j(x) = \infty,$$

– *si γ_j est un nombre complexe pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$, on a*

$$\lim_{x\to\xi}\prod_{j=1}^{J} f_j(x) = \prod_{j=1}^{J}\gamma_j,$$

– *si $\gamma_j \neq 0$ pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$ et s'il existe $k \in \{1,\ldots,J\}$ tel que $\gamma_k = \infty$,*

$$\lim_{x\to\xi}\prod_{j=1}^{J} f_j(x) = \infty,$$

– *si γ_1 est un nombre complexe, si $\gamma_2 \neq 0$ et si f_2 ne s'annule en aucun point de A, on a*

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} & \text{si } \gamma_2 \text{ est un nombre complexe} \\ 0 & \text{si } \gamma_2 = \infty \end{cases}.$$

Preuve. Cela résulte immédiatement des propriétés correspondantes des suites convergentes. □

Théorème 8.2.15 *Soient $J \in \mathbb{N}_0$, $f_1,\ldots,f_J$ des fonctions réelles définies sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$ et g une fonction définie sur une partie B de $\mathbb{R}^J$ contenant l'ensemble $\{(f_1(x),\ldots,f_J(x)) : x \in A\}$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$, supposons que $\lim_{x\to\xi} f_j(x) = \gamma_j$, où γ_j est un nombre réel ou le symbole ∞. Supposons en outre que*

$$\lim_{x\to(\gamma_1,\ldots,\gamma_J)} g(x) = \gamma$$

si γ_j est un nombre réel pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$, ou que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \gamma$ sinon. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to\xi} g(f_1(x),\ldots,f_J(x)) = \gamma.$$

Preuve. De fait, pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers ξ, $(f_1(x_j),\ldots,f_J(x_j))_j$ est une suite de B qui converge vers $(\gamma_1,\ldots,\gamma_J)$ ou l'infini, suivant que γ_j est réel pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$ ou non. □

Proposition 8.2.16 *Soit f est une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Supposons que $\lim_{x\to\xi} f(x) = \gamma$, où γ est un nombre complexe ou le symbole ∞. Si γ est un nombre complexe, on a*

– $\lim\limits_{x\to\xi} \bar{f}(x) = \bar{\gamma}$,
– $\lim\limits_{x\to\xi} |f|(x) = |\gamma|$,
– $\lim\limits_{x\to\xi} \Re f(x) = \Re\gamma$,
– $\lim\limits_{x\to\xi} \Im f(x) = \Im\gamma$.

Si γ est le symbole ∞,

– $\lim\limits_{x\to\xi} \bar{f}(x) = \infty$,
– $\lim\limits_{x\to\xi} |f|(x) = \infty$.

Proposition 8.2.17 *Soient $J \in \mathbb{N}_0$, $f_1, \ldots, f_J$ des fonctions réelles définies sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, supposons que $\lim_{x\to\xi} f_j(x) = \gamma_j$, où γ_j est un nombre réel. On a, si γ_1^+ et γ_1^- désignent respectivement la partie positive et négative de γ_1,*

- $\lim\limits_{x\to\xi} f_1^+(x) = \gamma_1^+$,
- $\lim\limits_{x\to\xi} f_1^-(x) = \gamma_1^-$,
- $\lim\limits_{x\to\xi} \sup\{f_1(x), \ldots, f_J(x)\} = \sup\{\gamma_1, \ldots, \gamma_J\}$,
- $\lim\limits_{x\to\xi} \inf\{f_1(x), \ldots, f_J(x)\} = \inf\{\gamma_1, \ldots, \gamma_J\}$.

Proposition 8.2.18 *Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Supposons que $\lim_{x\to\xi} f(x) = \gamma_1$ et $\lim_{x\to\xi} g(x) = \gamma_2$, où γ_1 et γ_2 sont des nombres complexes ou le symbole ∞. Si γ_1 diffère de γ_2, il existe un voisinage V de ξ tel que tout point x de $V \cap A$ vérifie $f(x) \neq g(x)$. En particulier, si γ_1 diffère du nombre complexe z, il existe un voisinage V de ξ tel que $z \notin f(V \cap A)$.*

Si f et g sont deux fonctions réelles et si $\gamma_1 < \gamma_2$, il existe un voisinage V de ξ tel que tout point x de $V \cap A$ vérifie $f(x) < g(x)$. En particulier, si $r \in \mathbb{R}$ vérifie $\gamma_1 < r$ (resp. $\gamma_1 > r$), il existe un voisinage V de ξ tel que $f(V \cap A) \subset]-\infty, r[$ (resp. $]r, +\infty[$).

Proposition 8.2.19 *Soient f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Soit ξ un point de $\bar{A}$ ou le symbole ∞, cette dernière possibilité n'étant envisagée que si A n'est pas borné. Supposons que $\lim_{x\to\xi} f(x) = \gamma$, où γ est un nombre complexe ou le symbole ∞. Si, pour tout voisinage V de ξ, il existe un point $x \in V \cap A$ tel que $f(x) = l$, alors $\gamma = l$.*

Si f est une fonction réelle et si, pour tout voisinage V de ξ, il existe un point $x \in V \cap A$ tel que $f(x) \leqslant r$, on a $\gamma \leqslant r$.

8.3 Fonctions continues

8.3.1 Définitions

Une fonction étant une application dans $\mathbb{C}$, rappelons la notion de continuité.

Définition 8.3.1 Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}^d$ est continue sur A si et seulement si, pour tout $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $y \in A$ vérfiant $|x - y| < \eta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Définition 8.3.2 Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}^d$ est continue sur A si et seulement si $x \in A$ et pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers x, on a $f(x_j) \to f(x)$.

Vu ce qui précède, la continuité d'une fonction peut être définie en utilisant la notion de limite. Cette définition peut paraître plus aisée à manipuler, vu qu'elle ne fait pas directement appel à la notion de convergence.

Définition 8.3.3 Soit f une fonction définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Cette fonction est *continue* en $x_0 \in A$ si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et vaut par conséquent $f(x_0)$. Un tel point est appelé un *point de continuité* de f. Si f n'est pas continu en x_0, on dit que f est *discontinu* en x_0 ; un tel point x_0 est appelé un *point de discontinuité* de f.

Définition 8.3.4 Une fonction f est *continue* sur A si elle définie sur A et continue en tout point de A. L'ensemble des fonctions continues sur A est noté $C^0(A)$, $C_0(A)$ ou simplement $C(A)$.

Rappelons aussi la définition suivante.

Définition 8.3.5 Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}^d$ est *uniformément continue* sur A si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $x, y \in A$ vérifiant $|x - y| < \eta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Toute fonction uniformément continue sur une partie de $\mathbb{R}^d$ est évidemment continue sur cette partie.

Remarque 8.3.6 La réciproque de cette proposition est fausse. Ainsi, la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1/x$$

est continue. Elle n'est cependant pas uniformément continue sur son domaine de définition. Il suffit de considére la suite $(x_j = 1/j)_j$, puisque $1/j \to 0$ et $|f(x_j) - f(x_{j+1})| = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

8.3.2 Exemples fondamentaux

Exemples 8.3.7 Les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^d$:
- la fonction 0,
- la fonction $\chi_{\mathbb{R}^d}$,
- la fonction $[\cdot]_j$, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$. De fait, on a $|[x]_j - [y]_j| \leqslant |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,
- la fonction $d(\cdot, A)$, où A est une partie non-vide de $\mathbb{R}^d$. Cela résulte de l'inégalité $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,
- en particulier, la fonction $|\cdot|$ est continue.

En fait, ces fonctions sont aussi des fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 8.3.8 Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}_0$ et p, q premiers entre eux. Cette fonction est continue en tout point irrationnel de $]0, 1[$ et discontinue en tout point rationnel de $]0, 1[$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit N le plus petit nombre entier strictement positif tel que $\varepsilon > 1/N$. Cela étant, il existe au plus $1 + 2 + \cdots + N$ nombres rationnels x de $]0, 1[$ tels que $f(x) < \varepsilon$. Dès lors, si x_0 est un nombre irrationnel de $]0, 1[$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r)$ ne contienne aucun de ces points rationnels donc tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in B(x_0, r)$, c'est-à-dire tout nombre x tel que $|x - x_0| < r$. La fonction f est donc continue en x_0. Maintenant, si x_0 est un point rationnel de $]0, 1[$, on a $f(x_0) > 0$ alors qu'il existe une suite $(x_j)_j$ de nombres irrationnels de $]0, 1[$ qui converge vers x_0, donc tel que $f(x_j) \to 0$. Cela étant, un tel point x_0 est un point de discontinuité de f.

8.3.3 Propriétés

Comme leur nom l'indique, les théorèmes de génération qui suivent permettent de construire de nouvelles fonctions continues à partir des exemples que nous avons déjà à notre disposition.

Théorème 8.3.9 (opérations algébriques) *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}^d$,*
- *toute combinaison linéaire de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A,*
- *tout produit fini de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A,*
- *le quotient de deux fonctions continues sur A est une fonction continue sur A, pour autant que le dénominateur ne s'annule en aucun point de A.*

Preuve. C'est une conséquence directe des résultats obtenus lors de l'étude de la limite d'une fonction en un point et de la définition de la continuité d'une fonction. □

Exercice 8.3.10 Établir que si F_1 et F_2 sont deux ensembles fermés non-vides et disjoints de $\mathbb{R}^d$, alors il existe[1] une fonction f continue sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $[0,1]$ telle que $f(F_1)=\{0\}$ et $f(F_2)=\{1\}$.
Suggestion. Nous savons que les fonctions $d(\cdot,F_1)$ et $d(\cdot,F_2)$ sont réelles, positives et continues sur $\mathbb{R}^d$. Puisque ces ensembles fermés sont disjoints, on a $d(x,F_1)+d(x,F_2)>0$ pour tout point x de $\mathbb{R}^d$. Cela étant, la fonction

$$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\quad x\mapsto\frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$$

convient.

Théorème 8.3.11 (fonctions composées) *Soient $J\in\mathbb{N}_0$ et J fonctions réelles $f_1,\ldots,f_J$ continues sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Si g une une fonction continue sur une partie de $\mathbb{R}^J$ contenant l'ensemble $\{(f_1(x),\ldots,f_J(x)) : x\in A\}$, alors la fonction $g(f_1,\ldots,f_J)$ est continue sur A.*

Le cas particulier $J=1$ donne le résutat relatif aux fonctions de fonction.

Corollaire 8.3.12 (fonction de fonction) *Si f est une fonction réelle continue sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$ et si g est une fonction continue sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant l'ensemble $f(A)$, alors la fonction $g\circ f=g(f)$ est continue sur A.*

Proposition 8.3.13 (fonctions associées) *Si f est une fonction continue sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$, alors les fonctions $\bar{f}$, $\Re f$, $\Im f$ et $|f|$ sont continues sur A. Si en outre f est réel, les fonctions f^+ et f^- sont continues sur A.*

Soient $J\in\mathbb{N}_0$ et J fonctions $f_1,\ldots,f_J$ réelles et continues sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$. Les fonctions $\sup\{f_1,\ldots,f_J\}$ et $\inf\{f_1,\ldots,f_J\}$ sont continues sur A.

Proposition 8.3.14 *Si f une fonction continue sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}^d$ et si B est une partie non-vide de A, alors la restriction $f|_B$ de f à B est une fonction continue sur B.*

8.3.4 Fonctions continues sur un compact

Rappelons que les fonctions continues sur un compact jouissent de propriétés fort intéressantes. Bien que des versions plus générales de ces résultats aient déjà été présentés, nous adaptons les démonstrations par soucis de complétude.

1. On dit que $\mathbb{R}^d$ est un espace normal. Puisque cet espace est aussi de Hausdorff, $\mathbb{R}^d$ est un espace T_4.

Lemme 8.3.15 *Si f est une fonction continue sur un compact non-vide K de $\mathbb{R}^d$, alors, de toute suite de $f(K)$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de $f(K)$.*

Preuve. Soit $(z_j)_j$ une suite de $f(K)$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un point $x_j \in K$ tel que $f(x_j) = z_j$. De la suite $(x_j)_j$ de K, on peut extraire une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ qui converge vers un point de K. Soit x ce point ; il suffit alors de remarquer que la suite $(z_{k(j)} = f(x_{k(j)}))_j$ est une sous-suite de la suite $(z_j)_j$ qui converge vers $f(x)$. □

Théorème 8.3.16 (image continue d'un compact) *Si f est une fonction continue sur un compact non-vide K de $\mathbb{R}^d$, alors son image $f(K)$ est compacte dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. Vu le lemme, l'ensemble $f(K)$ contient les limites de ses suites convergentes ; il est donc fermé. Le lemme implique également que $f(K)$ est borné. Sinon, $f(K)$ contiendrait une suite $(z_j)_j$ telle que $|z_j| \geqslant j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Or, on ne peut extraire d'une telle suite une sous-suite qui converge vers un élément de $f(K) \subset \mathbb{C}$. □

Théorème 8.3.17 (bornes atteintes) *Si f est une fonction continue sur un compact non-vide K de $\mathbb{R}^d$ et s'il existe une suite $(x_j)_j$ de K telle que la suite $(f(x_j))_j$ converge vers l'élément z de $\mathbb{C}$, alors, il existe un point x de K tel que $f(x) = z$.*

Si, en outre, la fonction f est réelle, alors il existe deux points x_m et x_M de K tels que $f(x_m) = \inf\{f(x) : x \in K\}$ et $f(x_M) = \sup\{f(x) : x \in K\}$.

Preuve. C'est une conséquence directe du lemme. Pour la première partie, il existe une sous-suite de la suite $(f(x_j))_j$ qui converge vers un point de $f(K)$, ce qui suffit. Pour la seconde partie, considérons le cas de la borne supérieure, le cas de la borne inférieur se traitant de même. Il existe une suite $(x_j)_j$ de K telle que $f(x_j) \to \sup\{f(x) : x \in K\}$. Or, il existe une sous-suite de la suite $(f(x_j))_j$ qui converge vers un point de $f(K)$, ce qui termine la démonstration. □

Théorème 8.3.18 (continuité uniforme) *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.*

Preuve. Soit f une fonction continue sur un compact K de $\mathbb{R}^d$. Si f n'est pas uniformément continu sur K, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_j, y_j \in K$ tels que $|x_j - y_j| < 1/j$ et $|f(x_j) - f(y_j)| \geqslant \varepsilon$. Cela étant, de la suite $(x_j)_j$ du compact K, on peut extraire une sous-suite $(x_{k(j)})_j$ qui converge vers un point de K ; soit x un tel point. Puisque

$$|y_{k(j)} - x| \leqslant |y_{k(j)} - x_{k(j)}| + |x_{k(j)} - x|,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, la sous-suite $(y_{k(j)})_j$ converge également vers x. Il vient dès lors

$$f(x_{k(j)}) - f(y_{k(j)}) = f(x_{k(j)}) - f(x) + f(x) - f(y_{k(j)}) \to 0,$$

ce qui est contradictoire. □

8.4 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$

Dans cette section, nous supposerons que f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$.

8.4.1 Limites à gauche et à droite

Si f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$, on peut utiliser le fait que $\mathbb{R}$ soit un champs et appliquer la définition 8.2.5 portant sur les limites restreintes pour définir les notions de limites à gauche et à droite.

Définition 8.4.1 Soit f une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et B l'un des ensembles $B =]x_0, +\infty[$ ou $B =]0, +\infty[$. On dit que « f tend vers γ si x tend vers x_0 *par la droite* » pour signifier que f tend vers γ si x tend vers x_0 dans B. On utilise les notations suivantes :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in]x_0, +\infty[}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in]0, +\infty[}} f(x).$$

De même, si $B =] - \infty, x_0[$ ou $B =] - \infty, 0[$, on introduit l'expression « f tend vers γ si x tend vers x_0 *par la gauche* » pour signifier que f tend vers γ si x tend vers x_0 dans B. On utilise les notations suivantes :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in]-\infty, x_0[}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in]-\infty, 0[}} f(x).$$

En recourant aux limites restreintes, on peut définir des notions de continuité partielles. Nous nous limiterons aux notions suivantes.

Définition 8.4.2 Une fonction f définie sur une partie non-vide A de $\mathbb{R}$ est *continue à gauche* en $x_0 \in A$ si $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$. Elle est *continue à droite* en $x_0 \in A$ si $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$.

Le critère des limites restreintes procure le résultat suivant : une fonction f définie sur une partie non-vide $A \subset \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in A$ si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

8.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires a d'importantes conséquences tant pratiques que théoriques.

Théorème 8.4.3 (valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction réelle et continue sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$, α étant soit un nombre réel, soit le symbole $-\infty$ et β étant soit un nombre réel, soit le symbole $+\infty$. Supposons que*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \gamma_1 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = \gamma_2,$$

γ_1 et γ_2 étant soit un nombre réel, soit l'un des deux symboles $-\infty$ ou $+\infty$ (si $\alpha = -\infty$, on pose $\alpha^+ = -\infty$ et si $\beta = +\infty$, on pose $\beta^- = +\infty$). Alors, si γ_1 diffère de γ_2, pour tout nombre réel y strictement compris entre γ_1 et γ_2, il existe $x_0 \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(x_0) = y$.

Preuve. Établissons ce résultat dans le cas $\gamma_1 < y < \gamma_2$, l'autre cas s'établit de même ou en appliquant le premier cas à la fonction $-f$. Considérons l'ensemble $E = \{x \in]\alpha, \beta[: f(x) \leqslant y\}$. D'une part, E n'est pas vide, sinon, on aurait $f(x) > y$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ et dès lors $\gamma_1 \geqslant y$. D'autre part, E est majoré et sa borne supérieure x_M est telle que

$x_M < \beta$. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite $(x_j)_j$ de E qui converge vers β et on aurait dès lors $\gamma_2 \leqslant y$, puisque $f(x_j) \to \gamma_2$.

Montrons maintenant que $f(x_M) = y$. D'une part, puisque x_M est la borne supérieure de E, il existe une suite $(x_j)_j$ de E qui converge vers x_M, ce qui implique $f(x_M) \leqslant y$. D'autre part, il existe également une suite $(y_j)_j$ de $]\alpha, \beta[$ qui converge en décroîssant strictement vers x_M, ce qui implique $f(x_M) \geqslant y$. Le point x_M est donc le point recherché. □

Une preuve bien plus simple repose sur la connexité.

Preuve. Les ensembles connexes de $\mathbb{R}$ étant les intervalles, l'image de $]\alpha, \beta[$ par l'application continue f est un intervalle de $\mathbb{R}$: $f(]\alpha, \beta[) = I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Dès lors, pour tout $y \in I$, il existe bien sûr un nombre $x \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(x) = y$. On conclut en remarquant que $\bar{I}$ contient γ_1 et γ_2. De fait, pour toute suite $(x_j)_j$ de $]\alpha, \beta[$ qui converge vers α^+ (resp. β^-), on a $f(x_j) \to \gamma_1$ (resp. γ_2), avec $f(x_j) \in I$. □

Corollaire 8.4.4 *Toute fonction réelle, continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est strictement monotone sur I.*

Preuve. Il suffit bien sûr d'établir que, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, une telle fonction f est strictement monotone sur $[a, b]$. Puisque f est injectif, on a soit $f(a) < f(b)$, soit $f(a) > f(b)$. Supposons avoir $f(a) < f(b)$, l'autre cas se traitant de même. Pour tout $x \in]a, b[$, montrons que $f(a) < f(x) < f(b)$. Si ce n'est pas le cas, on a soit $f(x) \leqslant f(a)$, soit $f(x) \geqslant f(b)$. Traitons le cas $f(x) \geqslant f(b)$, l'autre étant analogue. L'égalité ne peut avoir lieu, puisque f est injectif. Pour tout $y \in]f(b), f(x)[$, le théorème des valeurs intermédiaires implique alors l'existence de deux points $x_1 \in]a, x[$ et $x_2 \in]x, b[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Une telle égalité est impossible, puisque f est injectif. □

Preuve. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$ et montrons que f est strictement monotone sur $[a, b]$. Par injectivité, on a $f(a) \neq f(b)$; soit $J_{a,b}$ l'intervalle fermé d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. Posons $J = f([a, b])$; J est un intervalle contenant $J_{a,b}$. Si $J \neq J_{a,b}$, il existe un intervalle J' tel que $J' \subset J \setminus J_{a,b}$. L'une des extémités de J' s'écrit $f(x)$, avec $x \neq a, b$, l'autre extrémité étant soit $f(a)$, soit $f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $y \in J'$, il existe un point $x_1 \in]a, x[$ et un point $x_2 \in]x, b[$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce qui est absurde vu l'injectivité de f ; on a donc $J = J_{a,b}$. Il a été montré que $a < x < b$ implique $f(x) \in J^\circ_{a,b}$, c'est-à-dire soit $f(a) < f(x) < f(b)$, soit $f(b) < f(x) < f(a)$, ce qui termine la preuve. □

Exercice 8.4.5 Si $f \in C^0([0, 1])$ est tel que $f(0) = f(1)$, établir que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $x_j, y_j \in [0, 1]$ tels que $y_j - x_j = 1/j$ et $f(x_j) = f(y_j)$.
Suggestion. Soit $j \in \mathbb{N}_0$; posons $I = [0, 1 - 1/j]$ et introduisons la fonction

$$g : I \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x + 1/j) - f(x).$$

Il nous faut prouver qu'il existe $x \in I$ tel que $g(x) = 0$. Supposons qu'un tel point n'existe pas. Puisque g est réel et continu sur I, le théorème des valeurs intermédiaires implique alors que g est de signe constant sur I. On a alors

$$f(1) - f(0) = g(0) + g(1/j) + \cdots + g(\frac{j-1}{j}) \neq 0,$$

d'où une contradiction.

Remarque 8.4.6 Le résultat relatif à l'exercice 8.4.5 ne peut être généralisé. En effet, pour tout $r \in]0,1[\setminus \{1/j : j \in \mathbb{N}_0\}$, il existe une fonction réelle $f \in C^0([0,1])$ telle que $f(0) = f(1)$ et pour laquelle il n'existe pas de points $x, y \in [0,1]$ tels que $y - x = r$ et $f(x) = f(y)$. L'exemple suivant est dû à Halmos. La fonction réelle

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sin^2(\pi x/r)}{\sin^2(\pi/r)}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période r et telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Cela étant, la fonction $f(x) = g(x) - g(1)x$ est la fonction recherchée. S'il existe deux points $x, y \in [0,1]$ tels que $y - x = r$ et $f(x) = f(y)$, il vient, puisque $y = x + r$,

$$g(x) - g(1)x = g(x+r) - g(1)x - g(1)r,$$

ce qui implique $g(1)r = 0$ et donc $r = 0$.

Exercice 8.4.7 Établir que tout fonction réelle $f \in C^0([a,b])$ à valeurs dans $[a,b]$ possède un point fixe [2], i.e qu'il existe un point $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$.
Suggestion. Si f n'a pas de point fixe, la fonction $g(x) = f(x) - x$ est réelle, continue sur $[a,b]$ et n'a pas de zéro. De plus, on doit avoir $g(a) = f(a) - a > 0$. Vu le théorème des valeurs intermédiaires, g est une fonction à valeurs strictement positives. On a donc $f(b) - b > 0$, ce qui est impossible.

2. Il s'agit du théorème de Brouwer en dimension 1.

Chapitre 17

Applications de la dérivation

17.1 Recherche d'extrema

17.1.1 Extrema d'une fonction réelle

La notion de point stationnaire dans $\mathbb{R}^d$ est une généralisation naturelle de la définition obtenue dans $\mathbb{R}$

Définition 17.1.1 Soit f une fonction réelle définie sur une partie E de $\mathbb{R}^d$. Un point $x_0 \in E$ est un *maximum local* de f dans E s'il existe $r > 0$ tel que $f(x_0) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in E \cap B(x_0, r)$; $x_0 \in E$ est un *minimum local* de f dans E s'il existe $r > 0$ tel que $f(x_0) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in E \cap B(x_0, r)$. On omet parfois le mot local. Si x_0 est un maximum local ou un minimum local de f dans E, on dit que x_0 est un *extremum local* de f dans E. Naturellement l'extremum (maximum ou minimum) est un *extremum strict* si l'égalité précédente est stricte lorsque $x \neq x_0$. L'extremum (maximum ou minimum) est un *extremum global* si l'égalité précédente est vérifiée pour tout $r > 0$.

Une fonction peut ne pas avoir d'extremum (c'est le cas, par exemple, de la fonction identité), avoir un nombre fini d'extrema (c'est le cas de la fonction module) ou une infinité d'extrema (c'est le cas de la fonction cosinus).

On ne dispose pas de méthode générale permettant la recherche des extrema d'une fonction rélle sur une partie de $\mathbb{R}^d$. Dans le cas des fonctions dérivables sur un ouvert, on a cependant le résultat suivant.

Théorème 17.1.2 *Soit f une fonction réelle et dérivable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$; si $x \in \Omega$ est un extremum de f dans Ω, on a $[D_1 f]_x = \cdots = [D_d f]_x = 0$.*

Preuve. De fait, on a, pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$D_j f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}_*}} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h},$$

où, pour h suffisamment petit, le quotient change de signe avec h. La limite doit donc être nulle. $\square$

Ce résultat n'admet cependant pas de réciproque. Par exemple, la fonction

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{d} x_j^3$$

appartient bien entendu à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et l'origine est le seul point de $\mathbb{R}^d$ où toutes ses dérivées (d'ordre un) s'annulent. On constate directement que 0 n'est pas un extremum de f dans $\mathbb{R}^d$: pour $x = he_1$ ($h \in \mathbb{R}$), $f(x) = h^3$ change de signe avec h.

Définition 17.1.3 Soit f une fonction réelle et dérivable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$; un *point stationnaire* de f dans Ω est un point de Ω pour lequel toutes les dérivées d'ordre un de f s'annulent.

On peut donc énoncer le résultat précédent de la manière équivalente suivante : les extrema (éventuels) d'une fonction réelle et dérivable sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ sont des points stationnaires de cette fonction dans cet ouvert.

17.1.2 Recherche des extrema d'une fonction

La méthode naturelle de recherche des extrema d'une fonction f réelle et dérivable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ consiste à déterminer les points stationnaires de f dans Ω, puis à examiner chacun de ces points stationnaires. Le première partie consiste donc en la résolution du système d'équations (généralement non-linéaires) $D_j f = 0$ ($j \in \{1, \ldots, d\}$), ce qui peut être un problème ardu. La seconde partie peut elle être allégée au moyen des résultats qui vont suivre.

Soit f une fonction réelle et dérivable sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Avant d'appliquer les résultats qui vont suivre, il est toujours utile de vérifier s'il n'existe pas un argument trivial permettant d'affirmer que le point stationnaire considéré n'est pas un extremum de f. Ainsi, la fonction réelle $|\cdot|^2$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et admet l'origine pour seul point stationnaire. On vérifie directement que ce point est un minimum strict absolu de la fonction sur $\mathbb{R}^d$.

Rappelons que si f est une fonction réelle appartenant à $C^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, la matrice hessienne associée à f en $x \in \Omega$ est la matrice $H_f(x)$ de dimension $d \times d$ dont l'élément (i,j) est donné par $[D_i D_j f]_x$. Il s'agit d'une matrice réelle et symétrique, donc hermitienne. Cela étant, pour tout point stationnaire x de f dans Ω et tout élément h de $\mathbb{R}^d$ tel que le segment $\{x + th : t \in [0,1]\}$ soit inclus dans Ω, la formule de Taylor affirme l'existence d'un point $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}\langle H_f(x+\theta h)h, h\rangle.$$

Ces remarques sont à la base du résultat suivant.

Théorème 17.1.4 *Si $x_0 \in \Omega$ est un point stationnaire de la fonction réelle $f \in C^2(\Omega)$, alors*

- *si $H_f(x_0)$ est défini positif (resp. défini négatif), alors x_0 est un minimum (resp. maximum) strict local de f dans Ω,*
- *s'il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$ et $H_f(x)$ soit semi-défini positif (resp. semi-défini négatif) pour tout point $x \in B(x_0, r)$, alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local de f dans Ω,*
- *si $H_f(x_0)$ est semi-défini positif (resp. semi-défini négatif) et s'il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$ et $H_f(x)$ soit défini positif (resp. défini négatif) pour tout point $x \neq x_0$ de la boule $B(x_0, r)$, alors x_0 est un minimum (resp. maximum) strict local de f dans Ω,*
- *si $H_f(x_0)$ est indéfini, alors x_0 n'est pas un extremum de f dans Ω.*

Preuve. Rappelons d'abord qu'une matrice hermitienne est définie positive (resp. définie négative) si et seulement si les déterminants des sous matrices carrées de dimension $j \times j$ ($j \in \{1, \dots, d\}$) du coin supérieur gauche sont tous strictement positifs (resp. strictement négatifs si j est impair, strictement positif sinon). Supposons que $H_f(x_0)$ est défini positif, le cas défini négatif se traitant de même. Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, la sous-matrice $H_j(x_0)$ de dimension $j \times j$ du coin supérieur gauche de $H_f(x_0)$ est donc de déterminant strictement positif. Par continuité, il existe alors $r_j > 0$ tel que $|x - x_0| < r_j$ implique $\mathrm{dtm}(H_j(x)) > 0$. En posant $r = \min\{r_1, \dots, r_d\}$, on obtient $|x - x_0| < r$ implique $\mathrm{dtm}(H_j(x)) > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et donc que $H_f(x)$ est défini positif. D'où la conclusion par la formule de Taylor, car si H est une matrice hermitienne définie positive, on a $\langle Hh, h\rangle > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Les deux cas suivants résultent de la formule de Taylor et de la valeur de $\langle Hh, h\rangle$ si H est une matrice hermitienne définie positive, négative, semi-positive ou semi-négative.

Enfin, si $H_f(x_0)$ est indéfinie, elle admet une valeur propre λ_p strictement positive et une valeur propre λ_n strictement négative. Comme toute valeur propre admet au moins un vecteur propre, il existe $h_p, h_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tels que $H_f(x_0)h_p = \lambda_p h_p$ et $H_f(x_0)h_n = \lambda_n h_n$. On a donc $\langle H_f(x_0)h_p, h_p\rangle > 0$ et $\langle H_f(x_0)h_n, h_n\rangle < 0$. Cela étant, la fomule de Taylor implique les relations suivantes,

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{f(x_0 + rh_p) - f(x_0)}{r^2} = \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h_p, h_p\rangle > 0$$

et

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{f(x_0 + rh_n) - f(x_0)}{r^2} = \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h_n, h_n\rangle < 0,$$

ce qui implique, pour $r > 0$ suffisamment petit,

$$f(x_0 + rh_n) < f(x_0) < f(x_0 + rh_p).$$

On conclut aussitôt. □

Exemple 17.1.5 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^4 - y^4$. Cette fonction est réelle, appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et l'origine est le seul point stationnaire. La matrice hermitienne

$$H_f(x, y) = 12 \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & -y^2 \end{pmatrix}$$

est semi-définie en $(0, 0)$, mais il n'existe pas de boule centrée à l'origine telle que $H_f(x, y)$ soit semi-défini positif (ou semi-défini négatif) en tout point de la boule. Cependant, on vérifie directement que l'origine n'est pas un extremum local de f dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 17.1.6 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2$; elle est réelle et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ses points stationnaires sont les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire l'origine et les points de la circonférence unité centrée à l'origine. La matrice $H_f(x, y)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 4(x^2 + y^2 - 1) + 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + y^2 - 1) + 8y^2 \end{pmatrix}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On vérifie directement que $4(x^2+y^2-1)$ et $12(x^2+y^2)-4$ sont les valeurs propres associées à cette matrice. Puisque $H_f(0,0)$ est défini négatif, l'origine est un maximum local strict de f dans $\mathbb{R}^2$. En tout point (x,y) de la circonférence $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$, $H_f(x,y)$ est semi-défini positif mais ne reste semi-défini positif sur aucune boule de centre (x,y). Cependant, puisque la fonction f ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 0 et puisqu'elle s'annule en les points de la circonférence centrée à l'origine et de rayon unité, tout point de cette circonférence est un minimum global.

Exercice 17.1.7 Rechercher les extrema de la fonction

$$f : \Omega =]0,+\infty[^4 \to \mathbb{R} \quad (w,x,y,z) \mapsto wxyz + 1/w + 1/x + 1/y + 1/z.$$

Suggestion. On vérifie directement que cette fonction est réelle et appartient à $C^\infty(\Omega)$. Ses points stationnaires dans Ω sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} xyz - w^{-2} = 0 \\ wyz - x^{-2} = 0 \\ wxz - y^{-2} = 0 \\ wxy - z^{-2} = 0 \end{array}\right.$$

qui appartiennent à Ω. Puisque dans Ω, w, x, y et z diffèrent de zéro, il s'agit des solutions du système

$$wxyz = \frac{1}{w} = \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

qui appartiennent à Ω. On en déduit de suite que $(1,1,1,1)$ est le seul point stationnaire de f dans Ω. On a

$$H_f(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et un calcul aisé montre que 1 est une valeur propre de multiplicité 3 et 5 une valeur propre de multiplicité 1 de cette matrice. On obtient donc que $(1,1,1,1)$ est un minimum local (il est même global) strict de f dans Ω.

Exercice 17.1.8 Rechercher les extrema de la fonction

$$f : \Omega =]0,\pi[^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y).$$

Suggestion. Il est immédiat que f est réel sur Ω et appartient à $C^\infty(\Omega)$. Ses points stationnaires dans Ω sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(x) + \cos(x+y) = 0 \\ \cos(y) + \cos(x+y) = 0 \end{array}\right.$$

qui appartiennent à Ω. Ce système étant équivalent à

$$\left\{\begin{array}{c} \cos(x) + \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x) = \cos(y) \end{array}\right.$$

et puisque la fonction cos est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, il s'agit des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{r} x = y \\ \cos(x)+\cos(2x)=0 \end{array}\right.$$

qui appartiennent à Ω. Les solutions de $2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0$ étant $\cos(x)=-1$ et $\cos(x)=1/2$, on en déduit que $(\pi/3,\pi/3)$ est le seul point stationnaire de f dans Ω. La matrice

$$H_f(\pi/3,\pi/3)=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

étant définie négative, $(\pi/3,\pi/3)$ est un maximum strict local (il est même global) de f dans Ω.

17.2 Opérateurs de dérivation

17.2.1 Définitions générales

La notion d'opérateur de dérivation sur un ouvert de l'espace euclidien est une simple généralisation du cas unidimensionnel.

Définition 17.2.1 Un *opérateur de dérivation* sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ est une application définie sur $C^p(U)$ pour un entier strictement positif p qui à une fonction $f\in C^p(U)$ associe une fonction faisant (éventuellement) intervenir un nombre fini de fonctions du type $D^\alpha f$, avec $\alpha\in\mathbb{N}^d$ et $|\alpha|\leqslant p$.

L'*ordre* d'un opérateur F sur U est le plus petit entier strictement positif p tel que F est défini pour toute fonction de $C^p(U)$.

Exemples 17.2.2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$,
- la loi qui à $f\in C^1(U)$ associe $(D_1f)^2+\cdots(D_df)^2$ est un opérateur de dérivation sur U, noté $\sum_{j=1}^d(D_j\cdot)^2$,
- la loi qui à $f\in C^2(U)$ associe $D_1^2f+\cdots D_d^2f$ est un opérateur de dérivation sur U, noté $\sum_{j=1}^d D_j^2$.

Définissons à présent les opérations de base relatives à ces opérateurs.

Définition 17.2.3 Deux opérateurs de dérivation F_1 et F_2 sur un même ouvert U sont *égaux* s'ils ont le même ordre p et si on a $F_1f=F_2f$ pour tout $f\in C^p(U)$.

Définition 17.2.4 L'*opérateur de dérivation conjugué* de F est l'opérateur de dérivation $\bar F$ défini par l'identité $\bar F f=\overline{F\bar f}$, ou de manière équivalente par $\bar F\bar f=\overline{Ff}$. L'opérateur de dérivation F est un *opérateur de dérivation réel* si $F=\bar F$.

L'ordre de l'opérateur de dérivation $\bar F$ est celui de F.

Définition 17.2.5 Étant donné $J\in\mathbb{N}_0$, J opérateurs de dérivation $F_1,\ldots,F_J$ sur U et J nombres complexes $c_1,\ldots,c_J$, la *combinaison linéaire* $\sum_{j=1}^J c_jF_j$ est l'opérateur de dérivation sur U défini par

$$(\sum_{j=1}^J c_jF_j)f=\sum_{j=1}^J c_j(F_jf).$$