Chapitre 1

L'intégrale de Darboux

1.1 Définition et premières propriétés

1.1.1 Intégrales de fonctions étagées

Définition 1.1.1 Un découpage d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est la donnée d'une partition de I en un nombre fini d'intervalles I_j ($j \in \{1, \dots, J\}$). On le note $(I_j)_1^J$ ou simplement (I_j).

Définition 1.1.2 Une fonction φ définie sur un intervalle I est dite étagée s'il existe un découpage (I_j) de I tel que φ soit constant sur chacun des intervalles I_j. Un tel découpage est dit adaptée à φ.

Si I est un intervalle borné d'extrémités a et b avec $a < b$, il revient au même d'exiger l'existence de $J+1$ nombres $x_1, \dots, x_{J+1}$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{J+1} = b. \tag{1.1}$$

tels que φ soit constant sur chaque intervalle $]x_j, x_{j+1}[$ $(1 \leqslant j \leqslant J)$. Les valeurs que la fonction peut prendre en les points x_j n'a pas d'importance dans le calcul des intégrales telles que nous les définirons. Si $(]x_j, x_{j+1}[)$ $(1 \leqslant j \leqslant J)$ définit un découpage adapté à la fonction étagée φ, alors on a

$$\varphi = \sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)\chi_{]x_j, x_{j+1}[},$$

où ξ_j est un point quelconque de $]x_j, x_{j+1}[$ $(1 \leqslant j \leqslant J)$; les nombres $\varphi(\xi_j)$ doivent simplement être considérés comme des constantes.

Définition 1.1.3 La donnée de points vérifiant (1.1) s'appelle une subdivision de l'intervalle I. Une subdivision $y_1, \dots, y_{K+1}$ du même intervalle est dite plus fine que (1.1) lorsque les points x_j figurent parmi les points y_k, *i.e.* si pour tout $j \in \{2, \dots, J\}$, il existe $k \in \{2, \dots, K\}$ tel que $y_k = x_j$. Un découpage $(I_j)_1^J$ est plus fin que le découpage $(I'_j)_1^{J'}$ du même intervalle si pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, il existe $j' \in \{1, \dots, J'\}$ tel que $I_j \subset I'_{j'}$.

Un découpage (I_j) est donc plus fin que le découpage (I'_j) s'il est obtenu en subdivisant des intervalles de (I'_j).

Si I est un intervalle borné d'extrémités a et b avec $a < b$, on désigne par $|I|$ la longueur de l'intervalle : $|I| = b - a$; on pose aussi $|\varnothing| = 0$.

Lemme 1.1.4 *Soit φ une fonction étagée sur un intervalle borné I ; si $(I_j)_1^J$ et $(I'_j)_1^{J'}$ sont deux découpages de I adapté à φ, alors on a*

$$\sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{J'} \varphi(\xi'_j)|I'_j|,$$

où ξ_j (resp. ξ'_j) est un point de I_j° (resp. $I_j'^\circ$) pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$ (resp. $j \in \{1, \ldots, J'\}$).

Démonstration. Soit (I''_j) le découpage formé des intervalles $I_j \cap I'_{j'}$. On a

$$|I_j| = \sum_{j'=1}^{J'} |I_j \cap I'_{j'}| \quad \text{et} \quad |I'_{j'}| = \sum_{j=1}^{J} |I_j \cap I'_{j'}|,$$

les intervalles de la forme $I_j \cap I'_{j'}$ étant deux à deux disjoints. On a donc

$$\sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{J} \sum_{j'=1}^{J'} \varphi(\xi_j)|I_j \cap I'_{j'}|$$

et de même

$$\sum_{j'=1}^{J'} \varphi(\xi'_{j'})|I'_{j'}| = \sum_{j'=1}^{J'} \sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi'_{j'})|I_j \cap I'_{j'}|.$$

Si $I_j \cap I'_{j'}$ est non vide, alors φ est constant à la fois sur I_j et sur $I'_{j'}$. Puisque $I_j \cap I'_{j'}$ est une partie de I_j et $I'_{j'}$, φ est constant sur cet intervalle et on a $\varphi(\xi_j) = \varphi(\xi'_{j'})$. □

Si $x_1, \ldots x_{J+1}$ forment une subdivision de I, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, désignons par ξ_j un point quelconque de $]x_j, x_{j+1}[$. Autrement dit, si (I_j) est un découpage de I, on suppose avoir $\xi_j \in I_j^\circ$.

Définition 1.1.5 Si φ est une fonction étagée sur l'intervalle borné I, son intégrale de Darboux sur I est la quantité

$$m(\varphi) = \sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)\, |]x_j, x_{j+1}[| = \sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

Ainsi, si $(I_j)_1^J$ est une partition adaptée à φ, on a

$$m(\varphi) = \sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)|I_j|. \tag{1.2}$$

Passons aux propriétés de l'intégrale.

Proposition 1.1.6 *Si φ et ψ sont deux fonction étagées sur l'intervalle borné I, alors*

$$m(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha m(\varphi) + \beta m(\psi),$$

pour toutes constantes α et β.

Démonstration. Si φ est égal à y sur un sous-intervalle J de I, il est évident que $\alpha\varphi$ est égal à αy sur cet intervalle. De la, on trouve directement

$$m(\alpha\varphi) = \sum_{j=1}^{J} \alpha\varphi(\xi_j)|I_j| = \alpha \sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)|I_j| = \alpha m(\varphi),$$

pour tout découpage (I_j) de I adapté à φ.

Si (I_j) est un découpage adapté à φ et (I'_j) un découpage adapté à ψ, considérons le découpage formé par les intervalles du type $I_j \cap I'_{j'}$. La fonction $\varphi + \psi$ est constante sur chacun de ces intervalles ; il s'agit donc d'une fonction étagée. Si φ est égal à y_j sur I_j et si ψ est égal à $y'_{j'}$ sur $I'_{j'}$, $\varphi + \psi$ est égal à $y_j + y'_{j'}$ sur $I_j \cap I'_{j'}$. De là, il vient

$$\begin{aligned} m(\varphi+\psi) &= \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'} (y_j + y'_{j'})|I_j \cap I'_{j'}| \\ &= \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'} y_j|I_j \cap I'_{j'}| + \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'} y'_{j'}|I_j \cap I'_{j'}| \\ &= \sum_{j=1}^{J} y_j|I_j| + \sum_{j'=1}^{J'} y'_{j'}|I'_{j'}| = m(\varphi) + m(\psi), \end{aligned}$$

comme il devait être montré. □

Proposition 1.1.7 *Soit φ et ψ deux fonctions étagées sur I. alors $\varphi \leqslant \psi$ implique $m(\varphi) \leqslant m(\psi)$; en particulier, $\varphi \geqslant 0$ implique $m(\varphi) \geqslant 0$.*

Démonstration. Si φ est une fonction étagée positive sur I, tous les termes du membre de droite de (1.2) sont positifs, ce qui permet d'affirmer que l'on a $m(\varphi) \geqslant 0$. Pour le cas général, si $\varphi \leqslant \psi$ sur I, on a $\psi - \varphi \geqslant 0$ et il vient

$$0 \leqslant m(\psi - \varphi) = m(\psi) + m(-\varphi) = m(\psi) - m(\varphi),$$

ce qui permet de conclure. □

Pour une fonction f bornée sur un intervalle I, posons $\|f\|_I = \sup |f(I)|$. L'intégrale jouit des propriétés suivantes.

Proposition 1.1.8 *Si φ est une fonction étagée sur I, on a*

$$|m(\varphi)| \leqslant m(|\varphi|) \leqslant \|\varphi\|_I\,|I|.$$

Démonstration. Bien sûr, si φ est une fonction étagée sur I, il en va de même pour $|\varphi|$ et si φ est égal à y sur le sous-intervalle J de I, $|\varphi|$ est égal à $|y|$ sur le même ensemble. Il vient alors directement

$$|m(\varphi)| = \Big|\sum_{j=1}^{J} \varphi(\xi_j)|I_j|\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{J} |\varphi(\xi_j)|\,|I_j| = m(|\varphi|),$$

pour tout découpage (I_j) adapté à φ. De là, on tire

$$\sum_{j=1}^{J} |\varphi(\xi_j)|\,|I_j| \leqslant \|\varphi\|_I \sum_{j=1}^{J} |I_j| = \|\varphi\|_I\,|I|,$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 1.1.9 On pourrait envisager une théorie plus générale en remplaçant la longueur $|I|$ d'un intervalle par une quantité $\mu(I)$ telle que

— $\mu(\varnothing) = 0$,

— $\mu(I) \geqslant 0$ pour tout intervalle I,

— si (I_j) est un découpage de l'intervalle I, alors $\mu(I) = \sum_{j=1}^{J} \mu(I_j)$.

On peut par exemple choisir une fonction F croissante sur $\mathbb{R}$ et poser, pour tout intervalle I d'extrémités a et b avec $a < b$, $\mu(I) = F(b) - F(a)$. La fonction μ joue le rôle de mesure d'un intervalle.

1.1.2 Intégrales supérieure et inférieure

Nous supposerons ici que I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction réelle bornée sur I, il existe deux fonctions étagées sur φ et ψ telles que l'on ait $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ (on peut même prendre des fonctions constantes). Pour de telles fonctions, on a $m(\varphi) \leqslant m(\psi)$ et toute extension raisonnable de m à f devrait vérifier $m(\varphi) \leqslant m(f) \leqslant m(\psi)$. Il est donc naturel de poser

$$m_*(f) = \sup\{m(\varphi) : \varphi \text{ est une fonction étagée vérifiant } \varphi \leqslant f\}$$

et

$$m^*(f) = \inf\{m(\psi) : \psi \text{ est une fonction étagée vérifiant } f \leqslant \psi\}.$$

On a nécessairement $m_*(f) \leqslant m^*(f)$, car tout nombre $m(\varphi)$ minore $m(\psi)$. On a même

$$-\|f\|_I\,|I| \leqslant m_*(f) \leqslant m^*(f) \leqslant \|f\|_I\,|I|.$$

Les applications m_* et m^* ne sont cependant pas linéaires. On a toutefois des résultats plus faibles.

Lemme 1.1.10 *Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, alors* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ *et* $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Démonstration. Soit x et y des éléments de A et B respectivement. On a bien sûr $x + y \leqslant \sup A + \sup B$ et donc $\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$. Soit maintenant y un élément de B ; pour tout $x \in A$, on a $x + y \leqslant \sup(A + B)$, donc $x \leqslant \sup(A + B) - y$. De là, on tire $\sup A \leqslant \sup(A + B) - y$ et donc $y \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$. Il vient dès lors $\sup B \leqslant \sup(A + B) - \sup A$, ce qui permet de conclure.

La démarche est similaire pour la seconde égalité de l'énoncé. □

Proposition 1.1.11 *On a toujours*

$$m_*(f + g) \geqslant m_*(f) + m_*(g) \quad \text{et} \quad m^*(f + g) \leqslant m^*(f) + m^*(g).$$

Démonstration. Si φ est une fonction étagée qui minore f et ψ une fonction étagée qui minore g, alors $\varphi+\psi$ minore $f+g$. Il vient donc

$$m(\varphi)+m(\psi)=m(\varphi+\psi)\leqslant m_*(f+g).$$

Ainsi, avec des notations évidentes, on a

$$\sup\{m(\varphi)+m(\psi)\}\leqslant m_*(f+g)$$

et donc

$$m_*(f)+m_*(g)=\sup m(\varphi)+\sup m(\psi)\leqslant m_*(f+g).$$

L'autre partie de l'énoncé s'obtient de même, en renversant les signes d'inégalité. □

Proposition 1.1.12 *Pour toute constante c positive, on a*

$$m_*(cf)=cm_*(f)\quad et\quad m^*(cf)=cm^*(f).$$

Pour toute constante c négative, on a

$$m_*(cf)=cm^*(f)\quad et\quad m^*(cf)=cm_*(f).$$

Démonstration. De fait, pour c strictement positif, toute fonction étagée minorant cf s'écrit $c\varphi$, où φ est une fonction étagée minorant f. Pour la seconde partie de l'énoncée, il suffit de prouver que l'on a $m_*(-f)=-m^*(f)$. On conclut alors en remarquant que les fonctions étagées qui minorent $-f$ sont l'opposé de celles qui majorent f □

1.1.3 Premières propriétés de l'intégrale

Définition 1.1.13 Une fonction f réelle et bornée sur un intervalle I est intégrable (sur cet intervalle) au sens de Darboux lorsque $m_*(f)=m^*(f)$. Cette valeur $m(f)$ est appelée l'intégrale de Darboux de f.

Si φ et ψ sont deux fonctions étagées telles que $\varphi\leqslant f\leqslant\psi$, on a $m(\varphi)\leqslant m(f)\leqslant m(\psi)$. En prenant $\varphi=\inf f(I)$ et $\psi=\sup f(I)$, on obtient

$$\inf f(I)\leqslant\frac{m(f)}{|I|}\leqslant\sup f(I).$$

Si f est une fonction à valeurs complexes, f est intégrable si $\Re f$ et $\Im f$ le sont et on pose dans ce cas $m(f)=m(\Re f)+im(\Im f)$. Il n'est pas difficile de construire des fonctions non-intégrables. Soit par exemple la fonction $f=\chi_{I\cap\mathbb{Q}}$. Si φ est une fonction étagée minorant $\mathbb{R}$, tout sous-intervalle non réduit à un singleton contenant un nombre irrationnel, on doit avoir $\varphi\leqslant 0\chi_I$. De même, si ψ est une fonction étagée qui majore f, elle doit vérifier $\psi\geqslant\chi_I$. On obtient ainsi $m_*(f)=0<m^*(f)=|I|$.

Avant de passer aux propriétés de l'intégrale, introduisons un lemme.

Lemme 1.1.14 *Si g et h sont deux fonctions réelles vérifiant $g\leqslant h$, on a $h^\pm-g^\pm\leqslant h-g$.*

Démonstration. Il suffit de considérer tous les cas de figure possibles. □

Proposition 1.1.15 *Soit f est une fonction réelle. Si f est intégrable, alors f^+ et f^- le sont.*

Démonstration. Soit φ et ψ deux fonctions étagées telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$. On a $\varphi^+ \leqslant f^+ \leqslant \psi^+$ et donc

$$m(\psi^+) - m(\varphi^+) = m(\psi^+ - \varphi^+) \leqslant m(\psi - \varphi) = m(\psi) - m(\varphi).$$

Puisque f est intégable, $m(\psi) - m(\varphi)$ peut être rendu arbitrairement petit, ce qui implique que f^+ est intégrable. Le raisonnement est similaire pour f^-. □

Proposition 1.1.16 *Toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est intégrable ; plus précisément, si f et g sont deux fonctions intégrables et si c et d sont deux constantes, on a*

$$m(cf + dg) = cm(f) + dm(g).$$

Démonstration. On peut bien entendu se contenter du cas réel. Soit donc f et g deux fonctions réelles, bornées et intégrables sur I. On obtient directement

$$m_*(f+g) \geqslant m_*(f) + m_*(g) = m^*(f) + m^*(g) \geqslant m^*(f+g) \geqslant m_*(f+g),$$

ce qui permet d'affirmer que $f+g$ est intégrable. Si c est une constante positive, on a

$$m_*(cf) = cm_*(f) = cm^*(f) = m^*(cf).$$

Si c est négatif, il vient

$$m_*(cf) = cm^*(f) = cm_*(f) = m^*(cf),$$

ce qui permet de conclure. □

Proposition 1.1.17 *Si f est une fonction bornée et intégrable, il en va de même pour $|f|$.*

Démonstration. Supposons d'abord f réel. Les fonctions f^+ et f^- étant intégrables, il en va de même pour $f^+ + f^-$, ce qui suffit.

Passons maintenant au cas général. Soit φ_r, φ_i, ψ_r et ψ_i des fonctions étagées telles que

$$0 \leqslant \varphi_r \leqslant |\Re f| \leqslant \psi_r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \varphi_i \leqslant |\Im f| \leqslant \psi_i.$$

Posons $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ et $\psi = \psi_r + i\psi_i$; on vérifie de suite que les fonctions $|\varphi|$ et $|\psi|$ sont des fonctions étagées qui satisfont

$$|\varphi| \leqslant |f| \leqslant |\psi|.$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} m(|\psi|) - m(|\varphi|) &= m(|\psi| - |\varphi|) \leqslant m(|\psi - \varphi|) \leqslant m(|\Re(\psi - \varphi)| + |\Im(\psi - \varphi)|) \\ &= m(\psi_r - \varphi_r) + m(\psi_i - \varphi_i), \end{aligned}$$

ce qui suffit, le membre de droite pouvant être rendu arbitrairement petit. □

Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $f = \chi_{I \cap \mathbb{Q}} - \chi_{I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ n'est pas intégrable, alors que $|f| = \chi_I$ l'est.

Proposition 1.1.18 *L'intégrale d'une fonction intégrable positive est positive.*

Corollaire 1.1.19 *Si f et g sont deux fonctions réelles et intégrables telles que $f \leqslant g$, alors $m(f) \leqslant m(g)$.*

Proposition 1.1.20 *Si f est une fonction intégrable sur I, on a*

$$|m(f)| \leqslant m(|f|) \leqslant \|f\|_I |I| = \sup |f(I)|\,|I|.$$

Démonstration. On a toujours $|f| \leqslant \|f\|_I \chi_I$, donc $m(|f|) \leqslant \|f\|_I\,|I|$. Supposons maintenant f réel ; puisqu'on a

$$-\|f\|_I \chi_I \leqslant -|f| \leqslant f \leqslant |f| \leqslant \|f\|_I \chi_I,$$

il vient $|m(f)| \leqslant m(|f|)$.

Passons maintenant on cas où f est complexe. Si c est une constante, posons $g = \Re(\bar{c}f)$. Par ce qu'il vient d'être montré, on a $|m(g)| \leqslant m(|g|)$ et donc

$$|\Re m(\bar{c}f)| = |\Re\big(\bar{c}m(f)\big)| \leqslant m\big(|\Re(\bar{c}f)|\big) \leqslant m(|\bar{c}f|) = |c|m(|f|).$$

Pour $c = m(f)$, on a $\bar{c}m(f) = |m(f)|^2$ et donc

$$|m(f)|^2 \leqslant |m(f)|m(|f|).$$

Si c est non nul, en simplifiant par $|c|$, on obtient

$$|m(f)| \leqslant m(|f|),$$

comme désiré. □

Proposition 1.1.21 *Si f et g sont deux fonctions réelles et intégrables, alors* $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *sont également intégrables.*

Démonstration. C'est évident puisque l'on a $\max(f, g) = f + (g - f)^+$ et $\min(f, g) = g - (g - f)^+$. □

Proposition 1.1.22 *Si f est une fonction intégrable, continue et positive telle que $m(f) = 0$, alors $f = 0$.*

Démonstration. S'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0 > 0$, alors il existe un intervalle non vide $J \subset I$ pour lequel $x \in J$ implique $f(x) > y_0/2$. La fonction étagée $\varphi = (y_0/2)\chi_J$ vérifie $\varphi \leqslant f$, ce qui implique $m(f) \geqslant m(\varphi) = (y_0/2)|J| > 0$. □

Montrons enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 1.1.23 *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un intervalle compact I, alors $f\bar{g}$ est intégrable sur cet intervalle et on a*

$$|m(f\bar{g})|^2 \leqslant m(|f|^2)m(|g|^2).$$

Démonstration. En considérant la décomposition canonique

$$f = (\Re f)^+ - (\Re f)^- + i(\Im f)^+ - i(\Im f)^-,$$

on peut supposer avoir affaire à des fonctions positives. Soit $C > 0$ une constante majorant f et g. Pour $\varepsilon > 0$, soit φ, φ', ψ et ψ' des fonction étagées majorées par C telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, $\varphi' \leqslant g \leqslant \psi'$ et vérifiant $m(\psi) - m(\varphi) < \varepsilon/(2C)$, $m(\psi') - m(\varphi') < \varepsilon/(2C)$. Bien entendu, on a $\varphi\varphi' \leqslant fg \leqslant \psi\psi'$ et

$$\psi\psi' - \varphi\varphi' = \psi'(\psi - \varphi) + \varphi(\psi' - \varphi') \leqslant C(\psi - \varphi) + C(\psi' - \varphi'),$$

ce qui implique

$$m(\psi\psi') - m(\varphi\varphi') < \varepsilon.$$

Considérons les égalités

$$\begin{aligned} m(|f + zg|^2) = m\big((f + zg)(\overline{f + zg})\big) &= m(|f|^2) + m(f\overline{zg}) + m(\bar{f}zg) + m(|z|^2|g|^2) \\ &= a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c, \end{aligned} \tag{1.3}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $a = m(|g|^2)$, $b = m(f\bar{g})$ et $c = m(|f|^2)$. Si $a \neq 0$, en prenant $z = -b/a$ dans l'égalité (1.3), on obtient

$$0 \leqslant \frac{ab\bar{b}}{a^2} - \frac{b\bar{b}}{a} - \frac{b\bar{b}}{a} + c = \frac{ac - b\bar{b}}{a},$$

ce qui implique $ac \geqslant b\bar{b}$. Si $a = 0$, posons $z = tz_0$ avec $t \in \mathbb{R}$ dans l'expression (1.3) pour obtenir

$$(b\bar{z}_0 + \bar{b}z_0)t \geqslant -c,$$

ce qui implique $b\bar{z}_0 + \bar{b}z_0 = 0$, donc $b = 0$ (pour $z_0 = \bar{b}$). Dans tous les cas, l'inégalité de l'énoncé est bien vérifiée. □

En conséquence, si f est intégrable sur I et si J est un sous-intervalle de I, la fonction $f\chi_J$ est encore intégrable sur I. En multipliant par χ_J les fonctions étagées encadrant f, il est évident que l'intégrale de f sur J est l'intégrale de $f\chi_J$ sur I. Si (I_j) est un découpage de I, l'intégrale de f sur I est donc la somme des intégrales de f sur les intervalles I_j.

Corollaire 1.1.24 *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un intervalle compact, alors on a $\sqrt{m(|f+g|^2)} \leqslant \sqrt{m(|f|^2)} + \sqrt{m(|g|^2)}$.*

Démonstration. Il vient

$$\begin{aligned} m\big((f+g)(\overline{f+g})\big) &= m(|f|^2) + m(f\bar{g}) + m(\bar{f}g) + m(|g|^2) \\ &= m(|f|^2) + 2\Re m(f\bar{g}) + m(|g|^2) \\ &\leqslant m(|f|^2) + 2|m(f\bar{g})| + m(|g|^2) \\ &\leqslant m(|f|^2) + 2\sqrt{m(|f|^2)}\sqrt{m(|g|^2)} + m(|g|^2), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$m(|f+g|^2) \leqslant \left(\sqrt{m(|f|^2)} + \sqrt{m(|g|^2)}\right)^2,$$

comme il devait être montré. □

Si f est une fonction intégrable sur un intervalle compact, on pose $|f|_2 = \sqrt{m(|f|^2)}$. Le résultat précédent montre que l'on a $|f+g|_2 \leqslant |f|_2 + |g|_2$. On pose également $|f|_1 = m(|f|)$. Ici ausi, l'inégalité $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ implique $|f+g|_1 \leqslant |f|_1 + |g|_1$. Bien entendu, pour toute constante c, on a $|cf|_2 = |c|\,|f|_2$ et $|cf|_1 = |c|\,|f|_1$.

1.1.4 Sommes de Riemann

L'idée d'approximer l'aire sous la courbe par des rectangles (on peut faire remonter ce type de démarche à Archimède) est clairement exprimée dans la définition de l'intégrale de Darboux.

Soit f une fonction réelle et intégrable sur un intervalle I. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit φ et ψ deux fonctions étagées telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et

$$m(f) - m(\varphi) < \varepsilon/2, \quad m(\psi) - m(f) < \varepsilon/2. \tag{1.4}$$

Soit encore $(I_j)_1^J$ un découpage de I plus fin que ceux adaptés à φ et ψ et pour chaque $j \in \{1, \dots J\}$, ξ_j un élément de I_j. La fonction $\theta = \sum_{j=1}^J f(\xi_j)\chi_{I_j}$ est une fonction étagée telle que $\varphi \leqslant \theta \leqslant \psi$. Les inégalités (1.4) implique alors

$$|m(f) - m(\theta)| \leqslant m(\psi) - m(\varphi) \leqslant \big(m(\psi) - m(f)\big) + \big(m(f) - m(\varphi)\big) < \varepsilon.$$

Autrement dit, on a

$$\Big|m(f) - \sum_{j=1}^J f(\xi_j)|I_j|\Big| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Cette inégalité reste bien sûr valable pour tout découpage plus fin. Le cas complexe s'obtient naturellement en considérant les parties réelle et imaginaire de la fonction. Si l'on considère la subdivision

$$a = x_1 < \cdots < x_{J+1} = b$$

correspondante de I, la relation précédente peut se réécrire

$$|m(f) - \sum_{j=1}^J f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)| < \varepsilon,$$

ce qui explique les notations

$$m(f) = \int_I f\,dx = \int_I f(x)dx = \int_a^b f\,dx,$$

si a et b désignent les extrémités de l'intervalle I, avec $a < b$. Une notation plus rigoureuse serait celle-ci :

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx.$$

Nous adopterons cependant les conventions usuelles. On a $|f|_1 = \int_I |f|\,dx$ et $|f|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2 dx}$.

On peut obtenir mieux que la majoration (1.5). Si f est une fonction réelle et bornée sur l'intervalle compact I, pour tout découpage $\mathcal{P} = (]x_j, x_{j+1}[)_1^J$ de I, on peut associer les fonctions étagées $\varphi_{\mathcal{P}}$ et $\psi_{\mathcal{P}}$ définies par

$$\varphi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^J \inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)\,\chi_{[x_j,x_{j+1}[} \quad \text{et} \quad \psi_{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^J \sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)\,\chi_{[x_j,x_{j+1}[}.$$

On a bien sûr $\varphi_{\mathcal{P}} \leqslant f \leqslant \psi_{\mathcal{P}}$ (sauf éventuellement en x_{J+1}, mais cela n'affecte pas la valeur de l'intégrale) et d'une certaine manière, ces fonctions sont les plus proches de f pour un découpage donné.

Proposition 1.1.25 *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle compact I et bornée sur cet intervalle, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout découpage $\mathcal{P} = (]x_j, x_{j+1}[)$ de I satisfaisant* $\max_j(x_{j+1} - x_j) < \delta$, *on ait*

$$m_*(f) - m(\varphi_{\mathcal{P}}) < \varepsilon \quad et \quad m(\psi_{\mathcal{P}}) - m^*(f) < \varepsilon.$$

Démonstration. Considérons la première inégalité, l'autre s'obtenant de même. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit φ_ε une fonction étagée sur I telle que $\varphi_\varepsilon \leqslant f$ et $m_*(f) - m(\varphi_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Considérons un découpage $(I_j^{(\varepsilon)})_1^N$ de I adapté à φ_ε, posons

$$\Delta = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) + 1$$

et montrons que

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2N\Delta}$$

convient. Soit donc $\mathcal{P} = (I_j)_1^J$ un découpage de I tel que $\max_j |I_j| < \delta$ et soit $\mathcal{P}'$ le découpage formé des intervalles $I_j \cap I_{j'}^{(\varepsilon)}$ ($j \in \{1, \ldots, J\}$, $j' \in \{1, \ldots, N\}$). On a $\varphi_\varepsilon \leqslant \varphi_{\mathcal{P}'} \leqslant f$ et donc $m_*(f) < m(\varphi_{\mathcal{P}'}) + \varepsilon/2$. Pour obtenir $\mathcal{P}'$, on a ajouté au plus $N-1$ points aux intervalles $I_1, \ldots, I_J$. On modifie ainsi $N-1$ intervalles de la forme I_j au plus, ce qui donne

$$m(\varphi_{\mathcal{P}'}) - m(\varphi_{\mathcal{P}}) \leqslant (N-1)\Delta \frac{\varepsilon}{2N\Delta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Au final, il vient

$$m_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} < m(\varphi_{\mathcal{P}'}) < m(\varphi_{\mathcal{P}}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui suffit. □

Théorème 1.1.26 *Si f est une fonction réelle, bornée et intégrable sur l'intervalle compact I, alors si $(]x_j^{(\delta)}, x_{j+1}^{(\delta)}[)_1^{J(\delta)}$ représente un découpage de I tel que*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant J(\delta)} x_{j+1} - x_j < \delta,$$

on a

$$\lim_{\delta \to 0^+} \Big| \int_I f\, dx - \sum_{j=1}^{J(\delta)} f(\xi_j)(x_{j+1}^{(\delta)} - x_j^{(\delta)}) \Big| = 0.$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute partition $\mathcal{P}$ de la forme $(]x_j^{(\delta)}, x_{j+1}^{(\delta)}[)_1^{J(\delta)}$ vérifie

$$m(\psi_{\mathcal{P}}) - m(\varphi_{\mathcal{P}}) < m(f) + \frac{\varepsilon}{2} - m(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De là, on trouve

$$\Big| m(f) - \sum_{j=1}^{J(\delta)} f(\xi_j)(x_{j+1}^{(\delta)} - x_j^{(\delta)}) \Big| \leqslant m(\psi_{\mathcal{P}}) - m(\varphi_{\mathcal{P}}) < \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □

Exemple 1.1.27 Considérons la fonction identité $x \mapsto x$ définie sur l'intervalle $[a,b]$. Pour $J \in \mathbb{N}_*$, posons

$$x_j = a + (j-1)\frac{b-a}{J} \quad \text{et} \quad \xi_j = a + (j - \frac{1}{2})\frac{b-a}{J}.$$

Les intervalles $(]x_j, x_{j+1}[)_1^J$ forment un découpage de $[a,b]$ et ξ_j est un élément de $]x_j, x_{j+1}[$ pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \xi_j(x_{j+1} - x_j) &= \frac{b-a}{J}(Ja + \frac{b-a}{J}\sum_{j=1}^{J} j - \frac{J}{2}\frac{b-a}{J}) \\
&= \frac{b-a}{J}(Ja + \frac{b-a}{J}\frac{J(J+1)}{2} - \frac{b-a}{2}) \\
&= \frac{b-a}{J}(Ja + (J+1)\frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2}) \\
&= \frac{b-a}{J}J\frac{b+a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Si d'autres valeurs de ξ_j avait été choisies, il aurait fallu recourir à la limite pour J tendant vers l'infini.

Exemple 1.1.28 Considérons la fonction identité $x \mapsto x^2$ définie sur l'intervalle $[a,b]$. Pour $J \in \mathbb{N}_*$, posons

$$x_j = a + (j-1)\frac{b-a}{J} \quad \text{et} \quad \xi_j = a + j\frac{b-a}{J}.$$

Les intervalles $(]x_j, x_{j+1}[)_1^J$ forment un découpage de $[a,b]$ et ξ_j est un élément de $]x_j, x_{j+1}]$ (la fonction est continue) pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \xi_j^2(x_{j+1} - x_j) &= \frac{b-a}{J}\sum_{j=1}^{J}(a + j\frac{b-a}{J})^2 \\
&= \frac{b-a}{J}(\sum_{j=1}^{J} a^2 + (\frac{b-a}{J})^2\sum_{j=1}^{J} j^2 + 2a\frac{b-a}{J}\sum_{j=1}^{J} j) \\
&= \frac{b-a}{J}(Ja^2 + \frac{(b-a)^2}{J^2}\frac{(2J+1)(J+1)J}{6} + 2a\frac{b-a}{J}\frac{(J+1)J}{2}) \\
&= (b-a)a^2 + (b-a)^3\frac{(2J+1)(J+1)}{6J^2} + (b-a)^2 a\frac{J+1}{J}.
\end{aligned}$$

La limite pour J tendant vers $+\infty$ donne

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} \xi_j^2(x_{j+1} - x_j) &= (b-a)a^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 + (b-a)^2 a \\
&= a^2b - a^3 + \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + a^2b - ab^2 + ab^2 + a^3 - 2a^2b
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

1.1.5 Fonctions intégrables sur un compact

Bien que la thórie de l'intégration puisse porter sur des cas bien plus généraux, nous allons nous restreindre au cas des fonctions continues ou monotones. Il ne nous semble pas opportun de développer une théorie plus complète, alors que l'intégration au sens de Lebesgue est à la fois plus générale et plus puissante.

Théorème 1.1.29 *Tout fonction continue sur un intervalle compact est intégrable sur cet intervalle.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur l'intervalle compact I. On peut bien entendu se restreindre au cas réel. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tel que pour tous points x et y de I vérifiant $|x - y| < \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/|I|$. Soit $(I_j)_1^J$ un découpage de I tel que $|I_j| < \delta$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et posons

$$\varphi = \sum_{j=1}^{J} \inf f(I_j)\chi_{I_j}, \quad \psi = \sum_{j=1}^{J} \sup f(I_j)\chi_{I_j}.$$

On a $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et

$$m(\psi) - m(\varphi) = m(\psi - \varphi) \leqslant \sum_{j=1}^{J} \frac{\varepsilon}{|I|}|I_j| = \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □

Théorème 1.1.30 *Toute fonction monotone sur un intervalle compact est intégrable sur cet intervalle.*

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que f soit une fonction croissante sur l'intervalle compact I. Si $(]x_j, x_{j+1}[)_1^J$ est un découpage de I, posons

$$\varphi = \sum_{j=1}^{J} f(x_j)\chi_{]x_j,x_{j+1}]} \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{j=1}^{J} f(x_{j+1})\chi_{]x_j,x_{j+1}]}$$

On a bien entendu $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et

$$\begin{aligned} m(\psi) - m(\varphi) &= \sum_{j=1}^{J} \big(f(x_{j+1}) - f(x_j)\big)(x_{j+1} - x_j) \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant J}(x_{j+1} - x_j)\big(f(b) - f(a)\big). \end{aligned}$$

Puisque la quantité $x_{j+1} - x_j$ peut être rendue arbitrairement petite quelque soit j en choisissant un découpage approprié, on peut conclure. □

Remarque 1.1.31 La preuve qui vient d'être donnée pour les fonctions monotones se transpose sans difficulté aux fonctions admettant des limites finies à gauche et à droite. De telles fonctions sont dites réglées.

1.1.6 Intégrale orientée

Nous avons montré que si f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités a, c avec $a < c$, on a toujours

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx,$$

pour tout $b \in]a, c[$. Dès lors, il vient

$$\int_b^c f\,dx = \int_a^c f\,dx - \int_a^b f\,dx,$$

et on peut convenir d'écrire

$$\int_b^c f\,dx = \int_b^a f\,dx + \int_a^c f\,dx,$$

en adoptant la convention naturelle suivante,

$$\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx.$$

Lemme 1.1.32 *Si f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités a et b avec $a < b$ et sur l'intervalle d'extrémités b et c avec $b < c$, alors f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités a et c.*

Démonstration. On peut sans restriction supposer la fonction réelle. Désignons par I l'intervalle d'extrémités a, b et par J l'intervalle d'extrémités b, c. Pour $\varepsilon > 0$, soit φ et ψ deux fonctions étagées sur I telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur I et $m(\psi) - m(\varphi) < \varepsilon/2$. Soit aussi φ' et ψ' deux fonctions étagées sur J telles que $\varphi' \leqslant f \leqslant \psi'$ sur J et $m(\psi') - m(\varphi') < \varepsilon/2$. Posons $\varphi'' = \varphi + \varphi'$ et $\psi'' = \psi + \psi'$. En modifiant éventuellement la valeur de ces fonctions en b, on a $\varphi'' \leqslant f \leqslant \psi''$ sur $I \cup J$ et

$$m(\psi'') - m(\varphi'') = m(\psi') - m(\varphi') + m(\psi) - m(\varphi) < \varepsilon,$$

ce qui suffit. $\square$

Proposition 1.1.33 *Si $x_1, \ldots, x_{J+1}$ sont des nombres réels et si f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités x_j, x_{j+1} pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, alors f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités x_1, x_{J+1} et*

$$\int_{x_1}^{x_{J+1}} f\,dx = \sum_{j=1}^{J} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f\,dx.$$

Démonstration. Il suffit bien entendu de prouver le résultat pour $J = 3$. Désignons par $I_{j,k}$ l'intervalle d'extrémités x_j et x_k. Par convention, on a

$$\int_{x_j}^{x_k} f\,dx = \int_{I_{j,k}} \operatorname{sign}(x_k - x_j)\, f\,dx.$$

Il suffit alors de noter que l'on a

$$\operatorname{sign}(x_3 - x_1)\, f\chi_{I_{1,3}} = \operatorname{sign}(x_2 - x_1)\, f\chi_{I_{1,2}} + \operatorname{sign}(x_3 - x_2)\, f\chi_{I_{2,3}}$$

pour conclure. $\square$

1.2 Propriétés de l'intégrale

1.2.1 Théorème fondamental du calcul intégral

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème d'existence d'une primitive, parfois appelé théorème fondamental.

Théorème 1.2.1 *Si f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors, pour tout $x_0 \in I$, la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ vérifie $DF = f$.*

Démonstration. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, la fonction f est continue sur l'intervalle compact d'extrémités x_0, x, donc intégrable sur cet ensemble ; la fonction F est par conséquent bien définie et vaut 0 en x_0. Soit $x \in I$ et h un nombre réel non nul suffisament petit. On a

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\Big) - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t) - f(x)dt. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point y de I vérifiant $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dès lors, pour $|h| < \delta$, on a

$$|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t) - f(x)dt| \leqslant \frac{1}{|h|}\Big|\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|dt\Big| < \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque 1.2.2 Ce résultat se généralise aux fonctions réglées.

Ce résultat a des conséquences très importantes pour le calcul intégral. Donnons déjà le résultat suivant, appelé théorème de variation des primitives.

Théorème 1.2.3 *Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f, i.e. une fonction dérivable telle que $DF = f$ sur I, alors*

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a),$$

pour tous a, b appartenant à I.

Démonstration. De fait, soit $x_0 \in I$; on a

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{x_0} f\,dx + \int_{x_0}^b f\,dx = F(b) - F(a),$$

ce qui suffit. □

En particulier, remarquons que si f appartient à $C^1(I)$, alors

$$\int_a^b Df\,dx = f(b) - f(a),$$

pour tous points a, b de I. En subdivisant l'intervalle $[a, b]$ en $J+1$ points $a = x_1 < \cdots < x_{J+1} = b$, on remarque que l'on a

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{J} f(x_{j+1}) - f(x_j) = \sum_{j=1}^{J} Df(\xi_j)(x_{j+1} - x_j),$$

pour des points ξ_j, avec $\xi_j \in]x_j, x_{j+1}[$. Cette dernière expression est évidemment une somme de Riemann.

Exercice 1.2.4 Calculer

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\prod_{k=1}^{j}(1+\frac{k}{j})}$$

Suggestion. On a

$$\ln\left(\sqrt[j]{\prod_{k=1}^{j}(1+\frac{k}{j})}\right) = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\ln(1+\frac{k}{j}).$$

Considérons le découpage de $[0, 1]$ en les ensembles $I_k =](k-1)/j, k/j]$ avec $k \in \{1, \ldots, j\}$ et pour tout indice k fixé, soit $\xi_k = k/j$. La fonction $\ln(1+x)$ étant continue sur l'intervalle compact $[0, 1]$, il vient de suite

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\ln(1+\frac{k}{j}) &= \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}[\ln(1+x)]_{x=\xi_k}|I_k| \\ &= \int_0^1 \ln(1+x)dx = \ln(4/e). \end{aligned}$$

On en conclut, vu la continuité de la fonction exponentielle, que la limite cherchée vaut $4/e$.

1.2.2 Intégration par parties

Le théorème d'intégration par parties permet bien souvent de simplifier les calculs.

Proposition 1.2.5 *Si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, alors pour tous points a et b de I, on a*

$$\int_a^b g\, Df\, dx = [fg]_a^b - \int_a^b f\, Dg\, dx.$$

Démonstration. On remarque de suite que fg est une primitive de la fonction $fDg + gDf$. Il vient donc

$$\int_a^b fDg\, dx + \int_a^b gDf\, dx = [fg]_a^b,$$

comme annoncé. □

Nous pouvons dès à présent obtenir la formule de Taylor avec reste intégral, telle qu'obtenue par Cauchy. Notons que ce résultat est valide pour les fonction complexes.

Théorème 1.2.6 *Si f est une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour tous points a, b de I, on a*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(b-a)^j}{j!}[D^j f]_a + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!}[D^{p+1} f]_t dt.$$

Démonstration. Posons $P_0 = 1$ et si P_j a été défini, soit P_{j+1} une primitive de P_j. On a

$$\begin{aligned} [f]_a^b &= \int_a^b Df\,dt = \int_a^b P_0 Df\,dt = [P_1 Df]_a^b - \int_a^b P_1 D^2 f\,dt \\ &= [P_1 Df]_a^b - [P_2 D^2 f]_a^b + \int_a^b P_2 D^3 f\,dt = \cdots \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} [P_j D^j f]_a^b + (-1)^p \int_a^b P_p D^{p+1} f\,dt. \end{aligned}$$

Si on choisit $P_j(t) = (t-b)^j / j!$ pour tout $j \in \mathbb{N}_*$, on remarque que l'on a $DP_{j+1} = P_j$ et

$$[P_j D^j f]_a^b = -\frac{(a-b)^j}{j!}[D^j f]_a = (-1)^{j+1}\frac{(b-a)^j}{j!}[D^j f]_a,$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 1.2.7 *Si f est une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour tout point x de I et tout nombre h tel que $x + h \in I$, on a*

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!}[D^j f]_x + \frac{h^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p [D^{p+1} f]_{x+th} dt.$$

Démonstration. Soit g la fonction

$$g : [0,1] \to \mathbb{C} \quad t \mapsto f(x+th).$$

La formule de Taylor permet d'écrire

$$g(1) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}[D^j g]_0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}[D^{p+1} g]_t dt.$$

On vérifie de suite que l'on a

$$[D^j g]_t = h^j [D^j f]_{x+th},$$

ce qui suffit. □

Comme pour la formule de Taylor avec reste entier, ce résultat se généralise à $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.2.8 *Si f est une fonction de $C^{p+1}(U)$, alors, pour tout point x de U et tout point h tel que le segment $\{x + th : t \in [0,1]\}$ soit inclus dans U, on a*

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} \sum_{k_1=1}^{d} \cdots \sum_{k_j=1}^{d} h_{k_1} \cdots h_{k_j} [D_{k_1} \cdots D_{k_j} f]_x \\ &\quad + \sum_{k_1=1}^{d} \cdots \sum_{k_{p+1}=1}^{d} h_{k_1} \cdots h_{k_{p+1}} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} [D_{k_1} \cdots D_{k_{p+1}} f]_{x+th} dt. \end{aligned}$$

1.2.3 Formule du changement de variable

Le résultat suivant, bien que presque trivial, a de nombreuses applications.

Théorème 1.2.9 *Soit x' une fonction réelle de classe C^1 sur un intervalle compact $[a,b]$ et f une fonction continue sur $x'([a,b])$. On a*

$$\int_{x'(a)}^{x'(b)} f(x)dx = \int_a^b f(x'(x))Dx'(x)dx.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $x'([a,b])$; on a donc

$$\int_{x'(a)}^{x'(b)} f(x)dx = F(x'(b)) - F(x'(a)).$$

La fonction $F(x')$ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et

$$D(F \circ x') = [DF]_{x'}Dx' = f(x')Dx'.$$

Le second membre de l'énoncé est donc égal à $F(x'(b)) - F(x'(a))$, ce qui suffit. □

Une conséquence importante de ce résultat est le théorème du changement de variable.

Corollaire 1.2.10 *Soit x' une fonction réelle de classe C^1 de dérivée non nulle sur un intervalle compact I et f une fonction continue sur $[a,b] = x'(I)$. On a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x))Dx'(x)dx.$$

Bien sûr, le cas général peut se traiter en décomposant la fonction en sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Si f est une fonction paire et continue sur l'intervalle $[-a,a]$, où a est un nombre réel positif, alors $\int_{-a}^a f\,dx = 2\int_0^a f\,dx$. De fait, on a bien entendu

$$\int_{-a}^a f\,dx = \int_{-a}^0 f\,dx + \int_0^a f\,dx,$$

et la fonction x' définie explicitement sur $\mathbb{R}$ par $x'(x) = -x$ permet d'écrire

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx,$$

d'où la conclusion. Si f n'est plus pair mais impair, le même raisonnement procure aussitôt l'égalité $\int_{-a}^a f\,dx = 0$.

1.3 Intégrales de Darboux généralisées

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré l'intégration que sur un intervalle borné, le plus souvent compact. Nous allons maintenant nous libérer de cette restriction.

1.3.1 Intégrales convergentes

Pour tous nombres a et b strictement positifs avec $a < b$, on a

$$\int_a^b x^s dx = \frac{b^{s+1}}{s+1} - \frac{a^{s+1}}{s+1}$$

si s est un nombre réel différent de -1 et

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a).$$

Il est naturel de poser

$$\int_0^b x^s dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^b x^s dx = \frac{b^{s+1}}{s+1},$$

pour tout $s > -1$. Une telle notation ne peut être associée à un nombre réel pour les autres valeurs de s. De la même manière, on peut poser

$$\int_a^{+\infty} x^s dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b x^s dx = -\frac{a^{s+1}}{s+1},$$

pour tout $s < -1$. Dans tous les cas, on remarque qu'une telle démarche ne permettra jamais de définir l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^s dx$.

On est donc amené à la définition suivante.

Définition 1.3.1 S f est une fonction continue sur $]\alpha, \beta[$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f\,dx$ existe si $\int_a^b f\,dx$ converge vers un nombre fini lorsque a et b tendent vers α et β respectivement, avec $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$, *i.e.* si

$$\lim_{a \to \alpha^+, b \to \beta^-} \int_a^b f\,dx$$

existe et est fini.

Si par exemple $I =]a_0, +\infty[$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$, $\int_{a_0}^{+\infty} f\,dx$ existe et vaut m si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $N > 0$ tels que

$$a - a_0 < \delta \text{ et } b > N \text{ implique } |m - \int_a^b f\,dx| < \varepsilon,$$

pour tous $a, b \in I$, avec $a < b$.

Théorème 1.3.2 *L'intégrale d'une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ existe si et seulement si une primitive de F possède des limites finies an α^+ et β^-. Dans ce cas, on a*

$$\int_\alpha^\beta f\,dx = \lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to \alpha^+} F(x).$$

Démonstration. Pour tout intervalle compact $[a, b]$ de $]\alpha, \beta[$, on a bien sûr

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a).$$

Dès lors, l'intégrale existe si la primitive admet des limites finies aux extrémités de $]\alpha, \beta[$. Inversement, si l'intégrale existe, soit $\varepsilon > 0$. Si $(a_j)_j$ est une suite de $]\alpha, \beta[$ qui converge vers α, il existe $N \in \mathbb{N}_*$ et $b \in]\alpha, \beta[$ tels que $p, q \geqslant N$ implique

$$|F(a_p) - F(a_q)| = |\int_{a_p}^{b} f\,dx - \int_{a_q}^{b} f\,dx| < \varepsilon,$$

de sorte que F admet une limite finie en α^+. Pour conclure, il suffit de raisonner de même pour β^-. □

Exemple 1.3.3 Si c est une constante strictement positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-cx)dx$ existe et vaut $1/c$. De fait, toute primitive de l'exponentielle admet une limite en $-\infty$ et il vient directement

$$\int_0^{+\infty} \exp(-cx) = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \exp(-cx) = \lim_{b\to+\infty} -\frac{\exp(-cb)}{c} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Exercice 1.3.4 Calculer

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\frac{j!}{j^j}}.$$

Suggestion. On a

$$\ln(\sqrt[j]{\frac{j!}{j^j}}) = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \ln(\frac{k}{j}).$$

On vérifie de suite que la fonction ln est intégrable sur $]0, 1[$. On obtient dès lors

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \ln(\frac{k}{j}) = \int_0^1 \ln(x)dx = -1.$$

Dès lors, la limite à calculer existe et vaut $1/e$.

1.3.2 Fonctions intégrables

L'appellation « fonction intégrable » est à réserver aux fonctions dont l'intégrale de la valeur absolue existe, pour la simple bonne raison que nous voulons garder une théorie consistante avec celle de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 1.3.5 *L'intégrale d'une fonction f continue et positive sur $]\alpha, \beta[$ existe si et seulement si l'ensemble des intégrales de f sur les intervalles compacts de $]\alpha, \beta[$ est majoré. Dans ce cas, on a*

$$\int_\alpha^\beta f\,dx = \sup_{[a,b]\subset]\alpha,\beta[} \int_a^b f\,dx.$$

Démonstration. Puisque f est positif, les primitives de f sont croissantes sur $]\alpha, \beta[$. Ainsi, une telle primitive admet une limite finie en β^- et α^+ si et seulement si elle est bornée sur $]\alpha, \beta[$. Dès lors, si l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ existe, toute primitive de f est bornée, ce qui implique que l'intégrale de f existe sur tout intervalle $[a, b]$ de $]\alpha, \beta[$, avec

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_\alpha^\beta f\,dx.$$

Inversement, si $\int_a^b f\,dx$ est majoré pour tout intervalle $[a, b]$ de $]\alpha, \beta[$, les primitives de f sont bornées sur $]\alpha, \beta[$.

Enfin, si la primitive de f existe sur $]\alpha, \beta[$, soit $(a_j)_j$ et $(b_j)_j$ deux suites monotones de $]\alpha, \beta[$ qui convergent vers α et β respectivement. La suite $(x_j)_j$ définie par

$$x_j = \int_{a_j}^{b_j} f\,dx,$$

pour j assez grand est croissante et majorée. Elle converge donc vers la la borne supérieure de ses valeurs. Par définition, cette valeur n'est autre que l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$. $\square$

Pour les fonction admettant une intégrale, l'intégrabilité joue le rôle de la convergence absolue pour les séries convergentes.

Définition 1.3.6 Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est intégrable sur $]\alpha, \beta[$ lorsque l'intégrale de $|f|$ existe sur $]\alpha, \beta[$.

Proposition 1.3.7 *Toute fonction continue et de module majoré par une fonction intégrable est intégrable.*

Démonstration. Si f est continu sur $]\alpha, \beta[$ et s'il existe une fonction g intégrable sur $]\alpha, \beta[$ telle que $|f| \leqslant g$ sur cet intervalle, alors

$$\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b g\,dx \leqslant \int_\alpha^\beta g\,dx,$$

pour tout intervalle $[a, b]$ de $]\alpha, \beta[$, ce qui suffit. $\square$

Théorème 1.3.8 *Si la fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est intégrable sur cet intervalle, alors l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ existe et on a*

$$|\int_\alpha^\beta f\,dx| \leqslant \int_\alpha^\beta |f|\,dx.$$

Démonstration. Bien entendu, $(\Re f)^+$, $(\Re f)^-$, $(\Im f)^+$ et $(\Im f)^-$ sont majorés par $|f|$ et

$$\int_\alpha^\beta f\,dx = \int_\alpha^\beta (\Re f)^+ dx - \int_\alpha^\beta (\Re f)^- dx + i\int_\alpha^\beta (\Im f)^+ dx - i\int_\alpha^\beta (\Im f)^- dx.$$

De plus, il vient directement

$$|\int_\alpha^\beta f\,dx| = \lim_{a\to\alpha^+, b\to\beta^-} |\int_a^b f\,dx| \leqslant \lim_{a\to\alpha^+, b\to\beta^-} \int_a^b |f|\,dx = \int_\alpha^\beta |f|\,dx,$$

ce qui suffit. $\square$

Corollaire 1.3.9 *Si f est une fonction continue et bornée sur $]\alpha,\beta[$ et g une fonction intégrable sur cet intervalle, alors fg est intégrable sur $]\alpha,\beta[$ et on a*

$$\int_\alpha^\beta |fg|\,dx \leqslant \|f\|_{]\alpha,\beta[}\int_\alpha^\beta |g|\,dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut se généraliser.

Corollaire 1.3.10 *Si f et g sont deux fonctions continues dont le carré du module est intégrable sur $]\alpha,\beta[$, alors $f\bar{g}$ est intégrable sur $]\alpha,\beta[$ et l'on a*

$$|\int_\alpha^\beta f\bar{g}\,dx|^2 \leqslant \int_\alpha^\beta |f|^2dx\int_\alpha^\beta |g|^2dx.$$

Démonstration. Pour tout intervalle $[a,b]$ de $]\alpha,\beta[$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous procure les intégalités suivantes :

$$|\int_a^b |f||g|\,dx|^2 \leqslant \int_a^b |f|^2dx\int_a^b |g|^2dx \leqslant \int_\alpha^\beta |f|^2dx\int_\alpha^\beta |g|^2dx.$$

On en déduit que l'intégrale de $|f||g|$ existe et

$$|\int_\alpha^\beta f\bar{g}\,dx|^2 \leqslant |\int_\alpha^\beta |f||g|\,dx|^2 \leqslant \int_\alpha^\beta |f|^2dx\int_\alpha^\beta |g|^2dx,$$

ce qui suffit. □

Si l'intégrale de f sur $]\alpha,\beta[$ existe, on préfère souvent écrire cette intégrale comme suit,

$$\int_{\to\alpha}^{\to\beta} f\,dx,$$

afin de réserver la notation sans flèche aux fonctions intégrables et ainsi lever toute ambiguïté ; on parle d'intégrale fléchée. Si f est intégrable sur $]\alpha,\beta[$, alors

$$\int_{\to\alpha}^{\to\beta} f\,dx = \int_\alpha^\beta f\,dx,$$

alors que si f n'est pas intégrable, le second membre n'a pas de sens. Cette convention permet de rester cohérant avec la théorie de l'intégration de Lebesgue.

1.3.3 Critères d'intégrabilité

Nous allons maintenant établir de simples mais puissants critères d'intégrabilité.

Proposition 1.3.11 *Si f est une fonction continue sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$ de $\mathbb{R}$ et s'il existe deux nombres réels a, b de $]\alpha,\beta[$ avec $a<b$ tels que $f\chi_{]\alpha,a[}$ et $f\chi_{]b,\beta[}$ sont intégrables, alors f est intégrable sur $]\alpha,\beta[$.*

Démonstration. De fait, il suffit de considérer la décomposition

$$f\chi_{]\alpha,\beta[} = f\chi_{]\alpha,a[} + f\chi_{[a,b]} + f\chi_{]b,\beta[},$$

où la fonction $f\chi_{[a,b]}$ est intégrable car continue sur le compact $[a,b]$. □

Définition 1.3.12 Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est intégrable en α^+ lorsqu'il existe $a \in]\alpha, \beta[$ tel que f soit intégrable sur $]\alpha, a[$. De même, une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est intégrable en β^- lorsqu'il existe $b \in]\alpha, \beta[$ tel que f soit intégrable sur $]b, \beta[$.

Les exemples qui suivent sont fondamentals pour l'obtiention des critères d'intégration.

Lemme 1.3.13 *Si r et θ sont deux nombres réels, les fonctions*

$$\frac{1}{(x-r)^\theta} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{(r-x)^\theta}$$

sont intégrables respectivement r^+ et r^- si et seulement si $\theta < 1$.

Démonstration. La fonction $(x-r)^{-\theta}$ est positive et continue sur l'intervalle $]r, r+1[$ et une de ses primitives sur cet intervalle est donnée par

$$\frac{(x-r)^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \text{si } \theta \neq 1$$

et par $\ln(x-r)$ sinon. Ces fonctions n'admettent des limites finies en r^+ que si $\theta < 1$. Le cas de la seconde fonction se traite de même. $\square$

Lemme 1.3.14 *Si Θ est un nombre réel, les fonctions*

$$\frac{1}{x^\Theta} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{|x|^\Theta}$$

sont intégrables respectivement en $+\infty$ et $-\infty$ si et seulement si $\Theta > 1$.

Démonstration. La fonction $x^{-\Theta}$ est positive et continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et une de ses primitives sur cet intervalle est donnée par

$$\frac{x^{1-\Theta}}{1-\Theta} \quad \text{si } \Theta \neq 1$$

et par $\ln(x)$ sinon. Ces fonctions n'admettent des limites finies en $+\infty$ que si $\Theta > 1$. Le cas de la seconde fonction se traite de même. $\square$

Théorème 1.3.15 *Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est intégrable en α^+ si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

— *α est un nombre réel et f admet une limite finie en α^+,*

— *α est un nombre réel et il existe $\theta < 1$ tel que*

$$\lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^\theta |f(x)|$$

existe et est fini,

— *$\alpha = -\infty$ et il existe $\Theta > 1$ tel que*

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\Theta |f(x)|$$

existe et est fini.

Démonstration. Pour le premier cas, il existe $a \in]\alpha, \beta[$ et $C > 0$ tel que

$$|f|\chi_{]\alpha,a[} \leqslant C\chi_{]\alpha,a[}.$$

Pour le deuxième, il existe $a \in]\alpha, \beta[$ et $C > 0$ tel que

$$|f|\chi_{]\alpha,a[} \leqslant C(x-\alpha)^{-\theta}\chi_{]\alpha,a[}.$$

Enfin, pour le troisième, il existe $a \in]-\infty, \beta[$ et $C > 0$ tel que

$$|f|\chi_{]-\infty,a[} \leqslant C|x|^{-\Theta}\chi_{]-\infty,a[}.$$

□

On peut bien entendu procéder de même pour l'intégrabilité en β^-.

Théorème 1.3.16 *Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est intégrable en β^- si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

- *β est un nombre réel et f admet une limite finie en β^-,*
- *β est un nombre réel et il existe $\theta < 1$ tel que*

$$\lim_{x\to\beta^-} (\beta - x)^\theta |f(x)|$$

existe et est fini,

- *$\beta = +\infty$ et il existe $\Theta > 1$ tel que*

$$\lim_{x\to+\infty} |x|^\Theta |f(x)|$$

existe et est fini.

Bien entendu, une fonction f n'est pas intégrable si elle ne vérifie pas une propriété que son intégrabilité entraînerait. Ainsi, la fonction $(x \ln(x))^{-1}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\ln \circ \ln$ est une primitive de cette fonction n'admettant pas de limite finie en $+\infty$. Aussi, f n'est pas intégrable si elle majore une fonction non-intégrable. En particulier, on a les résultats suivants.

Théorème 1.3.17 *Une fonction f continue sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ n'est pas intégrable en α^+ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *α est un nombre réel et*

$$\lim_{x\to\alpha^+} (x-\alpha) f(x)$$

existe et diffère de 0 (mais peut valoir l'infini),

- *$\alpha = -\infty$ et*

$$\lim_{x\to-\infty} |x| f(x)$$

existe et diffère de 0 (mais peut valoir l'infini).

Théorème 1.3.18 *Une fonction f continue sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ n'est pas intégrable en β^- si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— *β est un nombre réel et*

$$\lim_{x\to\beta^-}(\beta-x)f(x)$$

existe et diffère de 0 *(mais peut valoir l'infini),*

— *$\beta=+\infty$ et*

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)$$

existe et diffère de 0 *(mais peut valoir l'infini).*

Exemple 1.3.19 La fonction

$$]0,+\infty[\to\mathbb{R} \quad x\mapsto\frac{\ln(x)}{x^2+1}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. De fait, elle est continue sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2+1}=0,$$

ce qui implique l'intégrabilité en 0^+. En ce qui concerne l'autre borne, on trouve directement

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}\ln(x)}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0,$$

ce qui permet de conclure.

Exemple 1.3.20 La fonction

$$]0,+\infty[\to\mathbb{R} \quad x\mapsto\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. Elle est d'abord continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle est intégrable en 0^+ puisqu'on a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2-1}=0.$$

Elle est de plus intégrable en 1^- et 1^+ car elle admet une limite finie en 1, comme on le vérifie en recourant, par exemple, au théorème de l'Hospital. Enfin, elle est intégrable en $+\infty$, puisqu'on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}\ln(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0$$

Même si cela peut paraître évident, insistons sur l'importance de la continuité de la fonction étudiée. Ainsi, on vérifie directement que la fonction $1/x^2$ est intégrable en -1^+ et 1^-. On ne peut bien sûr pas en conclure que cette fonction est intégrable sur l'intervalle $]-1,1[$. On aurait dans ce cas

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\Big[\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1}=-2,$$

ce qui est absurde pour deux raisons : premièrement, la fonction $1/x$ n'est pas continue sur $]-1,1[$. Qui plus est, l'intégrale d'une fonction positive est nécessairement positive. En pratique, on découpe le domaine de définition en des intervalles où la fonction est continue.

1.3.4 Cas pratiques de calcul d'intégrale

Nous disposons maintenant d'un puissant arsenal pour aborder le calcul pratique d'intégrales

Le théorème du changement de variable (corollaire 1.2.10) est toujours valable sur un intervalle quelconque $]\alpha,\beta[$; il suffit de faire tendre a et b vers α et β respectivement.

Proposition 1.3.21 *Soit x' une fonction réelle de classe C^1 de dérivée non nulle sur un intervalle ouvert I et f une fonction continue et intégrable sur $]\alpha,\beta[= x'(I)$. On a*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x'(x))Dx'(x)dx,$$

où on a posé $\gamma = \lim_{x\to\alpha^+} x'^{-1}(x)$ et $\delta = \lim_{x\to\beta^-} x'^{-1}(x)$.

Démonstration. Quitte à considérer la décomposition canonique de f, on peut supposer avoir affaire à une fonction positive. Pour tout intervalle $[a,b]$ de $]\alpha,\beta[$, on a

$$\int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x))Dx'(x)dx \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Par définition, on a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{a\to\alpha^+,\ b\to\beta^-} \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x))Dx'(x)dx,$$

ce qui suffit. □

Il en va de même pour l'intégration par parties.

Proposition 1.3.22 *Si les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[$ et si deux des assertions suivantes sont vérifiées,*

— *fDg admet une intégrale sur $]\alpha,\beta[$,*
— *gDf admet une intégrale sur $]\alpha,\beta[$,*
— *fg admet des limites finies en α^+ et β^-,*

alors la troisième assertion est vérifiée et on a

$$\int_{\to\alpha}^{\to\beta} fDg\,dx = [fg]_\alpha^\beta - \int_{\to\alpha}^{\to\beta} gDf\,dx.$$

Démonstration. Un passage à la limite dans le précédant résultat concernant l'intégration par parties permet directement de conclure. □

Exercice 1.3.23 Étant donné deux nombres réels a et b tels que $a < b$, calculer, si possible,

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Suggestion. Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, la fonction

$$]a,b[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}$$

est intégrable sur $]a, b[$. De fait, elle est continue sur cet intervalle et on a

$$\lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} = \lim_{x \to b^-} \frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

La fonction

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \mapsto x(t) = a\cos^2(t) + b\sin^2(t)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$Dx(t) = (b-a)\sin(2t)$$

sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que Dx est positif sur $]0, \pi/2[$, avec $x([0, \pi/2]) = [a, b]$. Au total, il vient

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(b-a)\sin(2t)}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2(t)\cos^2(t)}} dt = 2\int_0^{\pi/2} dt = \pi.$$

Remarquons qu'une autre manière de procéder pour prouver l'intégrabilité consiste à d'abord montrer que la fonction $t \mapsto x(t)$ possède les propriétés requises pour appliquer la proposition 1.3.21, avant de constater que la fonction

$$(f \circ x)Dx = 2\chi_{]0,\pi/2[}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.3.24 Établir que, pour tous nombres réels a, b strictement positifs, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2} dx = \frac{\pi}{2b}\ln(ab).$$

Suggestion. Une simple vérification permet d'affirmer que cette intégrale a un sens. L'application linéaire $x(y) = by$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2} dx &= \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ab)+\ln(y)}{y^2+1} dy \\ &= \frac{\ln(ab)}{b}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} + \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)}{y^2+1} dy.\end{aligned}$$

Par variation des primitives, on trouve directement

$$\frac{\ln(ab)}{b}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(ab)}{b}.$$

Il reste à montrer que la seconde intégrale est nulle. Il suffit de considérer l'application $y(t) = 1/t$ sur $]0, +\infty[$ pour pouvoir écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)}{y^2+1} dy = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln(t)}{1+t^{-2}} \frac{-dt}{t^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt.$$

On conclut alors directement.

Exercice 1.3.25 Établir que, pour tout $a > 0$, la fonction

$$]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(1 + \frac{a^2}{x^2})$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer son intégrale.
Suggestion. La fonction considérée est continue sur son domaine et le théorème de l'Hospital permet d'affirmer que l'on a

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(1 + \frac{a^2}{x^2}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x^2 \ln(1 + \frac{a^2}{x^2}) = a^2.$$

Ainsi, la fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit alors les fonctions explicitement définies sur ce même intervalle par $f(x) = x$ et $g(x) = \ln(1 + a^2/x^2)$. Ces fonctions sont de classe C^1 et le théorème de L'Hospital donne

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1 + \frac{a^2}{x^2}) = \lim_{x\to +\infty} x\ln(1 + \frac{a^2}{x^2}) = 0.$$

Enfin, la fonction

$$f(x)Dg(x) = -\frac{2a^2}{x^2 + a^2}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. On peut donc écrire

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 + \frac{a^2}{x^2})dx = [fg]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2a^2}{x^2 + a^2}dx = 2a[\text{arctg}(\frac{x}{a})]_0^{+\infty} = a\pi.$$

On peut aussi établir l'intégrabilité de la fonction de départ en vérifiant que les expressions $[fg]_0^{+\infty}$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{2a^2}{a^2 + x^2}dx$$

ont un sens, ce qui permet d'affirmer que l'intégrale

$$\int_{\to 0}^{\to +\infty} \ln(1 + \frac{a^2}{x^2})dx$$

existe, en intégrant par parties. L'intégrabilité de la fonction $\ln(1 + a^2/x^2)$ découle du fait qu'elle garde un signe constant sur l'intervalle d'intégration.

1.3.5 Séries numériques absolument convergentes

On peut caractériser les séries numériques $\sum_j x_j$ absolument convergentes pour autant que la suite $(|x_j|)_j$ soir décroissante. Le résultat qui suit suppose que la suite puisse être exprimée au travers d'une fonction f possédant certaines propriétés, ce qui est en fait toujours possible (*cf.* remarque 1.3.27).

Théorème 1.3.26 *Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[n, +\infty[$ avec $n \in \mathbb{N}_*$ telle que $|f|$ décroît vers 0, alors la série $\sum_{j=n}^{\infty} f(j)$ est absolument convergente si et seulement si f est intégrable en $+\infty$.*

Démonstration. Pour tout $m \geqslant n$, on a bien entendu $|f(m+1)| \leqslant |f(x)| \leqslant |f(m)|$, pour tout x appartenant à $]m, m+1]$. En intégrand sur $]m, m+1]$, on obtient

$$|f(m+1)| \leqslant \int_m^{m+1} |f(x)| dx \leqslant |f(m)|.$$

Par conséquent, pour tout nombre entier $J > n$, on a

$$\sum_{j=n}^{J-1} |f(j+1)| = \sum_{j=n+1}^{J} |f(j)| \leqslant \int_n^J |f(x)| dx \leqslant \sum_{j=n}^{J-1} |f(j)|.$$

Si la série de l'énoncé converge, alors $\int_n^J |f| \, dx$ est majoré par $\sum_{j=n}^{\infty} |f(j)|$ pour tout J, ce qui implique que f est intégrable sur $]n, +\infty[$. Inversement, si f est intégrable sur $]n, +\infty[$, $\sum_{j=n}^{\infty} |f(j)|$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée par $\int_n^{+\infty} |f| \, dx$, donc convergente. □

Remarque 1.3.27 Étant donné une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{C}$ telle que $(|x_j|)_j$ décroît vers zéro, posons

$$\begin{aligned} f_j : [j, j+1] &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \big(|x_j| + (|x_{j+1}| - |x_j|)(x-j)\big) e^{i\big(\arg(x_j) + (\arg(x_{j+1}) - \arg(x_j))(x-j)\big)}, \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_*$. La fonction f qui à $x \in [j, j+1]$ associe $f_j(x)$ est une fonction continue sur $[1, +\infty[$, telle $f(j) = x_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_*$; qui plus est, la fonction $|f|$ est décroissante vers 0.

Donnons quelques exemples.

Exemple 1.3.28 Si $\alpha \in \mathbb{C}$ vérifie $|\alpha| < 1$, la série géométrique $\sum_j \alpha^j$ converge absolument. De fait, la fonction $x \mapsto |\alpha|^x$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et décroît strictement vers 0. Qui plus est, elle est intégrable en $+\infty$, car une de ses primitives, à savoir $|\alpha|^x / \ln |\alpha|$ admet une limite finie en $+\infty$; on peut aussi appliquer le critère d'intégration en Θ.

Exemple 1.3.29 Pour $\alpha > 0$, la série de Riemann $\sum_j j^{-\alpha}$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$. De fait, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et décroît strictement vers 0. Qui plus est, elle est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 1.3.30 Établir que la série de Bertrand

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j \ln^m(j)}$$

diverge si $m = 1$ et converge si $m = 2$.
Suggestion. La fonction $x \mapsto (x \ln^m(x))^{-1}$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et décroît strictement vers 0. Nous savons déjà que lorsque $m = 1$, la fonction n'est pas intégrable en $+\infty$. Si $m = 2$, une primitive de la fonction est donnée par $-1/\ln(x)$, ce qui permet d'affirmer qu'elle est intégrable en $+\infty$.

1.4 Intégrales et limites

1.4.1 Dérivation des intégrales paramétriques

Proposition 1.4.1 *Soit I un intervalle compact, Λ un intervalle et*

$$f.(\cdot) : I \times \Lambda \to \mathbb{C} \quad (x, \lambda) \mapsto f_\lambda(x)$$

une fonction continue sur $I \times \Lambda$. La fonction

$$\lambda \mapsto \int_I f_\lambda(x)dx \tag{1.6}$$

est continue sur Λ. De plus, si $\lambda \mapsto D_\lambda f_\lambda(x)$ est continu sur $I \times \Lambda$, alors (1.6) est de classe C^1 sur Λ et on a

$$D \int_I f.(x)dx = \int_I Df.(x)dx.$$

Démonstration. Les notions de continuité et de dérivabilité étant des propriétés locales, quitte à considérer un sous-intervalle, on peut considérer Λ compact. Posons

$$g(\lambda) = \int_I f_\lambda(x)dx.$$

La fonction f étant uniformément continue sur $I \times \Lambda$, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que $|\lambda - \lambda'| < \delta$ implique $|f_\lambda(x) - f_{\lambda'}(x)| < \varepsilon/|I|$, pour autant que λ et λ' soient des éléments de Λ, pour tout $x \in I$. Pour de tels éléments, on a donc $\|f_\lambda - f_{\lambda'}\|_I < \varepsilon/|I|$ (on a la convergence uniforme). Il vient alors

$$|g(\lambda) - g(\lambda')| = |\int_I f_\lambda - f_{\lambda'}\, dx| \leqslant \|f_\lambda - f_{\lambda'}\|_I |I| < \varepsilon,$$

ce qui montre que g est continu.

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{g(\lambda + h) - g(\lambda)}{h} - \int_I D_\lambda f_\lambda(x)dx = \int_I \frac{f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x)}{h} - D_\lambda f_\lambda(x)dx.$$

Il nous suffit de montrer que pour $\lambda \in \Lambda$ fixé, l'intégrand tend uniformément vers 0 sur I lorsque h tend vers 0. Rappelons que le théorème des accroissement finis implique que pour toute fonction h dérivable sur $[a, b]$, on a

$$|h(b) - h(a) - Dh(x_0)(b - a)| \leqslant |b - a| \sup_{x \in [a,b]} |Dh(x) - Dh(x_0)|,$$

pour tout $x_0 \in [a, b]$. On a dès lors

$$|f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x) - D_\lambda f_\lambda(x)h| \leqslant |h| \sup_{h' \in [0,h]} |D_\lambda f_{\lambda+h'}(x) - D_\lambda f_\lambda(x)|.$$

La fonction $\lambda \mapsto D_\lambda f_\lambda(x)$ étant uniformément continue sur Λ, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|h'| < \delta$ implique

$$|D_\lambda f_{\lambda+h'}(x) - D_\lambda f_\lambda(x)| < \varepsilon/|I|.$$

Dès lors, $|h| < \delta$ implique

$$|f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x) - D_\lambda f_\lambda(x)h| < |h|\frac{\varepsilon}{|I|},$$

pour tout $x \in I$. On en déduit que $|h| < \delta$ implique

$$\int_I \frac{f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x)}{h} - D_\lambda f_\lambda(x)dx \leqslant \left\| \frac{f_{\lambda+h}(x) - f_\lambda(x)}{h} - D_\lambda f_\lambda(x) \right\|_I |I| < \varepsilon,$$

ce qui suffit. □

Théorème 1.4.2 *Soit I et Λ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et*

$$f_\cdot(\cdot) : I \times \Lambda \quad (x, \lambda) \mapsto f_\lambda(x)$$

une fonction continue. Si
- *f_λ admet une intégrale pour tout $\lambda \in \Lambda$,*
- *$D_\lambda f_\lambda(x)$ est continu sur $I \times \Lambda$,*
- *Pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable g_K sur I telle que*

$$|D_\lambda f_\lambda(x)| \leqslant g_K(x),$$

pour tout $x \in I$, alors $\lambda \mapsto \int_I f_\lambda(x)dx$ est continûment dérivable et l'on a

$$D \int_I f_\lambda(x)dx = \int_I D_\lambda f_\lambda(x)dx.$$

Démonstration. L'idée est d'appliquer le résultat précédent sur $[a, b] \subset I$, puis de passer à la limite. Pour pouvoir intervertir limite et dérivée, il nous faudra recourir à la notion de convergence uniforme. Supposons avoir $I =]\alpha, \beta[$ et soit K un compact de Λ. Si $[a, b]$ est un intervalle de $]\alpha, \beta[$, pour tout $\lambda \in K$, on a

$$\int_a^b |D_\lambda f_\lambda(x)|dx \leqslant \int_\alpha^\beta g_K \, dx,$$

ce qui montre que $D_\lambda f_\lambda$ est intégrable sur $]\alpha, \beta[$.

Soit $(a_j)_j$ et $(b_j)_j$ deux suites de $]\alpha, \beta[$ qui convergent vers α et β respectivement et posons

$$g_j(\lambda) = \int_{a_j}^{b_j} f_\lambda \, dx.$$

Puisque f_λ admet une intégrale, g_j converge en un point λ vers $\int_I f_\lambda \, dx$. La suite

$$Dg_j(\lambda) = \int_{a_j}^{b_j} D_\lambda f_\lambda(x)dx$$

converge uniformément sur tout compact K de Λ vers $\int_I D_\lambda f_\lambda(x)dx$. Par la théorie de la convergence uniforme, il en résulte que g_j converge uniformément sur tout compact K (ce que nous savions déjà) vers $\int_I f_\lambda \, dx$ et

$$D \int_I f_\lambda(x) \, dx = \int_I D_\lambda f_\lambda(x) \, dx,$$

ce qui suffit. □

Exercice 1.4.3 Établir que si a et b sont deux nombres strictement positifs, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln(b/a).$$

Suggestion. Soit $b > 0$, $I =]0, +\infty[$, $\Lambda =]0, +\infty[$ et posons

$$f_a(x) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x};$$

cette expression définit une fonction sur $I \times \Lambda$. De plus, $f_.(x)$ est de classe C^∞ pour tout $x > 0$ et f_a est intégrable sur I pour tout $a > 0$. Enfin, pour tout compact K de Λ, $a_0 = \inf K$ est tel que

$$|D_a f_a(x)| = e^{-ax} \leqslant e^{-a_0 x},$$

pour tout $a \in K$, où le membre de droite de l'inégalité est intégrable sur I. Dès lors, pour tout $b > 0$, l'intégrale proposée est de classe C^1 sur Λ et on a

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = -\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}.$$

On en déduit l'existence d'une constante réelle C dépendante de b telle que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = C(b) - \ln(a).$$

Un argument symétrique permet d'affirmer l'existence d'une constante C' telle que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = C'(a) + \ln(b),$$

d'où le résultat annoncé, puisqu'en $a = b$, l'intégrale doit être nulle.

Présentons l'intégrale de Poisson.

Théorème 1.4.4 *Pour tout $a > 0$, on a*

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Démonstration. Pour $\lambda_0 > 0$, posons $I = [0, 1]$, $\Lambda = [-\lambda_0, \lambda_0]$ et soit $f_\lambda(x)$ la fonction définie sur $I \times \Lambda$ par

$$f_\lambda(x) = \frac{\exp(-\lambda^2(1 + x^2))}{1 + x^2}.$$

Pour tout $x \in I$, $f_.(x)$ est de classe C^1 sur Λ et f_λ est intégrable sur I. De plus, on a

$$|D_\lambda f_\lambda(x)| = | - 2\lambda \exp(-\lambda^2(1 + x^2))| \leqslant 2\lambda_0.$$

Il s'ensuit que $\int_0^1 f_\lambda(x)dx$ est de classe C^1 sur Λ et que l'on a

$$D_\lambda \int_0^1 \frac{\exp(-\lambda^2(1 + x^2))}{1 + x^2} dx = -2\lambda e^{-\lambda^2} \int_0^1 e^{-(\lambda x)^2} dx = -2e^{-\lambda^2} \int_0^\lambda e^{-x'^2} dx',$$

où l'on a effectué le changement de variable $x'(x) = \lambda x$. Considérons maintenant la fonction

$$g(\lambda) = (\int_0^\lambda e^{-x^2} dx)^2$$

définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour g et on a

$$D_\lambda g(\lambda) = 2e^{-\lambda^2} \int_0^\lambda e^{-x^2} dx.$$

Par le théorème de l'ouvert connexe, on a ainsi obtenu

$$\int_0^1 \frac{\exp(-\lambda^2(1+x^2))}{1+x^2} dx + (\int_0^\lambda e^{-x^2} dx)^2 = C,$$

pour une constante C. En $\lambda = 0$, cette relation donne

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + 0 = \frac{\pi}{4} = C.$$

Qui plus est, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty} |\int_0^1 \frac{\exp(-\lambda^2(1+x^2))}{1+x^2} dx| &\leqslant \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda^2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda^2} \frac{\pi}{4} = 0. \end{aligned}$$

Puisqu'on a

$$\int_0^\lambda e^{-x^2} dx = \sqrt{g(\lambda)} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{\exp(-\lambda^2(1+x^2))}{1+x^2} dx},$$

il vient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\lambda e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Le changement de variable $x'(x) = \sqrt{a}x$ permet de conclure. □

Exercice 1.4.5 Connaissant l'intégrale de Poisson, établir que pour tous nombres réels a et b avec $a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Suggestion. Soit $a > 0$, posons $I =]0, +\infty[$, $\Lambda = \mathbb{R}$ et définissons la fonction $(x, b) \mapsto f_b(x)$ sur $I \times \Lambda$ en posant

$$f_b(x) = e^{-ax^2} \cos(bx).$$

Il est évident que $f_b(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ pour tout $x > 0$ et que f_b est intégrable sur I pour tout b. Qui plus est, on a

$$|D_b f_b(x)| \leqslant x e^{-ax^2},$$

où le majorant est intégrable sur I. Dès lors, l'intégrale proposée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a

$$D_b \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)dx = -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin(bx)dx.$$

On peut évaluer cette dérivée en recourant à une intégration par partie. En effet, il vient directement

$$\begin{aligned} -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin(bx)dx &= \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} \sin(bx) D_x e^{-ax^2} dx \\ &= \frac{1}{2a}\big[\sin(bx)e^{-ax^2}\big]_0^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)dx. \end{aligned}$$

Dès lors, pour $a > 0$ fixé, la fonction

$$u(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)dx$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle à second membre linéaire

$$2aD_b u + bu = 0$$

sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une constante C dépendant de a telle que $u(b) = C(a)e^{-\frac{b^2}{4a}}$. La fonction C se détermine aisément si l'on remarque qu'en $b = 0$, l'intégrale proposée est celle de Poisson.

1.4.2 Passage de la limite sous le signe d'intégration

Le théorème suivant est en général appelé le théorème de la convergence dominée du pauvre. Il est en fait rendu obsolète par la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 1.4.6 *Soit $(f_j)_j$ une suite de fonctions continues et intégrables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que*

— *la suite converge uniformément vers une limite f pour tout intervalle compact de I,*

— *il existe une fonction g intégrable sur I telle que $|f_j| \leqslant g$ pour tout $j \in \mathbb{N}_*$.*

Alors, la fonction f est intégrable sur I et l'on a

$$\int_I f\,dx = \lim_j \int_I f_j\,dx.$$

Plus précisément, la suite $(\int_I |f - f_j|dx)_j$ converge vers 0.

Démonstration. La fonction f est bien sûr continue. Puisqu'elle est majorée en valeur absolue par g, elle est aussi intégrable. Si $I =]\alpha, \beta[$, pour tout intervalle $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$, on a

$$\int_\alpha^\beta |f - f_j|\,dx - \int_a^b |f - f_j|\,dx \leqslant 2(\int_\alpha^\beta g\,dx - \int_a^b g\,dx).$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit a, b deux éléments de $]\alpha, \beta[$ tels que le membre de droite de l'inégalité soit majoré par $\varepsilon/2$. D'autre par, on a

$$\int_a^b |f - f_j|\,dx \leqslant \|f - f_j\|_{[a,b]}(b - a).$$

Pour j assez grand, le membre de droite est également majoré par $\varepsilon/2$. Au total, il vient

$$|\int_\alpha^\beta f\,dx - \int_\alpha^\beta f_j\,dx| \leqslant \int_\alpha^\beta |f - f_j|\,dx < \int_a^b |f - f_j|\,dx + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

pour j suffisament grand. □

Exercice 1.4.7 Établir que,pour tout nombre réel a et tout nombre réel non nul b, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2+x^2)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{|b|}\ln(|a|+|b|).$$

Suggestion. On peut bien sûr supposer avoir $a \geqslant 0$ et $b > 0$ Qui plus est, cette intégrale a déjà été calculée dans le cas $a = 0$ (*cf.* exercice 1.3.24). Soit $b > 0$, $I =]0, +\infty[$, $\Lambda =]0, +\infty[$ et définissons

$$f_\cdot(\cdot) : I \times \Lambda \to \mathbb{R} \quad (x, a) \mapsto f_a(x) = \frac{\ln(a^2+x^2)}{x^2+b^2}.$$

Pour tout $x > 0$, $f_\cdot(x)$ est de classe C^∞ sur Λ et f_a est intégrable sur I pour tout $a > 0$. Si K est un compact de Λ, il existe un intervalle $[a_0, a_0']$ de Λ contenant K, donc tel que

$$|D_a f_a(x)| \leqslant \frac{2a_0'}{(a_0^2+x^2)(x^2+b^2)},$$

où le majorant est intégrable sur I. On en conclut que l'intégrale proposée est de classe C^1 sur Λ et que

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2+x^2)}{x^2+b^2} = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Pour a différent de b, il vient

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2+x^2)}{x^2+b^2}dx = \frac{2a}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{b(a+b)}.$$

Par continuité, on a donc obtenu

$$D_a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2+x^2)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{b(a+b)},$$

pour tout $a \in \Lambda$, ce qui permet d'affirmer l'existence d'une constante C dépendant de b telle que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2+x^2)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{b}\ln(a+b) + C(b).$$

Pour déterminer la constante C, il suffit de considérer la suite $(f_{1/j})_j$ de fonctions intégrables sur I. Cette suite est décroissante et le théorème de la convergence dominée permet d'affirmer que l'on a

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\pi}{b}\ln(\frac{1}{j}+b) + C(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{b}\ln(b),$$

ce qui implique $C = 0$.

Exercice 1.4.8 Établir que, pour tout nombre a strictement positif et tout nombre positif b, on a

$$\int_0^{+\infty} \exp(-(ax^2 + \frac{b}{x^2}))dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Suggestion. Puisque, lorsque b est nul, il s'agit de l'intégrale de Poisson, on peut supposer avoir $b > 0$. Soit $a > 0$, $I =]0, +\infty[$, $\Lambda =]0, +\infty[$ et définissons la fonction

$$f_\cdot(\cdot) : I \times \Lambda \to \mathbb{R} \quad (x, b) \mapsto f_b(x) = \exp(-(ax^2 + \frac{b}{x^2})).$$

Pour tout $x > 0$, $f_\cdot(x)$ est de classe C^∞ sur Λ et f_b est intégrable sur I pour tout $b > 0$. Pour tout compact K de Λ, il existe un intervalle $[b_0, b_0']$ de Λ contenant K et il vient alors

$$|D_b f_b(x)| \leqslant \frac{e^-(ax^2 + b_0 x^{-2})}{x^2},$$

où le majorant est intégrable sur I. Dès lors, l'intégrale proposée est de classe C^1 sur Λ et

$$D_b \int_0^{+\infty} \exp(-(ax^2 + \frac{b}{x^2}))dx = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(ax^2+bx^{-2})}}{x^2}dx.$$

Le changement de variable $x'(x) = \sqrt{b/a}/x$ permet quant à lui d'écrire

$$-\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(ax^2+bx^{-2})}}{x^2}dx = -\sqrt{\frac{a}{b}}\int_0^{+\infty} e^{-(ax'^2+bx'^{-2})}dx'.$$

Il s'ensuit que pour $a > 0$ fixé,

$$u(b) = \int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx^{-2})}dx$$

est de classe C^1 sur Λ et vérifie l'équation différentielle à second membre linéaire

$$Du(b) = -\sqrt{\frac{a}{b}}u(b),$$

sur Λ. Il existe donc une constante C dépendant de a telle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx^{-2})}dx = C(a)e^{-2\sqrt{ab}}.$$

Pour déterminer la constante C, considérons la suite de fonctions $(f_{1/j})_j$. Chaque élément est majoré par f_0, qui est inégrable sur I. Par le théorème de la convergence dominée, il vient

$$\lim_{j\to\infty} C(a)e^{2\sqrt{a/j}} = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

ce qui suffit.

Les théorèmes issus de la théorie de l'intégration de Lebesgue sont nettement plus forts. Énonçons-les à titre de comparaison. Pour une première lecture, le lecteur pourra faire abstraction de la locution « presque partout ». Il en va de même pour la notion de mesurabilité ; contentons-nous de signaler que toute fonction continue est mesurable et que la construction de fonctions non-mesurables nécessite l'axiome du choix. Le théorème de la convergence dominée, dû à Lebesgue, s'énonce comme suit :

Théorème 1.4.9 *Si $(f_j)_j$ est une suite de fonctions mesurables sur I qui converge presque partout vers f et s'il existe une fonction g intégrable sur I telle que $|f_j| \leqslant g$ presque partout pour tout $j \in \mathbb{N}_*$, alors f est intégrable et la suite $\int_I |f - f_j| dx$ tend vers 0. En particulier, on a*

$$\lim_j \int_I f_j\, dx = \int_I f\, dx.$$

Le théorème de la convergence monotone est quant à lui dû à Levi.

Théorème 1.4.10 *Si la suite $(f_j)_j$ de fonctions réelles presque partout et intégrables sur I est croissante (i.e. telle que $f_j \leqslant f_{j+1}$) presque partout et si la suite $(\int_I f\, dx)_j$ est majorée, alors la suite $(f_j)_j$ converge presque partout vers une fonction f intégrable sur I et la suite $(\int_I |f - f_j| dx)_j$ converge vers 0. En particulier, on a*

$$\lim_j \int_I f_j\, dx = \int_I f\, dx.$$

Il existe bien entendu un énoncé similaire si la suite est décoissante avec la suite des intégrales minorée.

1.4.3 L'intégrale de Dirichlet

Comme application, considérons l'intégrale de Dirichlet, $\int_0^{\to+\infty} \sin(x)/x\, dx$. La fonction

$$\mathrm{sinc} : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

peut être prolongée sur $\mathbb{R}$ en posant $\mathrm{sinc}(0) = 1$, puisque les limites à gauche et à droite sont toutes deux égales à 1 (la fonction est d'ailleurs paire). Cette fonction, appelée sinus cardinal, occupe une place centrale en théorie de l'analyse du signal. Ce qui précède montre que la fonction sinc est intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle n'est cependant pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a les relations suivantes,

$$\begin{aligned} x_j &= \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t + j\pi)|}{t + j\pi} dt \\ &\geqslant \frac{1}{(j+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin\, dx = \frac{2}{(j+1)\pi}. \end{aligned}$$

Fort de cette inégalité, on peut écrire

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, ce qui prouve que la fonction sinc n'est pas intégrable, la série harmonique nétant pas convergente. Soit maintenant b un nombre réel positif ; en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \Big[\frac{1 - \cos(x)}{x}\Big]_0^b + \int_0^b \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \frac{1 - \cos(b)}{b} + \int_0^b \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx.$$

Son numérateur étant borné, le premier terme du membre de droite tend vers zéro lorsque b tend vers $+\infty$. De plus, l'intégrand du second terme est intégrable en $+\infty$ car on a

$$\frac{|1-\cos(x)|}{x^2} \leqslant \frac{2}{x^2}.$$

Il en résulte que l'intégrale de la fonction sinc existe sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{\sin(t)}{t}\Big)^2 dt.$$

Une autre méthode pour obtenir l'existence de l'intégrale consiste à remarquer, comme l'a fait Dirichlet, que l'on a

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j x_j,$$

où $(x_j)_j$ est une suite décroissant vers 0.

Pour calculer la valeur de cette intégrale, il nous faut procéder de manière plus fine. La technique que nous allons exposer peut sembler un peu grossière ; on peut plus subtilement utiliser la transformée de Fourier ou l'intégration complexe. Cependant, ces outils ne sont pas encore à notre disposition. Posons

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x},$$

pour $\lambda > 0$. On vérifie de suite que pour tout $\lambda > 0$, cette fonction est intégrable en $+\infty$. On constate tout aussi aisément que les autres hypothèse du théorème de dérivation des intégrales paramétriques sont vérifiées. On a donc

$$\begin{aligned} D\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x}dx &= -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin(x)dx = -\Im\int_0^{+\infty} e^{(-\lambda+i)x}dx \\ &= -\Im\Big[\frac{1}{i-\lambda}e^{(-\lambda+i)x}\Big]_0^{+\infty} = \Im\frac{1}{i-\lambda} \\ &= -\Im\frac{\lambda+i}{\lambda^2+1} = \frac{-1}{\lambda^2+1}. \end{aligned}$$

De là, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x}dx = -\mathrm{arctg}(\lambda) + C,$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Considérons donc la fonction

$$g(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x}dx.$$

définie pour tout $\lambda > 0$. Nous savons que cette fonction est égale à $-\mathrm{arctg}$, à une constante additive près. Déterminons cette constante. On constate que les hypothèses du théorème de la convergence dominée s'appliquent aux fonctions $f_j(x) = e^{-\lambda_j x}\sin(x)/x$, où $(\lambda_j)_j$ est une suite positive quelconque qui converge vers $+\infty$. En particulier $\|f_j\|_{[a,b]}$ converge vers 0 pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$. On a donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = 0 = \lim_{\lambda\to\infty} -\mathrm{arctg}(\lambda) + C,$$

ce qui implique

$$g(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\lambda).$$

Nous ne pouvons pas encore en déduire que l'intégrale de Dirichlet vaut $\pi/2$, puisque $g(0)$ est une intégrale impropre, *i.e.* ce que nous avons obtenu jusqu'à présent n'a de sens que pour $\lambda > 0$. Il nous faut donc montrer que g peut être continûment prolongé à l'origine.

Posons

$$G(x) = \int_x^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et considérons l'intégrale impropre

$$\begin{aligned}
\int_0^{\rightarrow +\infty} f_\lambda - f_0 \, dx &= \int_0^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} (e^{-\lambda x} - 1) dx = \int_0^{\rightarrow +\infty} -DG(x)(e^{-\lambda x} - 1) dx \\
&= -[G(x)(e^{-\lambda x} - 1)]_0^{+\infty} - \int_0^{\rightarrow +\infty} G(x) \lambda e^{-\lambda x} dx.
\end{aligned}$$

Puisque l'intégrale de Dirichlet existe, $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$ et on obtient

$$\int_0^{\rightarrow +\infty} f_\lambda - f_0 \, dx = -\int_0^{\rightarrow +\infty} G(x) \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\rightarrow +\infty} G(\frac{t}{\lambda}) e^{-t} dt.$$

Considérons la fonction

$$h_\cdot(\cdot) : \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad (x, \lambda) \mapsto h_\lambda(x) = \begin{cases} G(\frac{x}{\lambda}) e^{-x} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Elle est continue sur son domaine, la continuité en $(x, 0)$ découlant de $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$. Pour tout λ, elle est aussi intégrable sur $]0, +\infty[$. Le théorème de la convergence dominée permet une fois de plus d'écrire

$$\lim_{\lambda \to 0^+} |g(\lambda) - \int_0^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx| = \lim_{\lambda \to 0^+} |\int_0^{+\infty} h_\lambda \, dx| = |\int_0^{+\infty} \lim_{\lambda \to 0^+} h_\lambda \, dx| = 0.$$

Au final, on a obtenu

$$\int_0^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{\lambda \to 0^+} g(\lambda) = \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 2

Intégration sur une partie de l'espace euclidien

2.1 Intégrales multiples

Nous allons ici développer la théorie de l'intégration de Darboux pour les intervalle compacts de l'espace euclidien. Cela peut sembler restrictif ; c'est d'ailleurs la principale raison qui a pousser Lebesgue à développer sa théorie de l'intégration. Nous nous limiterons en outre aux fonctions continues.

2.1.1 Intégration sur un ensemble compact

Soient I et I' deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $I \times I'$. On peut considérer l'intégrale superposée

$$\int_{I'} \int_I f(x,y)dxdy = \int_{I'} (\int_I f(x,y)dx)dy.$$

La première étape consiste à remarquer que l'on peut effectuer les opérations dans l'ordre inverse.

Théorème 2.1.1 *Soient I et I' deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $I \times I'$. On a*

$$\int_{I'} \int_I f(x,y)dxdy = \int_I \int_{I'} f(x,y)dydx.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que si (x,y) et (x',y') sont deux points de $I \times I'$ qui vérifient $|(x,y)-(x',y')| < \delta$, on a $|f(x,y)-f(x',y')| < \varepsilon(2|I|\,|I'|)^{-1}$. Soit alors $(I_j)_1^J$ et $(I'_j)_1^{J'}$ des partitions de I et I' respectivement telles que le diamètre de $I_j \times I'_{j'}$

soit inférieur à δ pour tous indices j et j'. Avec les notations usuelles, on a

$$
\begin{aligned}
&|\int_{I'}\int_I f(x,y)dxdy - \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'}\int_{I'_{j'}}\int_{I_j} f(\xi_j,\xi'_{j'})dxdy| \\
&= \quad |\sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'}\int_{I'_{j'}}\int_{I_j} f(x,y)dxdy - \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'}\int_{I'_{j'}}\int_{I_j} f(\xi_j,\xi'_{j'})dxdy| \\
&\leqslant \quad \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'}\int_{I'_{j'}}\int_{I_j} |f(x,y)-f(\xi_j,\xi'_{j'})|dxdy \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{2|I|\,|I'|}\int_{I'}\int_I \chi_{I\times I'}\,dxdy = \varepsilon/2.
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'intégrale superposée $\int_{I'}\int_I f\,dxdy$ peut être assimilée, à une erreur $\varepsilon/2$ près, à la somme de Riemann

$$
\sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'}\int_{I'_{j'}}\int_{I_j} f(\xi_j,\xi'_{j'})dxdy = \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'} f(\xi_j,\xi'_{j'})|I_j|\,|I'_{j'}|.
$$

Évidemment, il en va de même pour l'intégrale $\int_I\int_{I'} f\,dxdy$, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&|\int_{I'}\int_I f(x,y)dxdy - \int_I\int_{I'} f(x,y)dydx| \\
&\leqslant \quad |\int_{I'}\int_I f(x,y)dxdy - \sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'} f(\xi_j,\xi'_{j'})|I_j|\,|I'_{j'}|| \\
&\quad +|\sum_{j=1}^{J}\sum_{j'=1}^{J'} f(\xi_j,\xi'_{j'})|I_j|\,|I'_{j'}| - \int_I\int_{I'} f(x,y)dydx| \\
&< \quad \varepsilon.
\end{aligned}
$$

La conclusion s'ensuit aussitôt. □

On peut dès lors introduire la notation

$$
\int_{I\times I'} f\,dxdy = \int_I\int_{I'} f\,dxdy.
$$

On parle d'intégrale double sur l'intervalle compact $I\times I'$. On introduit de la même manière les intégrales multiples ; par exemple, pour les intégrales triples, on pose

$$
\int_{I\times I'\times I''} f\,dxdydz = \int_I\int_{I'}\int_{I''} f\,dxdydz,
$$

ou simplement $\int_{I\times I'\times I''} f\,dx$.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction sur un ensemble compact.

Définition 2.1.2 Une fonction f continue sur un compact K de $\mathbb{R}^d$ est intégrable sur cet ensemble si la fonction $f\chi_K$ est intégrable sur I, où I est un intervalle compact contenant K.

On écrit alors
$$\int_K f\,dx = \int_I f\chi_K\,dx.$$
Sans autre moyen à notre disposition, il peut être très malaisé de calculer l'intégrale d'une fonction sur un compact.

2.1.2 Théorème d'intervertion des dérivées

Le théorème fondamental permet d'obtenir le théorème d'intervertion des dérivées.

Théorème 2.1.3 *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$; si f est de classe C^2 sur $I \times J$, alors $D_1D_2f = D_2D_1f$.*

Démonstration. Puisqu'il s'agit de considérations locales, on peut supposer avoir affaire à des intervalles compacts : $I = [a,b]$, $J = [c,d]$. Le théorème fondamental permet d'écrire
$$\begin{aligned}\int_a^u \int_c^v D_2D_1f(x,y)dydx &= \int_a^u D_1f(x,v) - D_1f(x,c)dx \\ &= f(u,v) - f(a,v) - f(u,c) + f(a,c).\end{aligned}$$
De la même manière, on trouve
$$\begin{aligned}\int_a^u \int_c^v D_1D_2f(x,y)dydx &= \int_c^v \int_a^u D_1D_2f(x,y)dxdy \\ &= f(u,v) - f(u,c) - f(a,v) + f(a,c).\end{aligned}$$
De là, la fonction
$$g = D_2D_1f - D_1D_2f$$
sur $[a,b]\times[c,d]$ est telle que
$$\int_a^u \int_c^v g(x,y)dydx = 0.$$
En dérivant par rapport à u, puis par rapport à v, on obtient $g = 0$. □

2.1.3 Dérivation des intégrales paramétriques : cas où l'ensemble d'intégration varie

Théorème 2.1.4 *Soit I, Λ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et*
$$f_\cdot(\cdot) : I \times \Lambda \to \mathbb{C} \quad (x,\lambda) \mapsto f_\lambda(x)$$
une fonction continue telle que $D_\lambda f_\lambda(x)$ soit continu. Si a et b sont deux fonctions dérivables de I dans Λ, alors la fonction
$$\lambda \mapsto \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f_\lambda(x)dx$$
est dérivable et on a
$$D\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f_\lambda(x)dx = f_\lambda(b(\lambda))Db(\lambda) - f_\lambda(a(\lambda))Da(\lambda) + \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} D_\lambda f_\lambda(x)dx.$$

Démonstration. Quitte à considérer la différence, on peut considérer avoir affaire à une fonction constante pour a. Soit

$$F : I \times \Lambda \to \mathbb{R} \quad (t, \lambda) \mapsto F(t, \lambda) = \int_a^t f_\lambda(x)dx.$$

Puisque f est une fonction continue, $F(\cdot, \lambda)$ est une fonction de classe C^1 telle que

$$D_t F(\cdot, \lambda) = f_\lambda,$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$. Le théorème de dérivation des intégrales paramétriques permet quant à lui d'affirmer que l'on a

$$D_\lambda F(t, \lambda) = \int_a^t D_\lambda f_\lambda(x)dx.$$

Montrons que F est de classe C^1 sur $I \times \Lambda$. Soient (t, λ) un point de $I \times \Lambda$ et (h_1, h_2) un point du plan tel que $(t + h_1, \lambda + h_2)$ soit encore un point de $I \times \Lambda$. Il vient

$$\begin{aligned} D_\lambda F(t + h_1, \lambda + h_2) - D_\lambda F(t, \lambda) &= \int_a^{t+h_1} D_\lambda f_{\lambda+h_2}(x)dx - \int_a^t D_\lambda f_\lambda(x)dx \\ &= \int_a^t D_\lambda f_{\lambda+h_2}(x) - D_\lambda f_\lambda(x)dx \\ &\quad + \int_t^{t+h_1} D_\lambda f_{\lambda+h_2}(x)dx. \end{aligned}$$

La première intégrale de la dernière somme tend vers zéro avec h_2, grâce à la continuité uniforme de $D_\lambda f$ dans $[a, t] \times K$, où K est un ensemble compact de Λ contenant λ. La seconde tend vers zéro avec h_1, l'intégrand étant borné au voisinage de (t, λ). La fonction $D_t F(\cdot, \lambda)$ étant aussi continue, F est une fonction de classe C^1 sur $I \times \Lambda$. La formule de dérivation des fonctions composées donne alors

$$D \int_a^{b(\lambda)} f_\lambda(x)dx = D_\lambda F((b(\lambda), \lambda) + D_t F((b(\lambda), \lambda) D_\lambda b(\lambda),$$

ce qui permet de conclure. □

Exercice 2.1.5 Calculer

$$\int_0^t \frac{\ln(1 + tx)}{1 + x^2} dx,$$

pour tout $t \geqslant 0$.
Suggestion. Pour $t \geqslant 0$, on vérifie directement que l'intégrale

$$f(t, u) = \int_0^u \frac{\ln(1 + tx)}{1 + x^2} dx$$

a un sens pour tout $u \geqslant 0$. Soit $U =]0, +\infty[^2$ et vérifions que f est de classe C^1 sur U. Pour tout $t > 0$, la fonction

$$\frac{\ln(1 + tx)}{1 + x^2}$$

est continue sur $[0,+\infty[$. Dès lors, f est dérivable par rapport à u sur $]0,+\infty[$ et on a

$$D_u f(t,u) = \frac{\ln(1+tu)}{1+u^2},$$

pour $t > 0$. Maintenant, pour $u > 0$, le théorème de dérivation des intégrales paramétriques permet d'affirmer que l'on a

$$D_t f(t,u) = \int_0^u \frac{x}{(1+x^2)(1+tx)} dx.$$

Il reste à constater que $D_u f$ et $D_t f$ sont continus sur U. Pour $D_u f$, c'est immédiat ; en ce qui concerne $D_t f$, cela découle du théorème de la convergence dominée. On peut dès lors écrire

$$\begin{aligned} D_t \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx &= D_t f(t,t) \\ &= \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + \int_0^t \frac{x}{(1+x^2)(1+tx)} dx. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{x}{(1+x^2)(1+tx)} dx &= \int_0^t \frac{-t}{1+t^2}\frac{1}{1+tx} + \frac{1}{1+t^2}\frac{x+t}{1+x^2} dx \\ &= \frac{-1}{1+t^2}[\ln(1+tx)]_0^t + \frac{t}{1+t^2}[\operatorname{arctg}(x)]_0^t \\ &\quad + \frac{1}{2(1+t^2)}[\ln(1+x^2)]_0^t \\ &= \frac{-\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^2}\operatorname{arctg}(t), \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$D_t \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx = \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^2}\operatorname{arctg}(t).$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx &\approx \int \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} dt + \int \operatorname{arctg}(t) D(\frac{1}{2}\ln(1+t^2)) dt \\ &\approx \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t)\ln(1+t^2). \end{aligned}$$

Par le théorème de la convergence dominée ou monotone, l'intégrale considérée tend vers 0 lorsque t tend vers 0^+. On en conclut que l'on a

$$\int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t)\ln(1+t^2).$$

2.2 Intégration sur un ensemble quelconque

Pour aborder un cadre plus général, il nous faut quitter la théorie de l'intégration de Darboux. Nous le ferons par l'intermédiaire de résultats admis.

2.2.1 Définition, théorèmes de Fubini et Tonelli

Nous n'allons pas nous attarder sur la définition rigoureuse d'une intégrale sur un ensemble quelconque, puisque ces notions seront généralisées par l'intégrale de Lebesgue. Nous dirons qu'une fonction f continue sur un ensemble E est intégrable sur E si

$$\sup_{K \subset\subset E} \int_K |f| \, dx$$

est fini, le supremum étant pris sur tous les compacts K inclus dans E. Cette définition mène à la notion d'intégrale pour une fonction positive : la quantité qui précède est l'intégrale de f, pour autant que f soit positif. On recourt à la décomposition canonique pour l'intégrale d'une fonction en toute généralité ; on a donc

$$\int_E f \, dx = \int_E (\Re f)^+ \, dx - \int_E (\Re f)^- \, dx + i \int_E (\Im f)^+ \, dx - i \int_E (\Im f)^- \, dx.$$

L'intégrale de f sur E se note bien entendu $\int_E f \, dx$. On vérifie que cette définition préserve le caractère linéaire de l'intégrale.

Soit d un nombre entier strictement supérieur à 1, d' un nombre entier non nul strictement inférieur à d et $d'' = d - d'$. Si π est une permutation de $\{1, \ldots, d\}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$x' = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(d')}) \quad \text{et} \quad x'' = (x_{\pi(d'+1)}, \ldots, x_{\pi(d)}).$$

De cette manière, on peut écrire $x = (x', x'')$ et si f est une fonction définie en x, on pose $f(x', x'') = f(x)$. Si E est une partie de $\mathbb{R}^d$ et x' un point de $\mathbb{R}^{d'}$, considérons la projection

$$E_{x'} = \{x'' \in \mathbb{R}^{d''} : (x', x'') \in E\}.$$

De même, si x'' est un point de $\mathbb{R}^{d''}$, on pose

$$E^{x''} = \{x' \in \mathbb{R}^{d'} : (x', x'') \in E\}.$$

Il s'agit de parties de $\mathbb{R}^{d''}$ et de $\mathbb{R}^{d'}$ respectivement. Enfin, il est naturel d'écrire

$$E_{\mathbb{R}^{d'}} = \{x'' \in \mathbb{R}^{d''} : \text{ il existe } x' \in \mathbb{R}^{d'} \text{ tel que } (x', x'') \in E\}$$

et

$$E^{\mathbb{R}^{d''}} = \{x' \in \mathbb{R}^{d'} : \text{ il existe } x'' \in \mathbb{R}^{d''} \text{ tel que } (x', x'') \in E\}.$$

Si f est une fonction définie sur E, pour x'' fixé, on peut ainsi considérer la fonction

$$f(\cdot, x'') : E^{x''} \to \mathbb{C} \quad x' \mapsto f(x', x'').$$

De même, pour x' fixé, la fonction

$$f(x', \cdot) : E_{x'} \to \mathbb{C} \quad x'' \mapsto f(x', x'')$$

est bien définie. On peut alors énoncer le théorème de Fubini, relatif à la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 2.2.1 *Si f est une fonction intégrable sur E, alors pour presque tout x'' appartenant à $E_{\mathbb{R}^{d'}}$, $x' \mapsto f(x', x'')$ est intégrable sur $E^{x''}$, $x'' \mapsto \int_{E^{x''}} f(x', x'')dx'$ est intégrable sur $E_{\mathbb{R}^{d'}}$ et*

$$\int_E f\,dx = \int_{E_{\mathbb{R}^{d'}}} \int_{E^{x''}} f(x', x'')dx'dx''. \tag{2.1}$$

L'égalité (2.1) est appelé réduction de l'intégrale $\int_E f\,dx$. Bien sûr, ce résultat est toujours valide si on remplace $E_{\mathbb{R}^{d'}}$ et $E^{x''}$ par $E^{\mathbb{R}^{d''}}$ et $E_{x'}$ respectivement.

Il n'en reste pas moins que nous n'avons toujours pas de critère d'intégration dans le cadre général. Le résultat suivant, attribué à Tonelli, règle partiellement la question.

Théorème 2.2.2 *Si f est une fonction mesurable sur une partie E de $\mathbb{R}^d$ telle que $|f(\cdot, x'')|$ est intégrable sur $E^{x''}$ pour presque tout $x'' \in E_{\mathbb{R}^{d'}}$ et si*

$$x'' \mapsto \int_{E^{x''}} |f(x', x'')|dx'$$

est intégrable sur $E_{\mathbb{R}^{d'}}$, alors f est intégrable sur E.

Remarquons que les hypothèses de ce résultat, issu de la théorie de l'intégration de Lebesgue, porte sur $|f|$ et non sur f.

Corollaire 2.2.3 *Si g est une fonction intégrable sur A et h une fonction intégrable sur B, alors la fonction f définie par*

$$f : A \times B \to \mathbb{C} \quad (x, y) \mapsto g(x)h(y)$$

est intégrable sur $A \times B$.

2.2.2 Mesure d'un ensemble

Définition 2.2.4 Un ensemble E de $\mathbb{R}^d$ est intégrable si la fonction χ_E est intégrable sur l'espace tout entier. Dans ce cas, sa mesure est la quantité

$$|E| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E\,dx.$$

Définition 2.2.5 Un ensemble est négligeable s'il est mesurable et de mesure nulle.

On utilise la locution « presque partout » pour signifier « à l'exception d'un ensemble négligeable ».

À titre d'exemple, calculons par réduction la mesure du disque

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\},$$

avec $R > 0$. L'ensemble étant compact, l'intégrabilité ne pose pas de problème. Bien entendu, on a $B_{\mathbb{R}} = [-R, R]$ et pour tout $y \in [-R, R]$,

$$B^y = [-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}].$$

On obtient dès lors

$$\begin{aligned} |B| &= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dxdy = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,dy = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos^2(t)dt \\ &= R^2[t+\frac{\sin^2(2t)}{2}]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi R^2, \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $x = R\sin(t)$. Le cas de la boule de $\mathbb{R}^3$ se traite de même.

Exemple 2.2.6 Soit $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$, avec $R > 0$. On a $B_{\mathbb{R}^2} = [-R,R]$ et pour tout $z \in [-R,R]$, $B^z = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2\}$. Cet ensemble étant un disque de rayon $\sqrt{R^2-z^2}$, il vient

$$|B| = \int_{-R}^{R}(\int_{B^z} dxdy)dz = \int_{-R}^{R}\pi(R^2-z^2)dz = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Soit x un point de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\chi_{\{x\}}$ est majoré par χ_{I_ε}, où I_ε est un intervalle de coté $\sqrt[d]{\varepsilon}$ contenant x. Dès lors, L'intégrale de $\chi_{\{x\}}$ est majorée par ε, ce qui implique $|\{x\}| = 0$ pour tout point, *i.e.* un point de $\mathbb{R}^d$ est négligeable.

Exemple 2.2.7 Soit l'hyperplan

$$H = \{x = (x_1,\ldots,x_d) : x_d = 0\},$$

avec $d > 1$ et considérons les $d-1$ premières composantes. On a $H_{\mathbb{R}^{d-1}} = \{0\}$ (et $H^0 = \mathbb{R}^{d-1}$), ce qui implique

$$|H| = 0. \tag{2.2}$$

Exercice 2.2.8 Établir que l'intégrale

$$\int_{]0,+\infty[^2} e^{-y(1+x^2)}dxdy$$

a un sens et obtenir sa valeur.
Suggestion. L'intégrand est continu et positif sur $E =]0,+\infty[^2$. Qui plus est, on a $E^{\mathbb{R}} =]0,+\infty[$ et $E_x =]0,+\infty[$, pour tout $x \in E^{\mathbb{R}}$. De là, pour un tel x, la fonction

$$y \mapsto e^{-y(1+x^2)}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$, car elle est continue, positive sur cet intervalle et une de ses primitives, à savoir

$$-\frac{e^{-y(1+x^2)}}{1+x^2},$$

admet des limites finies au bord de l'intervalle. Qui plus est, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}dy = \frac{1}{1+x^2}.$$

On vérifie directement que le membre de droite est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Les théorèmes de Tonelli et Fubini impliquent alors que l'intégrale de départ a un sens et est égale à $\pi/2$.

2.2.3 Permutation de l'ordre d'intégration

En pratique, on est parfois amené à calculer une intégrale sous forme réduite pour laquelle on ne peut appliquer les méthodes de calcul acquises ici. Dans ce cas, une permutation de l'ordre d'intégration peut s'avérer une stratégie payante ; il s'agit simplement de considérer l'intégrale sous une autre forme réduite.

Exercice 2.2.9 Établir que, pour tout $x > 0$, la fonction e^{-y}/y est intégrable sur $]x, +\infty[$ et que la fonction

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. Enfin, obtenir la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy dx.$$

Suggestion. Le fonction e^{-y}/y est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$\lim_{y \to +\infty} y^2 \frac{e^{-y}}{y} = 0,$$

ce qui implique son intégrabilité sur $]x, +\infty[$, pour tout $x > 0$. Pour obtenir l'intégrabilité de $\int_x^{+\infty} e^{-y} y^{-1} dy$, on peut appliquer les critères usuels, mais la méthode qui suit permet d'écourter les calculs. Soit $E = \{(x, y) : 0 < x \leqslant y\}$. Pour tout $y > 0$, e^{-y}/y est intégrable par rapport à x sur $]0, y]$ (il s'agit d'une fonction étagée) et

$$\int_0^y \frac{e^{-y}}{y} dx = e^{-y}.$$

On vérifie alors directement que la fonction e^{-y} est intégrable par rapport à y sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de Tonelli, e^{-y}/y est intégrable sur E. Par le théorème de Fubini, on obtient alors l'intégrabilité de e^{-y}/y sur $]x, +\infty[$ pour presque tout $x > 0$ (ce que nous savions déjà), l'intégrabilité de $\int_x^{+\infty} e^{-y} y^{-1} dy$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy dx = \int_0^{+\infty} \int_0^y \frac{e^{-y}}{y} dx dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1.$$

Exercice 2.2.10 Soit $R > 0$; permuter l'ordre d'intégration dans

$$\int_0^{2R} \int_{\sqrt{2Rx - x^2}}^{\sqrt{2Rx}} f(x, y) dy dx.$$

Suggestion. Remarquons qu'il s'agit là de la réduction de $\int_E f dx dy$, où la projection de E sur l'axe des x est $]0, 2R[$ et où, pour tout x appartenant à cet intervalle, la section de E en x vaut $]\sqrt{2Rx - x^2}, \sqrt{2Rx}[$. Or,

$$\{(x, \sqrt{2Rx - x^2}) : x \in]0, 2R[\}$$

est une partie de la circonférence d'équation $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, c'est-à-dire la circonférence de centre $(R, 0)$ et de rayon R. De même,

$$\{(x, \sqrt{2Rx}) : x \in]0, 2R[\}$$

est une partie de la parabole $2Rx = y^2$. De là $E_{\mathbb{R}} =]0, 2R[$ et

$$E^y = \begin{cases}]\dfrac{y^2}{2R}, R - \sqrt{R^2 - y^2}[\cup]R + \sqrt{R^2 - y^2}, 2R[& \text{si } 0 < y < R \\ ]\dfrac{y^2}{2R}, 2R[& \text{si } R \leqslant y < 2R \end{cases}.$$

Une autre manière de procéder consiste à écrire

$$E_{\mathbb{R}} = \bigcup_{0 \leqslant x \leqslant 2R} [\sqrt{2Rx - x^2}, \sqrt{2Rx}],$$

pour pouvoir obtenir, grâce à une étude des fonctions $\sqrt{2Rx - x^2}$ et $\sqrt{2Rx}$, $E_{\mathbb{R}} =]0, 2R[$. Pour déterminer E^y, soit $y \in]0, 2R[$ et considérons le système d'équations

$$\begin{cases} 0 < x < 2R \\ \sqrt{2Rx - x^2} < y < \sqrt{2Rx} \end{cases}$$

par rapport à x. Vu la règle régissant le signe d'un trinôme du second degré, l'inégalité $x^2 - 2Rx + y^2 > 0$ est vérifiée pour tout x lorsque $R < y < 2R$ et pour x appartenant à

$$]-\infty, R - \sqrt{R^2 - y^2}[\cup]R + \sqrt{R^2 - y^2}, +\infty[,$$

lorsque $0 < y < R$. Pour $y \in]0, R[$, il faut donc résoudre le système d'inéquations

$$\begin{cases} 0 < x < 2R \\ x < R - \sqrt{R^2 - y^2} \text{ ou } x > R + \sqrt{R^2 - y^2} \\ \dfrac{y^2}{2R} < x \end{cases},$$

ce qui donne

$$E^y =]\frac{y^2}{2R}, R - \sqrt{R^2 - y^2}[\cup]R + \sqrt{R^2 - y^2}, 2R[.$$

Pour $y \in]R, 2R[$, c'est le système

$$\begin{cases} 0 < x < 2R \\ \dfrac{y^2}{2R} < x \end{cases},$$

qu'il faut considérer pour obtenir

$$E^y =]\frac{y^2}{2R}, 2R[.$$

Au total, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2R} \int_{\sqrt{2Rx - x^2}}^{\sqrt{2Rx}} f(x, y) dy dx &= \int_0^R \int_{y^2/(2R)}^{R - \sqrt{R^2 - y^2}} f(x, y) dx dy \\ &+ \int_0^R \int_{R + \sqrt{R^2 - y^2}}^{2R} f(x, y) dx dy \\ &+ \int_R^{2R} \int_{y^2/(2R)}^{2R} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Remarquons que, dans le calcul de $\int_E f dxdy$ par réduction ou par permutation de l'ordre d'intégration, il est essentiel que la fonction f soit intégrable sur E. En particulier, il n'est pas suffisant d'imposer l'intégrabilité de f sur E^y pour presque tout $y \in E_{\mathbb{R}^{d'}}$ et l'intégrabilité de $\int_{E^y} f dx$ sur $E_{\mathbb{R}^{d'}}$ (sauf bien sûr si f est une fonction positive, auquel cas f est intégrable sur E, par application du théorème de Tonelli). Considérons par exemple la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Sur son domaine de définition, on a

$$f(x,y) = D_x \frac{-x}{x^2+y^2} = D_y \frac{y}{x^2+y^2}$$

et $f(\cdot, y)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $y \in]0,1[$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = [\frac{-x}{x^2+y^2}]_0^1 = \frac{-1}{1+y^2}.$$

Cette fonction est intégrable sur $]0,1[$ et il vient

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

De la même manière, on vérifie que $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $x \in]0,1[$, avec

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = [\frac{y}{x^2+y^2}]_0^1 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque cette fonction est intégrable sur $]0,1[$, on peut écrire

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dydx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Dans ce cas, on ne peut donc permuter les intégrales ! La raison en est simple : f n'est pas intégrable sur $]0,1[^2$. Montrons que l'intégrale $\int_{]0,1[^2} |f| dxdy$ n'a pas sens. Si c'était le cas, l'intégrale pourrait être réduite. Or, pour tout $x \in]0,1[$, on trouve aisément

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x,y)| dy &= \int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy + \int_x^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dy \\
&= [\frac{y}{x^2+y^2}]_0^x - [\frac{y}{x^2+y^2}]_x^1 \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

On peut conclure, cette fonction n'étant pas intégrable sur $]0,1[$.

2.3 Changement de variable

2.3.1 Théorème du changement de variable

Le théorème du changement de variable est un résultat délicat de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 2.3.1 *Si $x(x')$ est un CVR d'ordre $p \geqslant 1$ entre les ouverts U et U' de $\mathbb{R}^d$, alors f est intégrable sur U si et seulement si*

$$f(x(x'))\,|\mathrm{dtm}\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)|$$

est intégrable sur U', auquel cas, on a

$$\int_U f\,dx = \int_{U'} f(x(x'))\,|\mathrm{dtm}\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)|\,dx'.$$

Remarquons directement que ce résultat implique celui obtenu dans le cas unidimensionnel. Si on a $Dx' > 0$, la fonction x' est strictement croissante et si $I =]a, b[$, il vient

$$\int_a^b f\,dx = \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x))\,|Dx'(x)|\,dx = \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x))\,Dx'(x)dx.$$

Si $Dx' < 0$, x' est strictement décroissant et on peut écrire, avec les mêmes notations,

$$\int_a^b f\,dx = \int_{x'^{-1}(b)}^{x'^{-1}(a)} f(x'(x))\,|Dx'(x)|\,dx = \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x))\,Dx'(x)dx.$$

2.3.2 Exemples

Si A est une matrice réelle non-singulière de type $d \times d$ et si a est un point de $\mathbb{R}^d$, $x = Ax' + a$ est un CVR d'ordre infini entre $\mathbb{R}^d$ et lui-même. Une fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $|\mathrm{dtm}A|f(A \cdot +a)$ l'est, auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,dx = |\mathrm{dtm}A| \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax + a)dx.$$

Il s'ensuit que si E est une partie intégrable de $\mathbb{R}^d$, alors $AE + a$ également et $|AE + a| = |\mathrm{dtm}A||E|$. En particulier,

— les translations préservent l'intégrabilité et la mesure d'un ensemble,

— les rotations préservent l'intégrabilité et la mesure d'un ensemble.

Proposition 2.3.2 *Tout hyperplan de l'espace euclidien est négligeable.*

Démonstration. Cela découle des considérations qui précèdent et de l'égalité (2.2). □

Exercice 2.3.3 Démontrer le résultat précédent par induction, en réduisant l'intégrale.

Envisageons le passage aux coordonnées polaires dans le plan. Il nous faut donc considérer le CVR

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

d'ordre infini entre

$$U_{\theta_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) : r \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad U'_{\theta_0} =]0, +\infty[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[,$$

θ_0 étant un nombre quelconque. Le module du jacobien vaut

$$\left|\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)\right| = \left|\begin{array}{cc} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{array}\right| = r.$$

Une demi-droite étant une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$, U_{θ_0} est égal presque partout à $\mathbb{R}^2$ et le théorème du changement de variable permet d'affirmer qu'une fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $(r,\theta) \mapsto rf(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est intégrable sur U'_{θ_0}, auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, dxdy = \int_0^{+\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} rf(r\cos(\theta), r\sin(\theta))d\theta dr.$$

Exemple 2.3.4 Considérons le disque de rayon $R > 0$, $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Cet ensemble est égal presque partout à

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{(x,0) : x \geqslant 0\}$$

et un passage en coordonnées polaires transforme cet ensemble en l'intervalle $]0,R[\times]0,2\pi[$. On a donc

$$|B| = \int_0^R \int_0^{2\pi} rd\theta dr = \pi R^2,$$

comme attendu.

Exemple 2.3.5 Calculons la mesure de l'ellipse

$$E_{a,b} = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\},$$

avec $a, b > 0$. Cet ensemble étant compact, il est intégrable. Avec le changment de variable linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

l'ellipse devient

$$B_1 = \{(x',y') : x'^2 + y'^2 \leqslant 1\},$$

c'est-à-dire le disque centré à l'origine et de rayon unité. On a donc

$$|E_{a,b}| = \int_B ab\, dx'dy' = \pi ab.$$

Remarquons que l'on peut combiner le changement de variable linéaire et le passage aux coordonnées polaires en considérant directement le CVR

$$\left\{\begin{array}{l} x = ar\cos(\theta) \\ y = br\sin(\theta) \end{array}\right. .$$

Exemple 2.3.6 Étant donné $\gamma > 1$, $0 < c_1 < c_2$ et $0 < c'_1 < c'_2$, calculer la mesure de l'ensemble

$$A = \{(v,p) : c_1 \leqslant pv \leqslant c_2,\ c'_1 \leqslant pv^\gamma \leqslant c'_2\}.$$

On vérifie d'abord que

$$\left\{\begin{array}{ll} pv & = x \\ pv^\gamma & = y \end{array}\right.$$

est un CVR d'ordre infini entre $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et lui-même, qui s'inverse en

$$\left\{\begin{array}{ll} v & = (y/x)^{1/(\gamma-1)} \\ p & = x^{\gamma/(\gamma-1)}y^{-1/(\gamma-1)} \end{array}\right.$$

Ce CVR transforme A en $[c_1, c_2] \times [c_1', c_2']$. De plus, on a

$$\left|\left(\frac{\partial(p,v)}{\partial(x,y)}\right)\right| = \left|\left[\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,v)}\right)\right]_{(p(x,y),v(x,y))}\right|^{-1} = \frac{1}{(\gamma-1)y},$$

ce qui permet d'écrire

$$|A| = \int_{c_1}^{c_2}\int_{c_1'}^{c_2'} \frac{dydx}{(\gamma-1)y} = \frac{c_2-c_1}{\gamma-1}\ln(c_2'/c_1').$$

Une application directe du passage aux coordonnées polaires est le théorème de Poisson.

Théorème 2.3.7 *Pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Démonstration. On vérifie trivialement que $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ est une fonction continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$. Le théorème de Tonelli permet alors d'affirmer que la fonction

$$(x,y) \mapsto f(x)f(y) = e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[^2$. Un passage aux coordonnées polaires procure les inégalités

$$\begin{array}{rcl} (\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx)^2 & = & \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y^2}dy \\ & = & \int_{]0,+\infty[^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}dxdy \\ & = & \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} re^{-\lambda r^2}d\theta dr \\ & = & \frac{\pi}{2}[-\frac{e^{-\lambda r^2}}{2\lambda}]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\lambda}, \end{array}$$

d'où la conclusion. □

Envisageons maintenant le passage aux coordonnées polaires dans l'espace euclidien à trois dimensions. Il nous faut cette fois-ci considérer la CVR

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{array}\right.$$

d'ordre infini entre

$U_{\theta_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0), z) : r \geqslant 0,\ z \in \mathbb{R}\}$ et $U'_{\theta_0} =]0, +\infty[\times]0,\pi[\times]\theta_0, \theta_0+2\pi[$,

θ_0 étant un nombre quelconque. Le module du jacobien vaut

$$\left|\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right)\right| = \begin{vmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin(\theta).$$

Un demi-plan étant une partie négligeable de $\mathbb{R}^3$, U_{θ_0} est égal presque partout à $\mathbb{R}^3$ et le théorème du changement de variable permet d'affirmer qu'une fonction $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto r^2\sin(\theta) f(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

est intégrable sur U'_{θ_0}, auquel cas, on a

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} f\,dxdydz \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} r^2\sin(\theta) f(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))d\varphi d\theta dr.\end{aligned}$$

Exemple 2.3.8 Considérons la mesure de la boule B de rayon $R > 0$,

$$B_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}.$$

On constate que la boule B est égale presque partout à

$$\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\} \setminus \{(x,0,z) : x \geqslant 0,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Par un passage aux coordonnées polaires, cet ensemble se transforme en $]0,R[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$. La mesure de la boule vaut donc

$$|B| = \int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin(\theta)d\varphi d\theta dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exemple 2.3.9 Étant donné trois nombres réels strictement positifs a, b et c, calculer la mesure de l'ellipsoïde

$$E_{a,b,c} = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}.$$

Le changement de variable linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

transforme $E_{a,b,c}$ en la boule de rayon unité. Il s'ensuit que $E_{a,b,c}$ est intégrable (ce que l'on savait déjà puisque $E_{a,b,c}$ est compact) et que l'on a

$$|E_{a,b,c}| = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Exemple 2.3.10 Étant donné deux nombres réels r et R tels que $0 < r < R$, calculons la mesure du tore

$$T = \{(x, y, z) : d((x, y, z), C) \leqslant r\},$$

où

$$C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0\}.$$

Le changement de variable à opérer paraîtra plus naturel si on se remémore le représentation géométrique suivante du tore : il s'agit de l'ensemble des points obtenu par la rotation du disque

$$\{(x, y, z) : (x - R)^2 + z^2 \leqslant r^2,\ y = 0\}$$

autour de l'axe des coordonnées z.

Il suffit ensuite de vérifier que

$$\begin{cases} x = (R + \rho\cos(\theta))\cos(\varphi) \\ y = (R + \rho\cos(\theta))\sin(\varphi) \\ z = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

est un CVR d'ordre infini entre un ensemble égal à T presque partout et

$$\{(\rho, \theta, \varphi) : 0 < \rho < r,\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Le jacobien vaut

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right) \right| &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) & -(R + \rho\cos(\theta))\sin(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & (R + \rho\cos(\theta))\cos(\varphi) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= |-\rho(R + \rho\cos(\theta))|, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$|T| = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(R + \rho\cos(\theta))\,d\varphi\,d\theta\,d\rho = 2\pi^2 r^2 R.$$