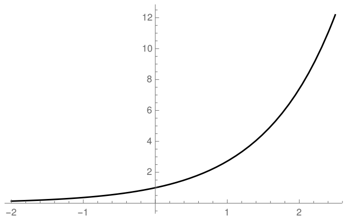
FORMULAIRE SUR LES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Ce formulaire est destiné aux étudiants en bloc 1 des bacheliers en sciences mathématiques et physiques. Il reprend quelques résultats de base sur les fonctions élémentaires qui devraient être connus à la fin du secondaire, et ce afin de les exploiter lors des résolutions d'exercices. Le formulaire est mis à disposition des étudiants en attendant que ces fonctions élémentaires soient revues de façon rigoureuse au cours d'Analyse I, partie 2.

1 Fonctions exponentielles et logarithmiques

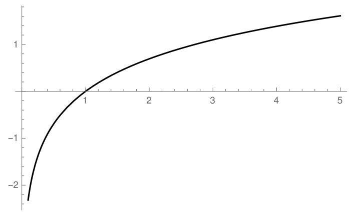
1.1 Exponentielle en base $e = 2.718281...$ (e est irrationnel)



$$\exp\ :\ x \mapsto e^x$$

Domaines et image : définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, à image dans $]0, +\infty[$.
Dérivée : $D_x \exp(x) = \exp(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Identités remarquables : $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Limites : $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
Valeurs remarquables : $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.

1.2 Logarithme népérien (logarithme en base e)

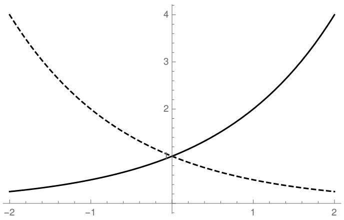


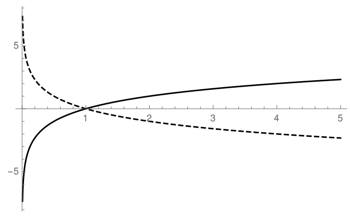
$$\ln\ :\ x \mapsto \ln(x)$$

Domaines et image : définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, à image dans $\mathbb{R}$.
Dérivée : $D_x \ln(x) = \frac{1}{x}\ \forall x \in]0, +\infty[$.
Identités remarquables : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ et $\ln(x^a) = a\ln(x)$ $\forall x, y \in]0, +\infty[, a \in \mathbb{R}$.
Réciprocités : $\exp(\ln(x)) = x\ \forall x \in]0, +\infty[$ et $\ln(\exp(x)) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Valeurs remarquables : $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.

1.3 Exponentielles et logarithmes en base $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

On peut définir l'exponentielle en base $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $a^{(\cdot)} \; : \; x \mapsto \exp(x \ln(a))$ et le logarithme en base a par $\log_a \; : \; x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Les propriétés de base se déduisent des fonctions exp et ln. À titre d'exemples, nous donnons une représentation graphique des fonctions exponentielles (à gauche) et logarithmiques (à droite) en base 2 (trait plein) et $\frac{1}{2}$ (trait pointillé).

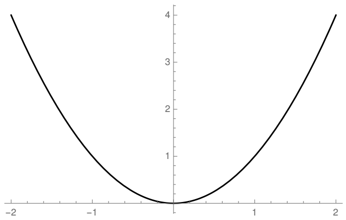




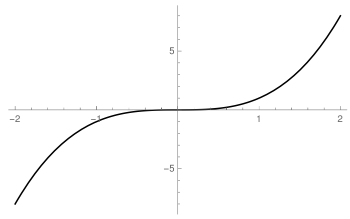
2 Fonctions puissances et racines naturelles

2.1 Fonction puissance $n \in \mathbb{N}_0$

On considère la fonction $x \mapsto x^n$, à titre d'exemple nous donnons une représentation graphique pour $n = 2$ et $n = 3$.



$\cdot^2 \; : \; x \mapsto x^2$



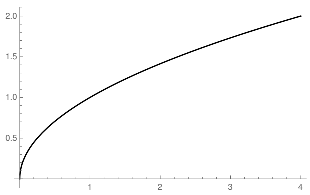
$\cdot^3 \; : \; x \mapsto x^3$

Domaines et image : définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, à image dans $[0,+\infty[$ si n est pair et dans $\mathbb{R}$ si n est impair.
Dérivée : $D_x x^n = n x^{n-1} \; \forall x \in \mathbb{R}$.
Limites : $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.

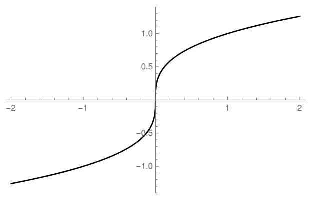
Parité : Fonction paire si n est pair, fonction impaire sinon.

2.2 Fonction racine $n \in \mathbb{N}_0$

On considère la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, à titre d'exemple nous donnons une représentation graphique pour $n = 2$ et $n = 3$.



$\sqrt{\cdot} \; : \; x \mapsto \sqrt{x}$



$\sqrt[3]{\cdot} \; : \; x \mapsto \sqrt[3]{x}$

Domaines et images :

— si n est pair : définie et continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$.

— si n est impair : définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_0$.

Dérivée : $D_x \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pour tout x dans le domaine de dérivabilité de $\sqrt[n]{\cdot}$.

Parité : Fonction impaire si n est impair.

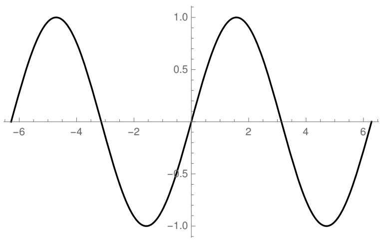
Réciprocités :

— si n est pair : $(\sqrt[n]{x})^n = x\ \forall x \in [0,+\infty[$ et $\sqrt[n]{x^n} = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.

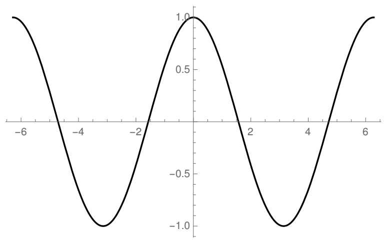
— si n est impair : $(\sqrt[n]{x})^n = x\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\sqrt[n]{x^n} = x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Fonctions sinus et cosinus



$\sin\ :\ x \mapsto \sin(x)$



$\cos\ :\ x \mapsto \cos(x)$

Domaines et image : définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, à image dans $[-1,1]$.

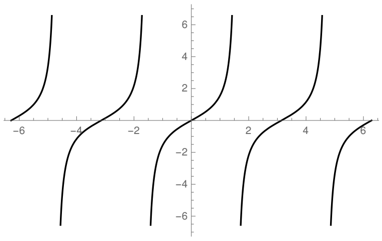
Dérivées : $D_x \sin(x) = \cos(x)$ et $D_x \cos(x) = -\sin(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Limites : Les fonctions sin et cos n'admettent pas de limite en $\pm\infty$.

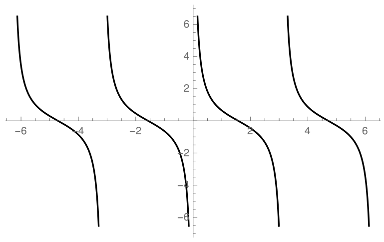
Parité : La fonction sin est impaire, la fonction cos est paire.

Périodicité : Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques.

3.2 Fonctions tangente et cotangente



$\tan\ :\ x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



$\cot\ :\ x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Domaines et image :

— la fonction tan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$, à image dans $\mathbb{R}$.

— la fonction cot est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$, à image dans $\mathbb{R}$.

Dérivées : $D_x \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ et $D_x \cot(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$ pour tout x dans les domaines de dérivation.

Limites : Les fonctions tan et cot n'admettent pas de limite en $\pm\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to(k\pi)^-} \cot(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to(k\pi)^+} \cot(x) = +\infty$$

Parité : Les fonctions tan et cot sont impaires.

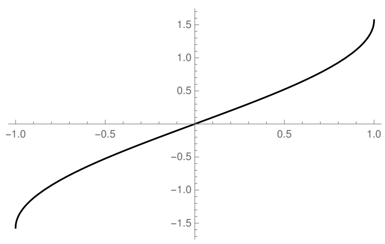
Périodicité : Les fonctions tan et cot sont π-périodiques.

3.3 Valeurs remarquables

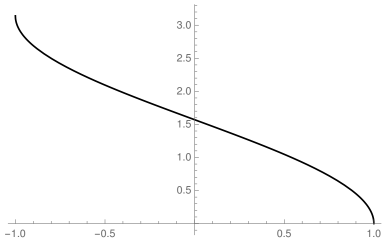
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cot	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4 Fonctions trigonométriques inverses

4.1 Fonctions arcsin et arccos



arcsin : $x \mapsto \arcsin(x)$

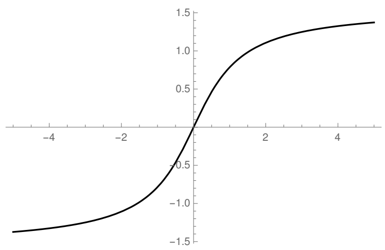


arccos : $x \mapsto \arccos(x)$

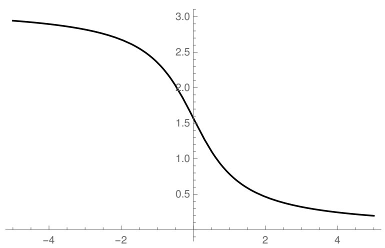
Domaines et images : définies et continues sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $]-1, 1[$, arcsin est à image dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et arccos est à image dans $[0, \pi]$.
Dérivées : $D_x \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $D_x \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in]-1, 1[$.
Parité : La fonction arcsin est impaire.
Réciprocités :

— $\sin(\arcsin(x)) = x$ $\forall x \in [-1, 1]$ et $\arcsin(\sin(x)) = x$ $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
— $\cos(\arccos(x)) = x$ $\forall x \in [-1, 1]$ et $\arccos(\cos(x)) = x$ $\forall x \in [0, \pi]$.

4.2 Fonctions arctan et arccot



arctan : $x \mapsto \arctan(x)$



arccot : $x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

Domaines et images : définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, arctan est à image dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et arccot est à image dans $]0, \pi[$.
Dérivées : $D_x \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $D_x \operatorname{arccot}(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Parité : La fonction arctan est impaire.
Réciprocités :

— $\tan(\arctan(x)) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\arctan(\tan(x)) = x$ $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
— $\cot(\operatorname{arccot}(x)) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{arccot}(\cot(x)) = x$ $\forall x \in]0, \pi[$.