1 Les nombres

1.1 Valeurs absolues, modules, parties positive et négative

Exercice 1.1.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $|x-2| = 3$

(b) $-4 = |x+6|$

(c) $|-3x+4| + |-5+x| = 10$

(d) $|x^2+x-6| = |x-2|$

(e) $|-2x+4| \leq 7$

(f) $5 \leq |3x+1|$

(g) $|2x-1| \leq |x+2|$

(h) $|x^4-3x^3+2x^2-1| > -1$

Exercice 1.1.2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $|3x-5| = |x+3|$

(b) $|8x^2+2x-3| = |2x-1|$

(c) $|6x^2-3x+2| < -|x+2|$

(d) $|4x+2| > 5$

(e) $|-3x^2+x| \leq |x^2-3|$

(f) $|3x+2| > |6x^3+7x^2-16x-12|$

Exercice 1.1.3. Si x et y sont des nombres réels, démontrer que

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice 1.1.4. Si x est un nombre réel et r un nombre réel strictement négatif, exprimer $(rx)^+$ en fonction de r, x^+ et x^-

Exercice 1.1.5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les inéquations suivantes :

(a) $|z-1| < |z-3|$

(b) $\frac{|z-3|}{|z-5|} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\frac{|z-2|}{2|z|} > 1$.

Exercice 1.1.6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les inéquations suivantes :

(a) $\frac{|z-5|}{|3z-1|} < \frac{3}{5}$

(b) $\frac{4}{|z+8|} \geq 1$

Exercice 1.1.7. Soient x, y, z des points de $\mathbb{C}$. Montrer que $|x-y| = |x-z| + |z-y|$ si et seulement s'il existe $r \in [0;1]$ tel que $z = rx + (1-r)y$.

1.2 Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1.2.1. Soit A est un ensemble de $\mathbb{R}$. Si m (resp. M) est un minorant (resp. majorant) de A et que $m \in A$ (resp. $M \in A$), montrer que $m = \inf A$ (resp. $M = \sup A$).

Exercice 1.2.2. Trouver, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants et établir si elles sont réalisées :

1. $A_1 = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$
2. $A_2 = \{(-1)^m/m : m \in \mathbb{N}_0\}$
3. $A_3 = \left\{2 - 1/m^2 : m \in \mathbb{N}_0\right\}$
4. $A_4 = \mathbb{N}$
5. $A_5 = \mathbb{Q}$
6. $A_6 =]0, +\infty[$
7. $A_7 = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} : p, q \in \mathbb{N}_0\}$
8. $A_8 = \{\frac{2xy}{x^2+y^2} : x, y \in \mathbb{R}_0\}$

Exercice 1.2.3. Trouver, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants et établir si elles sont réalisées :

(a) $\{(-1)^j + \dfrac{1}{j^2} : j \in \mathbb{N}_0\}$ (b) $\left\{\dfrac{(-1)^k k}{k+1} : k \in \mathbb{N}\right\}$ (c) $\{x^2 : x \in]-1, 1/2[\}$

Exercice 1.2.4. Trouver, si elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure de l'ensemble

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}]-\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}, \cos(j\frac{\pi}{2}) + 2].$$

Exercice* 1.2.5. Trouver, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants et établir si elles sont réalisées :

1. $A_1 = \left\{\frac{(-1)^j j}{(j+1)(j+2)} : j \in \mathbb{N}_0\right\}$
2. $A_2 = \{\sin(x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}[\}$
3. $A_3 = \{(1 + \frac{1}{j})^j : j \in \mathbb{N}_0\}$.

Exercice 1.2.6. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, posons $A + B = \{a + b : a \in A \,\text{et}\, b \in B\}$, $AB = \{ab : a \in A \,\text{et}\, b \in B\}$ et $-A = \{-a : a \in A\}$.

(a) Montrer que $A \subset B$ implique $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$. Qu'en est-il de la réciproque ?
(b) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
(c) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ et $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
(d) Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
(e) Montrer que si A et B sont inclus dans $]0, +\infty[$, alors on a $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$.
(f) En déduire des points précédents que si A et B sont deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que A est inclus dans $]0, +\infty[$ et B est inclus dans $]-\infty, 0[$ alors on a $\inf(AB) = \sup(A)\inf(B)$.

Exercice 1.2.7. Montrer que si E est un borné non vide de $\mathbb{R}$, alors

$$\sup\{|x - y| : x, y \in E\} = \sup\{x : x \in E\} - \inf\{x : x \in E\}.$$

Exercice 1.2.8. Soit $r \in \mathbb{R}$. Si A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, on pose $rA = \{ra : a \in A\}$, montrer que

$$\sup(rA) = \begin{cases} r \sup A & \text{si } r \geq 0 \\ \\ r \inf A & \text{si } r < 0 \end{cases}.$$

Exercice 1.2.9. Déterminer $\inf\{x^2 - y : 0 < x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y < 1\}$.

2 Les suites

2.1 Suites de base

Exercice 2.1.1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite $(a^j/j!)_{j\in\mathbb{N}_0}$.

Exercice 2.1.2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite $(a^j)_{j\in\mathbb{N}_0}$.

Exercice 2.1.3. Pour tout $a > 0$, étudier la convergence de la suite $(a^{1/j})_{j\in\mathbb{N}_0}$

Exercice 2.1.4. Étudier la convergence de la suite $(\sqrt[j]{j})_{j\in\mathbb{N}_0}$.

La connaissance de la convergence de ces quatre suites de base sera particulièrement précieuse dans les suites où beau nombre d'exemples seront construits à partir de celles-ci. De plus, les deux convergences suivantes peuvent être admises, avant d'être démontrée une fois les fonctions élémentaires connues :

$$\left(1+\frac{x}{j}\right)^j \nearrow e^x \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{x}{j+1}\right)^{j+1} \searrow e^x.$$

2.2 Études de convergence

Exercice 2.2.1. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$x_j = \frac{2j^2+5j+1}{3j^2+1}.$$

Exercice 2.2.2. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$x_j = j - \sqrt[5]{j^5+j^3}.$$

Exercice 2.2.3. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$x_j = x_j = \sqrt{j}\left(\sqrt{j+1}-\sqrt{j}\right).$$

Exercice 2.2.4. Établir la convergence de la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ lorsque

(a) $x_j = \dfrac{j^{8/3}-2j+1}{j^2-2}$

(b) $x_j = \dfrac{\sqrt[3]{8j^2+5j-2}}{\sqrt{j^3+2j+1}}$

(c) $x_j = \dfrac{j^2-3j-4}{2j^2-j+1}$

(d) $x_j = \dfrac{j^4-1}{j^4+2j^2+1}$

(e) $x_j = j - \sqrt[3]{j^2+j^3}$

(f) $x_j = \sqrt{j+\sqrt{j+\sqrt{j}}}-\sqrt{j}$

(g) $x_j = j\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{j}}-2\right)$

(h) $x_j = \dfrac{\sqrt[3]{j^3+j+1}-\sqrt{j^2+1}}{j}$

(i) $x_j = \dfrac{3}{j^2(2+\cos(j))}$

(j) $x_j = \dfrac{\sqrt{j}+(-1)^j}{\sqrt{j}-(-1)^j}$.

Exercice 2.2.5. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = \frac{1}{2j}+\frac{2i}{j^2}$.

Exercice 2.2.6. Etablir la convergence de la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ lorsque

(a) $x_j = \sqrt[j]{j^2}$

(b) $x_j = \sqrt[j^2]{j!}$

(c) $x_j = \sqrt[j]{\ln(j)}$

(d) $x_j = \sqrt[j!]{j^j}$

(e) $x_j = \sqrt[j^2]{j!}$

(f) $x_j = \dfrac{(j+2)!}{(j^2+1)j!}$

(g) $x_j = \dfrac{(j!)^2}{(2j)!}$

(h) $x_j = \dfrac{j!}{j^j}$

Exercice 2.2.7. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$x_j = \frac{\sin(j)}{j^j+(-1)^{j+1}j!}.$$

Exercice 2.2.8. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à,

$$x_j = \sqrt[j]{\sin(j\pi/1024)+n}$$

où n est un nombre naturel non nul.

Exercice 2.2.9. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \ln(j)\cos(\frac{1}{j})\frac{a^j}{j!}$$

où a est un nombre réel.

Exercice 2.2.10. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{j}}(a-1)^j\cos(j\frac{\pi}{2})$$

où a est un nombre réel.

Exercice 2.2.11. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = (\sqrt{j^2+2} - \sqrt[3]{j^3+3j})a^j,$$

où a est un nombre réel.

Exercice 2.2.12. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \frac{a^j - b^j}{a^j + b^j},$$

où a, b sont des nombres réels strictement positifs.

Exercice 2.2.13. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \sqrt{aj^2+2j-1} - \sqrt[4]{4j^4+3j^3+2j+1},$$

où a est un nombre réel.

Exercice 2.2.14. Si $a \in \mathbb{R}$, $b, c > 0$ et $d < 0$ étudier la convergence des suites $(x_j)_j$ de terme général égal à

(a) $x_j = j^k a^j$

(b) $x_j = \dfrac{(a-1)^j}{\sqrt{j}}$

(c) $x_j = \dfrac{a^j}{1+a^{2j}}$

(d) $x_j = (\dfrac{d}{4} - \dfrac{1}{d})^j(\sqrt[3]{j+1} - \sqrt[3]{j})$

(e) $x_j = \sqrt{(b+j)(c+j)} - j$

(f) $x_j = \left(j - \sqrt{j^2+2}\right)\dfrac{(a+1)^j+5}{1-(a+1)^j}$

(g) $x_j = \dfrac{j\sqrt[3]{j}}{(a-1)^{2j}-1}$

(h) $x_j = \sqrt[3]{\dfrac{(a+1)^j+e^j}{\pi^j}}$

(i) $x_j = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{j^2+2j+3}-aj}{\sqrt{3}}\right)$

(j) $x_j = \dfrac{aj^2+5j+2}{3j^2+1}$

(k) $x_j = \dfrac{b^{\ln(j)}}{j^b}$

Exercice 2.2.15. Soit $(a_n)_n$ une suite de $]0,1]$, démontrer que la suite $(x_j)_j$ définie par

$$x_j = \prod_{n=1}^{j} a_n$$

converge dans $\mathbb{R}$

L'exercice suivant pourra être considéré une fois que les séries géométriques seront connues.

Exercice* 2.2.16. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \prod_{k=0}^{j}(1+z^{2^k}),$$

avec $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Exercice 2.2.17. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} \sqrt[k]{a},$$

où a est un nombre réel strictement positif.

Exercice 2.2.18. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k(k+1)},$$

où a est un nombre réel.

Exercice 2.2.19. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ de terme général égal à

$$x_j = \frac{1+2+\cdots+j}{j+2} - \frac{j}{2}.$$

Exercice 2.2.20. Etudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ lorsque

(a) $x_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(j+k)^2}$

(b) $x_j = \displaystyle\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} \sqrt[k^2]{k}$

(c) $x_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \frac{k}{j^2}$

(d) $x_j = \displaystyle\frac{1}{j}(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[j]{j})$

(e) $x_j = \displaystyle\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} \frac{\sqrt[2k]{k^3}}{\sqrt[3k]{k^2}}$

(f) $x_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \frac{-1}{k^2+3k+2}$.

Exercice 2.2.21. On considère la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ telle que

$$\begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_{j+1} = ax_j + b \quad \text{avec}\, a, b \in \mathbb{R} \;\; \text{si}\, j \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Étudier la convergence d'une telle suite. On pourra procéder de deux manières :

— en montrant qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que la suite $(y_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, définie par $y_j = x_j - C$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, soit géométrique,

— ou en montrant que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $x_{j+1} = a^j x_1 + \sum_{k=0}^{j-1} a^k b$.

Exercice 2.2.22. On considère $(x_j)_j$ une suite réelle, et x un nombre réel.

(a) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier ou donner un contre-exemple.

(1) Si $x_j \to x$, alors $x_{2j} \to x$ et $x_{2j+1} \to x$.

(2) Si x_{2j} et x_{2j+1} convergent, alors x_j converge.

(3) Si $x_{2j} \to x$ et $x_{2j+1} \to x$, alors $x_j \to x$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}_0$, et soient $f_1, \ldots, f_n$ des applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telles que $\cup_{k=1}^{n} f_k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Montrer que

$$x_j \to x \Leftrightarrow (x_{f_k(j)})_{j\in\mathbb{N}} \to x \;\forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Exercice 2.2.23. Si $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ lorsque

(a) $x_j = \sqrt{j^2+j+1} - \sqrt{j^2-j+1}$

(b) $x_j = j - \sqrt[3]{j^3+j^2}$

(c) $x_j = \dfrac{\sqrt{j+\sqrt{j+\sqrt{j}}}}{(a-1)^{2j}-1}$

(d) $x_j = \dfrac{-3j^4+5j^3+2j-1}{j^5+2j-1}$

(e) $x_j = j\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{j}}-1\right)$

(f) $x_j = (\dfrac{\ln b}{2}+1)^j(\sqrt[3]{j+1}-\sqrt[3]{j})$

(g) $x_j = \dfrac{j^2}{a^j}$

(h) $x_j = \sqrt[j]{j^a}$

(i) $x_j = (\dfrac{a}{4}+2)^j(\sqrt[3]{j+1}-\sqrt[3]{j})$

(j) $x_j = (\sqrt{j^2+1}-j)\dfrac{(a+1)^j+2}{1-(a+1)^j}$

(k) $x_j = \dfrac{3^j-a^j}{4^j}$

(l) $x_j = \dfrac{j^2+2}{j^2+j+1}a^j$

(m) $x_j = \sqrt{2j^2+j+1}+aj$

(n) $x_j = \dfrac{2}{j^2(j-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} k \sum_{k=1}^{j} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$

(o) $x_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \dfrac{1}{4k^2-1}$

(p) $x_j = \dfrac{1}{j}\displaystyle\sum_{k=1}^{j} \sqrt[k]{k}$

(q) $x_j = \displaystyle\prod_{k=1}^{j}(1-\dfrac{1}{(k+1)^2})$

(r) $x_j = \dfrac{1}{j}(a-\pi)^j(\cos(\dfrac{j\pi}{4}))^j$.

2.3 Suites définies par récurrence

Exercice 2.3.1. Etablir que la suite $(x_j)_j$ définie par récurrence selon

$$x_0 = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \sqrt{3+2x_j}, \quad j \in \mathbb{N}$$

converge vers 3.

Exercice 2.3.2. **(Suite de Héron)** Établir que, pour tout $a > 0$, la suite $(r_j)_j$ définie par récurrence selon

$$r_0 > 0 \quad \text{et} \quad r_{j+1} = \frac{1}{2}\left(r_j + \frac{a}{r_j}\right), \quad j \in \mathbb{N}$$

converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 2.3.3. Étant donné un nombre réel a, on pose $x_1 = a$ et on définit la suite $(x_j)_j$ par la relation

$$x_{j+1} = \frac{x_j^3+7x_j}{2x_j^2-3x_j+7}.$$

Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 2.3.4. Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ définie par récurrence selon

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_{j+1} = x_j(2-ax_j) \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.3.5. Étant donnée une suite réelle positive $(x_j)_j$, on pose

$$y_j = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_j}}}.$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(y_j)_j$ si $x_j = c$, avec $c \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(b) Étudier la convergence de la suite $(y_j)_j$ si $x_j = ca^{2^j}$, avec $a, c \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(c) Montrer que la suite $(y_j)_j$ converge si et seulement si la suite $(x_j^{2^{-j}})_j$ est bornée.

Exercice 2.3.6. (Limite des quotients de la suite de Fibonacci)
On pose $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ et on définit la suite $(x_j)_j$ par la relation

$$x_{j+2} = x_{j+1} + x_j.$$

Etudier la convergence de la suite $(y_j)_j$ définie par $y_j = \frac{x_{j+1}}{x_j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.
Suggestion : décomposer la suite en considérant séparemment la suite des éléments pairs et la suite des éléments impairs.

Exercice 2.3.7. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ définie par récurrence selon

$$x_0 = -2 \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \frac{2 + x_j}{1 + 2x_j} \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.3.8. Étant donné deux nombres réels a et b, on pose $x_1 = a$, $x_2 = b$ et on définit la suite $(x_j)_j$ par la relation $x_j x_{j+2} = x_{j+1}^2$. Pour quelles valeurs de a et b cette suite converge-t-elle ?

Exercice 2.3.9. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $(z_j)_j$ la suite définie par

$$z_{j+1} = \frac{1}{3}(z_j + 2\overline{z_j}) \ \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

étudier la convergence de cette suite.

Exercice 2.3.10. Etudier la convergence des suites $(x_j)_j$ définies par récurrence selon

(a) $x_0 = -2 \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \dfrac{x_j}{3 - x_j}, \quad j \in \mathbb{N}$

(b) $x_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \sqrt{2 + x_j}, \quad j \in \mathbb{N}_0$

(c) $x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{j+1} = 1 + \sqrt{1 + x_j}, \quad j \in \mathbb{N}$

(d) $x_0 = 4 \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \dfrac{4x_j + 5}{x_j + 3}, \quad j \in \mathbb{N}$

(e) $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \sqrt{\dfrac{x_j + 2}{2}}, \quad j \in \mathbb{N}$

(f) $x_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \dfrac{6(x_j^2 + 1)}{x_j^2 + 11}, \quad j \in \mathbb{N}$

(g) $x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \dfrac{x_j^3 + 6x_j}{3x_j^2 + 2}, \quad j \in \mathbb{N}$

(h) $x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_{j+1} = \dfrac{x_j(2x_j^2 + 1)}{x_j^2 + 5}, \quad j \in \mathbb{N}$

(i) $x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_{j+1} = 1 + \dfrac{x_j^2}{4}, \quad j \in \mathbb{N}$

(j) $x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_{j+1} = 1 + \dfrac{1}{x_j}, \quad j \in \mathbb{N}$

Exercice 2.3.11. Étudier la convergence de la suite $(x_j)_j$ définie par récurrence selon

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_{j+1} = p x_j^2 + q \ \forall j \in \mathbb{N},$$

où $p, q \in]0, 1[$ sont tels que $p + q = 1$.

2.4 Rudiments de topologique dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Exercice 2.4.1. Montrer que les ensembles $A_0 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \Im z = 1\}$ et $B_0 = \{z : \Re z = 0\}$ sont fermés mais que $A_0 + B_0$ n'est pas fermé (*Suggestion* : montrer que la suite $(z_j)_j$ définie par $z_j = \frac{1}{j} + i$ appartient à $A_0 + B_0$).

Exercice 2.4.2. Montrer que si A et B sont deux ensembles de $\mathbb{C}$ et si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert (*Suggestion* : considérer d'abord $A + \{b\}$, avec $b \in \mathbb{C}$),

Exercice 2.4.3. Si E est une partie de $\mathbb{C}$, soit $U = (\overline{E^c})^c$. Montrer que U est un ouvert contenant tout ouvert inclus dans E[1].

Exercice 2.4.4. Si J est un ensemble fini non vide et, pour tout $j \in J$, E_j est un ensemble non vide, montrer que l'on a

$$\bigcup_{j \in J} \overline{E_j} = \overline{\bigcup_{j \in J} E_j}.$$

Que se passe-t-il si J n'est pas fini ?

Exercice 2.4.5. Soit $A \subseteq \mathbb{C}$, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on définit les ensembles

$$A_j = \left\{ x \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{d}(x, A) \leq \frac{1}{j} \right\}$$

et

$$B_j = \left\{ x \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{d}(x, \complement A) > \frac{1}{j} \right\},$$

où $\mathrm{d}(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ A_j (resp. B_j) est un fermé (resp. ouvert) et que $\bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} A_j$ (resp. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} B_j$) est le plus petit fermé contenant A (resp. le plus grand ouvert inclus dans A, c'est-à-dire l'intérieur de A).

1. On dit que U est l'intérieur de E, ce qu'on note $U = \mathring{E}$

Exercice 2.4.6. Montrer que si E est un ensemble borné de $\mathbb{C}$, l'ensemble

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \sup\{|z - z'| : z' \in E\} \leq 1\}$$

est compact.

Ces derniers exercices pourront être abordés une fois les fonctions continues connues.

Exercice* 2.4.7. Montrer que si f est une fonction réelle et continue sur la droite, l'ensemble $\{x : f(x) > y\}$ est ouvert pour tout nombre réel y.

Exercice* 2.4.8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \geq k|x - y| \tag{2.1}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si F est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $f(F)$ est aussi un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice* 2.4.9. Étant donné $c > \frac{8\pi}{3}$, montrer que l'ensemble

$$E = \{\sin(x) : x \in [0, \frac{3\pi}{2}] \cup [2\pi, c]\}$$

est compact.

3 Les séries

3.1 Séries réelles

Exercice 3.1.1. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j}.$$

Exercice 3.1.2. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^j.$$

Exercice 3.1.3. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j}.$$

Exercice 3.1.4. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j j}{j^3+1}.$$

Exercice 3.1.5. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1}.$$

Exercice 3.1.6. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1}.$$

Exercice 3.1.7.

(a) Roberto regarde tranquillement un match de foot en direct à la télévision, lorsque sa femme lui demande d'aller acheter du lait. Disposant d'un décodeur dernière génération, il décide de mettre son émission sur "pause" afin d'aller faire cette course. Lorsque Roberto rentre à la maison, il ne s'est absenté que 10 minutes et il décide de reprendre le match en vitesse "x2" afin de rattraper le direct. Après combien de temps en vitesse "x2" Roberto aura-t-il rattrapé le direct ?

(b) Roberto s'étant amusé à résoudre le point précédent, il tente de généraliser l'exercice. Si il a n minutes de retard sur le direct, qu'il reprend à vitese "x V" ($V > 1$), combien de temps mettra-t-il pour rattraper le direct ?

Exercice 3.1.8. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{j=1}^{+\infty} (\sqrt{2})^j$

(b) $\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$

(c) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j (j+1)}{j^4+2}$

(d) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j j}{j^2+1}$

(e) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^2+1}{j^3+1}$

(f) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2+\sqrt{3}}$

(g) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{j}}{(j+1)^2+1}$

(h) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^2+1}{j!}$

(i) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j \sin(j\frac{\pi}{2})}{j^2+1}$

Exercice 3.1.9. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\cos(j\pi)}{j \ln(j)}.$$

Exercice 3.1.10. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{j^3+j+1} - \sqrt{j^2+1}}{j}.$$

Exercice 3.1.11. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^j}{(2j)!}.$$

Exercice 3.1.12. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j!}{e^j}.$$

Exercice 3.1.13. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{4^j}.$$

Exercice 3.1.14. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{e^{2j}(1-\frac{2}{j})^{j^2}}.$$

Exercice 3.1.15. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{j=1}^{+\infty} j e^{-j}$

(b) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j \ln(j)}{j}$

(c) $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j!}{j^j}$

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j}$ (f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\ln(j)}{2^j}$ (h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2^j}{j!}$

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j^2}$ (g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8j^3-j^2+(-1)^j4j}}$ (i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\cos(\pi j)}{\sqrt[8]{((-1)^j8j^4-4j^3+3j)^2}}$

Exercice 3.1.16. Étudier la convergence de la série numérique

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(j)^{\ln(j)}}.$$

Exercice 3.1.17. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j!a^{2j}}{j^j},$$

où a est un nombre réel.

Exercice 3.1.18. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2^j}{j^2}\sin^{2j}(a),$$

où a est un nombre réel.

Exercice 3.1.19. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{3j-2}{2^{j+1}(j+1)^3}\frac{(a-3)^j}{(2a-1)^j},$$

où a est un nombre réel.

Lors de la résolution de certains exercices, la formule de Stirling peut être d'un grand secours :

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{j!}{j^j\sqrt{2\pi j}}\,e^j=1.$$

Exercice 3.1.20. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^{2j}a^j}{j!(j+1)!},$$

où a est un nombre réel.

Exercice 3.1.21. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\ln(j)}{\sqrt{j}}k^{kj}j!\frac{a^j}{j^j},$$

où a est un nombre réel et k est un nombre naturel.

Exercice 3.1.22. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \binom{j+k}{k} a^j,$$

où a est un nombre réel et k est un nombre naturel.

Exercice 3.1.23. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(k!)^j (j^2)!}{j^{j!}},$$

où k est un nombre naturel.

Exercice 3.1.24. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(k!)^j (j^2)!}{j^{2j}},$$

où k est un nombre naturel.

Exercice 3.1.25. Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{(j+k)^{(j+k)}} a^j,$$

où a est un nombre réel et k est un nombre naturel.

Exercice 3.1.26. Si $a \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a^j}{j^j}$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{\sqrt[q]{j^3+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a^j}{j^p}$

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-aj^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j(a-2)^j}{(j+1)(j+2)}$

(f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(a-9)^j}{9^j a^j \sqrt{9j+1}}$

(g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2^j}{(2^j+j)j^p}$

(h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{j}{j+1}\right)^{j^2} a^j$

(i) ; $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^2+1}{j(j+1)^2} \left(\frac{a+3}{a-1}\right)^j$

(j) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2^{2j} j!}{j^j} a^j$

(k) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(a-3)^j}{2^j a^j}$

(l) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1+j^2}{j!} (-a)^j$

(m) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j a^j}{2j}$

(n) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(a+2)^j j\sqrt{j}}{(3^j j + 3^j)^3}$

(o) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+2}{(j+3)j} a^{j+k}$

(p) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3^j j^{-a} (a-2)^j}{(5a-3)^j}$

(q) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j j}{j^2+1} (a-3)^j$

(r) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{j+1}-\sqrt{j}}{j^k} \frac{(a-2)^j}{2^j a^j}$

(s) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \ln^j\left(\frac{a}{3}\right) \frac{1}{j} \frac{j^{(j+k)!}}{j^{(j+l)!}}$

Exercice 3.1.27. Calculer, si cela a un sens, la somme de la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)}.$$

Exercice 3.1.28. Calculer, si cela a un sens, la somme de la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^j}.$$

Exercice 3.1.29. Calculer, si cela a un sens, la somme de la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{j}{2^j} - \frac{2}{j(j+1)} \right).$$

Exercice 3.1.30. Calculer, si cela a un sens, la somme de la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1(j+2))}.$$

Exercice 3.1.31. Calculer, si cela a un sens, la somme des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{3^{j+2}}{5^j}$ (b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{j}{(j^2-1)(j+3)}$ (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{(j+1)(j+2)(j+3)}$

Exercice 3.1.32. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ et P est un polynôme réel non nul, étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\ln(j)}}$

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a-2)^j}{2^j a^j \sqrt{3j+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(a-2)^{-j}}{j^2+2}$

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (j!)^2 \left(\frac{a^{j/p}}{(2j)!} \right)^k$

(f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+j^2}{j!} a^j$

(g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{p^{2j}!} - \frac{2\cos(j^2)}{j(j+1)}$

(h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a-1)^j \sqrt{2j}}{2^{2j} a^j \cos(\frac{1}{j})}$

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j j}{j^2+1} (a-3)^j$

(j) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a+1}{2a+3} \right)^j \frac{1}{\sqrt{1+j^k}}$

(k) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(aj)}{j^{\frac{3}{2}}}$

(l) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^a \ln^b(j)}$

(m) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{P(j)}{j!}$

(n) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} P(j) a^j$

(o) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{j+k}{k}} \frac{(2a+1)^j}{(a-3)^{j+1}}.$

4 Fonctions définies, continues et dérivables sur une partie de $\mathbb{R}$

4.1 Continuité

Exercice 4.1.1. Démontrer qu'il existe un réel x tel que $e^x + x = 2$.

Exercice 4.1.2. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$ alors montrer que f est constante.

Exercice 4.1.3. (Point fixe de Brouwer dans $\mathbb{R}$) Démontrer que si $a < b$ sont deux réels et si f est une fonction continue sur $[a,b]$, à images dans $[a,b]$, alors f admet un point fixe[1].

Exercice 4.1.4. Soient $a < b$ deux nombres réels. Si f et g sont deux fonctions continues de $[a,b]$ dans lui-même telles que $f \circ g = g \circ f$, démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 4.1.5. Soient $a < b$ deux nombres réels.

a) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{b-a}{2})$.
b) En utilisant le point précédent, montrer que sur un méridien terrestre, il existe deux points antipodaux qui ont la même température. On peut supposer que la température est une fonction continue.

Exercice 4.1.6. Soient $a < b$ deux nombres réels strictement positifs. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on note les points du plan $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Si α (resp. β)est le coefficient angulaire de la droite joignant l'origine du plan à A (resp B), montrons que, pour tout γ entre α et β, la droite d'équation $y = \gamma x$ coupe le graphique de f.

Exercice 4.1.7.

(a) Montrer que si f est une fonction continue et périodique, alors f est une fonction bornée.

(b) Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $\pm\infty$, alors f est une fonction bornée.

(c) Soit $J \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, \ldots, x_J \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x_j : 1 \le j \le J\}$ admettant des limites finies en $\pm\infty$ et, pour tout $1 \le j \le J$, en x_j^- et x_j^+, alors f est une fonction bornée.

1. On dit que x est un point fixe de la fonction f si $f(x) = x$.

Exercice 4.1.8. Si f est une fonction réelle et continue sur $[a,b]$ ($a<b$), montrer que la fonction F définie sur $[a,b]$ par

$$F(x) = \sup_{y\in[a,x]} f(y)$$

est également continue sur $[a,b]$.

Exercice 4.1.9. Montrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{K}$ est continue sur si et seulement si, pour tout $E \subset \mathbb{R}$, $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$. De plus, montrer que, en général, cette inclusion est stricte.

Exercice 4.1.10. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ possédant la propriété de la valeur intermédiaire : si $f(a) < y < f(b)$, il existe un nombre x compris entre a et b tel que $f(x) = y$. Montrer que f est continu si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ est fermé.

Exercice 4.1.11. Montrer que tout composée de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

4.2 Dérivabilité et espaces C^p

Exercice 4.2.1. On donne les fonctions définies par

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad ; \quad f_2(x) = \sqrt{\cos(2x)} \quad ; \quad f_3(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première de ces fonctions.

Exercice 4.2.2. On donne les fonctions définies par

$$f_1(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \quad ; \quad f_2(x) = \tan(\ln(x)) \quad ; \quad f_3(x) = \ln\left(\sin(\sqrt{1-x^2})\right).$$

Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première de ces fonctions.

Exercice 4.2.3. Sachant que f est une fonction continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et de dérivée donnée par

$$[Df]_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1,1[$$

où la fonction définie par

$$F(x) = f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

est-elle définie, continue et dérivable ? Que vaut sa dérivée ?

Exercice 4.2.4. Sachant que f est une fonction continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et de dérivée donnée par

$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

où la fonction F définie par

$$F(x) = f(2x\sqrt{1-x^2})$$

est-elle définie, continue et dérivable ? Calculer sa dérivée.

Exercice 4.2.5. Sachant que f est une fonction continue sur $[0,2]$, dérivable sur $]0,2[$ et de dérivée donnée par

$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}},$$

où la fonction F définie par

$$F(x) = f\left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)$$

est-elle continue et dérivable ? Calculer sa dérivée.

Exercice 4.2.6. Sachant que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée donnée par

$$Df(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

où la fonction F définie par

$$F(x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

est-elle continue et dérivable ? Calculer sa dérivée.

Exercice 4.2.7. Sachant que f est une fonction continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et de dérivée donnée par

$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

où la fonction F définie par

$$F(x) = f(2x^2-1)$$

est-elle définie, continue et dérivable ? Calculer sa dérivée.

Exercice 4.2.8. Soit g une fonction dérivable sur $]-1,1[$ et définissons la fonction $f : t \mapsto g(\ln(t-1))$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer la dérivée de f en fonction de la dérivée de g.

Exercice 4.2.9. Soit $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $f(4) = 3$, $Df(4) = -2$ et $Dg(3) = 5$. Calculer $D(g \circ f)(4)$.

Exercice 4.2.10. La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sqrt{|x|}$$

est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$? Calculer sa dérivée. Cela étant, a-t-on $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^2(\mathbb{R})$? Justifier.

Exercice 4.2.11. Déterminer le domaine de définition, continuité et dérivabilité des fonctions

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

A-t-on $f, g \in C^1(\mathbb{R})$? A-t-on $f, g \in C^2(\mathbb{R})$?

Exercice 4.2.12. On considère la fonction $x \mapsto x^2 \ln(x)$. Déterminer ses domaines de définition, continuité et dérivabilité ainsi que l'expression de $D^n f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x dans le domaine de dérivabilité.

Exercice 4.2.13. Déterminer
- l'ensemble de définition,
- la régularité (appartenance aux espaces C^p),
- la dérivée première

de la fonction définie explicitement par l'expression suivante :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{4x}{4+x^2}\right).$$

Esquisser une représentation graphique de cette fonction.

Exercice 4.2.14. Vérifier que la fonction

$$f \ : \ x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x}\right)\chi_{]0,+\infty[}(x)$$

est $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 4.2.15. Soit $\alpha > 0$, déterminer à quels espaces C^p la fonction

$$x \mapsto |x|^\alpha$$

appartient.

Exercice 4.2.16. Déterminer, si possible,
- l'ensemble de définition
- la régularité (appartenance aux espaces C^p)
- la dérivée première
- la dérivée seconde

de la fonction définie explicitement par l'expression suivante :

$$f(x) = |x|^\alpha \sin(x)$$

où α est un nombre réel du segment $[0, 1]$.

Exercice 4.2.17. Déterminer, si possible,
- l'ensemble de définition
- la régularité (appartenance aux espaces C^p)
- la dérivée première
- la dérivée seconde

de la fonction définie explicitement par l'expression suivante :

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\alpha},$$

où α est un nombre naturel.

4 Fonctions définies, continues et dérivables sur une partie de $\mathbb{R}$

4.3 Théorème des accroissements finis

Exercice 4.3.1. Montrer que pour tous x, y tels que $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{x-y}{\cos^2(y)} \leq \tan(x) - \tan(y) \leq \frac{x-y}{\cos^2(x)}.$$

Exercice 4.3.2. Montrer que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$|\tan(x)| \geq |x|.$$

Exercice 4.3.3. Soit f la fonction définie explicitement sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$. Montrer que pour tout x appartenant au domaine de f, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}\exp(\frac{1}{c}),$$

en déduire la valeur de

$$\lim_{x\to\infty} x^2(\exp(\frac{1}{x}) - \exp(\frac{1}{x+1})).$$

Exercice 4.3.4. Soient f et g des fonctions réelles définies sur $[a, b]$ et $C^1([a, b[)$. Si $f(a) \leq g(a)$ et $Df(x) \leq Dg(x)$ pour tout $x \in [a, b[$ alors $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b[$.

Exercice 4.3.5. Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle de classe C^1 sur I ; montrer que pour tous $a, b \in I$ avec $a \leq b$, on a

$$|f(b) - f(a) - (b-a)Df(a)| \leq |b-a| \sup_{c\in[a,b]} |Df(c) - Df(a)|.$$

Exercice 4.3.6. Montrer que pour tout $n > 0$ et $p \in [0, 1]$, on a

$$\frac{p}{(n+1)^{1-p}} \leq (n+1)^p - n^p \leq \frac{p}{(n)^{1-p}}$$

Exercice 4.3.7. Montrer que pour tous réels x, y tels que $0 < y < x$, il existe un réel c tel que $0 < 4y < c < 4x$ et tel que

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}.$$

Exercice 4.3.8. Trouver, à l'aide du théorème des accroissements finis, deux fonctions f et g telles que

$$f(x) \leq \ln(x+2) - \ln(x) \leq g(x) \;\; \forall\, x > 0$$

Exercice 4.3.9. Soit $p \in \mathbb{R},\ p \geq 2$.

a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln\left(\frac{\ln(p+1)}{\ln(p)}\right) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}.$$

b) En déduire que $\ln\left(\frac{\ln(p+1)}{\ln(p)}\right) < \frac{1}{p\ln(p)}$.

c) En déduire que la série suivante diverge :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j\ln(j)}.$$

Exercice 4.3.10. Soient m un naturel impair strictement plus grand que 1 et $n \in \mathbb{N}_0$, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{m}((m-1)x + \frac{n}{x^m}).$$

Calculer la dérivée de f lorsqu'elle est définie. En déduire que la suite $(x_j)_j$ définie par récurrence suivant la formule

$$x_{j+1} = f(x_j)$$

converge pour le bon choix de la condition initiale réelle x_1.

4.4 Formule de Leibniz

Exercice 4.4.1. Soit la fonction f définie par $f(x) = (x^3+1)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée $D^4 f$ et en déduire la valeur de $[D^4 f](-1)$.

Exercice 4.4.2. Si $j \in \mathbb{N}_0$, calculer la dérivée j-ième de la fonction $x \mapsto x^{j-1}\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4.4.3. Montrer que, si f est une fonction $C^\infty(]\alpha,\beta[)$ (avec $\alpha < \beta$) alors, pour tous $j,k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]\alpha,\beta[$, on a

$$x^j D^{j+k}(x^k f(x)) = D^k(x^{j+k} D^j f(x))$$

Exercice 4.4.4. Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $Df = f$. Etablir que f appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $K \in \mathbb{N}$, tous $a, b_0, \ldots, b_K \in \mathbb{R}$ et tout polynôme P, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{K} b_k D^k[f(ax)P(x)] = f(ax)\sum_{j=0}^{K}\frac{1}{j!}D^j P(x)\left[D_y^j\left(\sum_{k=0}^{K} b_k y^k\right)\right]_{y=a}.$$

Exercice 4.4.5. Établir, au moyen de la formule de Leibniz que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$[D^{2j}\arcsin]_0 = 0 \quad \text{et} \quad [D^{2j+1}\arcsin]_0 = \frac{((2j)!)^2}{2^{2j}(j!)^2}.$$

Exercice 4.4.6. Établir, au moyen de la formule de Leibniz que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$[D^{2j}\exp(x^2)]_{x=0} = \frac{(2j)!}{j!} \quad \text{et} \quad [D^{2j+1}\exp(x^2)]_{x=0} = 0.$$

Exercice 4.4.7. Établir, au moyen de la formule de Leibniz, pour tout $j \in \mathbb{N}$, les égalités annoncées.

(a) $[D^{2j} \arctan]_0 = 0$ et $[D^{2j+1} \arctan]_0 = (-1)^j (2j)!$

(b) $[D^{3j} \exp(x^3)]_{x=0} = \frac{(3j)!}{j!}$, $[D^{3j+1} \exp(x^3)]_{x=0} = 0$ et $[D^{3j+2} \exp(x^3)]_{x=0} = 0$

(c) $[D^{2j} \sqrt{1+x^2}]_{x=0} = \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)} \left(\frac{(2j)!}{2^j j!} \right)^2$ et $[D^{2j+1} \sqrt{1+x^2}]_{x=0} = 0$.

4.5 Formule de Taylor

Exercice 4.5.1. Développer la fonction f sur l'ensemble A en série de puissances de x où

(a) $f(x) = e^x$, $A = \mathbb{R}$, en déduire la valeur de

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}_0).$$

(b) $f(x) = \ln(1+x)$, $A = [-\frac{1}{2}; 1]$, en déduire la valeur de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

(c) $f(x) = \sin(x)$, $A = \mathbb{R}$, en déduire la valeur de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Exercice 4.5.2. Développer la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en 1 sur $[\frac{1}{2}, 2]$.

Exercice 4.5.3. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, développer en série de puissances de x les fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$,

(b) $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$,

(c) $x \mapsto e^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}$,

(d) $x \mapsto \arctan(x)$ sur $[-1, 1]$, en déduire une expression de π via une série.

4 Fonctions définies, continues et dérivables sur une partie de $\mathbb{R}$

4.6 Théorème de l'ouvert connexe

Exercice 4.6.1. Comparer les fonctions arcsin et arccos sur $[-1,1]$.

Exercice 4.6.2. Lorsque cela a un sens, comparer les fonctions

$$f : x \mapsto \arcsin(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

Exercice 4.6.3. Lorsque cela a un sens, comparer les fonctions :

$$f : x \mapsto \arctan(|x|) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Exercice 4.6.4. Comparer les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}_0$:

$$f : x \mapsto \arctan(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 4.6.5. Comparer les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arctan(x).$$

Exercice 4.6.6. Lorsque cela a un sens, comparer les fonctions :

$$f : x \mapsto \arcsin(\frac{x-1}{x+1}) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arccos\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right).$$

Exercice 4.6.7. Lorsque cela a un sens, comparer les fonctions :

$$f : x \mapsto \arcsin(2x^2-1) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arcsin(x).$$

4.7 Limites

Exercice 4.7.1. Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{sign}(x).$$

(a) Admet-elle des limites en 0^+ et 0^- ? Que peut-on dire de la limite en 0 ?
(b) Admet-elle des limites en $+\infty$ et $-\infty$? Que peut-on dire de la limite à l'infini ?

Exercice 4.7.2. Montrer que la fonction cos n'a pas de limite à l'infini.

Exercice 4.7.3. Lorsque cela a un sens, calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\sin(\sin^2(x))}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x-\sin(x)}}{\sqrt{2x+7}}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin^2(x)} - e^{-\sin^2(x)}}{\sin^2(x)\cos(x)}$

(e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}}{\sqrt{2x+1}}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(x)-1)}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{2+\cos(x)}{x^3\sin(x)} - \frac{3}{x^4}$

(h) $\lim_{x\to +\infty} \cos\left(\sqrt{\frac{2x^2+\sin^2(x)}{x^2-x}}\right)$

(i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\sin(\frac{1}{x})}$

(j) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$

(l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))}{x}$

Exercice 4.7.4. Lorsque cela a un sens, calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x))}{x}$

(b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^3}$

(c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{|4x^3-x|}}{\sqrt{5-x^3}}$

(e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sqrt{3x^2+\cos(x)}}{\sqrt{x^2-x}}\right)$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{\ln(1-|x|^3)}$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\sin(\sin^2(x))}{x^2}$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos(x))}{x^4}$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2}$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}$

(o) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}$

(p) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

(q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$

(r) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

(s) $\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$

(t) $\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$

(u) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x^2}$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

(w) $\lim_{x\to 0} \frac{\cot(x)-\frac{1}{x})}{x}$

(x) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$

(y) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x}$

(z) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x)}{e^{-x}}$

Exercice 4.7.5. Si $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}_0$ et $m,n\in\mathbb{N}_0$, lorsque cela a un sens, calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(a \arcsin(x))}{\ln(1+x^2)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cot(ax)}{\cot(bx)}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^{\ln(|a|+1)}}{1+x^{\ln(|a|+1)}\sin^2(x)}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{x}$

Exercice 4.7.6. Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_0$, $c > 0$ et $n \in \mathbb{N}_0$, lorsque cela a un sens, calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2cx-1}}{\sqrt{1+cx}}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{\arctan(bx)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x^3}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^n}{\sin(x^n)}$

(f) $\lim_{x\to b} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$

Exercice 4.7.7. Soit la fonction sinc définie par

$$\operatorname{sinc}(x) = \lim_{y\to x} \frac{\sin(y)}{y}.$$

Déterminer son domaine de définition, continuité et de dérivabilité. Calculer sa dérivée première.

4 Fonctions définies, continues et dérivables sur une partie de $\mathbb{R}$

4.8 Problèmes d'optimisation

Exercice 4.8.1. Posons $f(x) = x^2 \sin(x) + 2(x\cos(x) - \sin(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une infinité de maximum et minimum locaux mais aucun global.

Exercice 4.8.2. Dans le plan orthonormé, trouver les coordonnées du point de la droite d'équation $y = 3x + 5$ qui est le plus proche de l'origine (la distance d'un point (x, y) à l'origine est donnée par $\sqrt{x^2 + y^2}$).

Exercice 4.8.3. On considère la parabole d'équation $y = \frac{-2}{9}x^2 + 8$. On note $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$ (avec $a < b$) les points d'intersection de la parabole avec l'axe x. On considère un point $P(x, y)$ (avec $a < x < b$) sur la parabole. On note H la projection orthogonale de P sur l'axe x. Déterminer les coordonnées de P pour que le triangle APH soit d'aire maximale. Donner cette aire maximale.

Exercice 4.8.4. Un fermier dispose de 300 mètres de clôture et désire réaliser un enclos formant un rectangle pour une partie et un demi-cercle de l'autre, comme sur la figure ci-dessous. Quelles sont les dimensions du rectangle qui maximisent l'aire de l'enclos ?

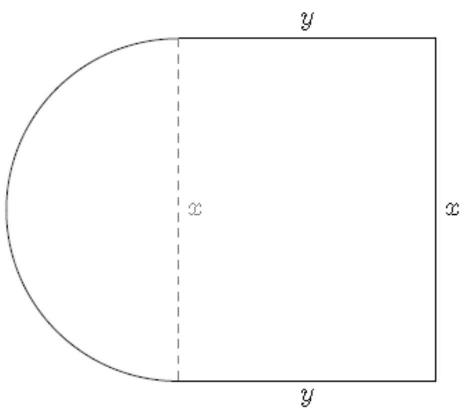

FIGURE 4.1 – Illustration du champ du fermier de l'Exercice 4.8.4.

Exercice 4.8.5. Pierre Mathonet part du point A situé au bord d ?un lac circulaire de 3 km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé le plus rapidement possible afin de pouvoir manger. Il peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h. Selon quel angle θ par rapport au diamètre doit-il orienter sa barque ?

Exercice 4.8.6. N'arrivant pas à trouver une question d'optimisation intéressante, Laurent et Samuel se rendent à l'*Église Adventiste de la 7e réforme divine* pour y brûler un cierge. En entrant, ils aperçoivent un vitrail qui se compose d'un triangle équilatéral surmonté par un rectangle lui-même surmonté par un demi-cercle. Le périmètre de ce vitrail est de 5 mètres. Trouver sa hauteur, sachant que les dimensions du vitrail ont été choisies pour que l'ensoleillement soit maximum.

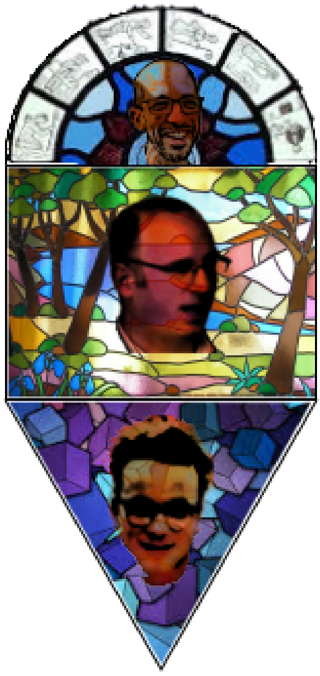

FIGURE 4.2 – Représentation du vitrail de la forme décrite dans l'Exercice 4.8.6

Exercice 4.8.7. On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 3$. Déterminer le tableau de variations de f (croissance-décroissance) et en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$. Justifier. Montrer ensuite que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution et donner un encadrement de cette solution entre deux entiers consécutifs.

Exercice 4.8.8. Écrire le nombre 4 sous la forme $x + y$, où x et y sont deux nombres réels strictement positifs, de telle manière que l'expression $x^2 + y^3$ soit la plus petite possible.

Exercice 4.8.9. Démontrer que parmi tous les rectangles d'aire $A > 0$, celui qui a un périmètre minimum est le carré. Calculer ce périmètre en fonction de A.

Exercice 4.8.10. Démontrer que parmi tous les rectangles de périmètre $P > 0$, celui qui a une aire maximum est le carré. Calculer cette aire en fonction de P.

Exercice 4.8.11. Montrer que parmi tous les losanges de périmètre $P > 0$ donné, celui d'aire maximale est le carré. Donner alors son aire en fonction de P.

Exercice 4.8.12. On considère un cercle de rayon $r > 0$; donner l'aire maximale que peut avoir un rectangle inscrit dans ce cercle ainsi que sa longueur et sa largeur en fonction de r.

Exercice 4.8.13. Soit un triangle ABC, rectangle en B, et D un point du segment BC. On désigne par E l'intersection de la perpendiculaire à BC passant par D avec AC et par F l'intersection de la perpendiculaire à AB passant par E avec AB. Quelle est la position de D sur le segment BC qui rend l'aire du rectangle $BDEF$ maximale ?

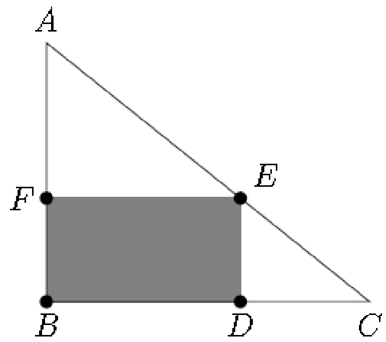

FIGURE 4.3 – Illustrations de la situation décrite à l'Exercice 4.8.13.

Exercice 4.8.14. Une entreprise de boissons veut produire des canettes cylindriques de $50cl$ (volume de $500cm^3$). Les coûts de production sont les suivants : 0,2 centimes par cm de fond de canette, 0,05 centimes par cm^2 de surface latérale, et 0,4 centimes par cm^2 de surface supérieure (celle par où on boit). En centimètres, combien doivent mesurer le rayon et la hauteur d'une canette pour en minimiser son coût de production ? Que coûte alors la fabrication d'une canette ?

4.9 Études complètes de fonctions

Exercice 4.9.1. Réaliser une étude complète de la fonction suivante. Esquisser son graphe.

$$f(x) = |x-1|\sqrt{x}$$

Exercice 4.9.2. Réaliser une étude complète de la fonction suivante. Esquisser son graphe.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

Exercice 4.9.3. Réaliser une étude complète de la fonction suivante. Esquisser son graphe.

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$$

Exercice 4.9.4. Réaliser une étude complète de la fonction suivante. Esquisser son graphe.

$$f(x) = \ln(|\sin(x)| + 1) + \sin(x).$$

Exercice 4.9.5. Réaliser une étude complète de la fonction

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}.,$$

avec esquisse.

Exercice 4.9.6. Réaliser une étude complète de la fonction

$$x \mapsto f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|},$$

avec esquisse.

Exercice 4.9.7. Réaliser une étude complète de la fonction

$$x \mapsto f(x) = (x^2 - 2|x| + 1)e^{-2x},$$

avec esquisse.

Exercice 4.9.8. Réaliser une étude complète de la fonction

$$x \mapsto f(x) = |x| + \ln\left(\frac{|x|^3}{\sqrt{1 + x^6}}\right),$$

avec esquisse.

Exercice 4.9.9. Réaliser une étude complète de la fonction

$$x \mapsto f(x) = \frac{(x-1)^2 + \ln(|x-1| + 1)}{|x-1| + 1},$$

avec esquisse.

Exercice 4.9.10. Réaliser une étude complète de la fonction suivante. Esquisser son graphe.

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x - 1}{x})$$