L'espace euclidien

I. Espace $\mathbb{R}^n$

II. Suites dans $\mathbb{R}^n$

III. Topologie de $\mathbb{R}^n$

I. Espace $\mathbb{R}^n$

Définition

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est défini comme suit :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un point de $\mathbb{R}^n$, x_j ($j \in \{1, \ldots, n\}$) est appelé la j-ème composante de x et est noté $[x]_j$.

Points particuliers :

- $0 = (0, \ldots, 0)$,
- $e_j = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0) \quad (j \in \{1, \ldots, n\})$,

appelé j-ème point unité (il y en a donc n).

On pose bien entendu $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Bien sûr, si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, on a $x = y$ ssi $[x]_j = [y]_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Donc $e_j = e_k$ ssi $j = k$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$, le point rx est l'élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$[rx]_j = r[x]_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, le point $x + y$ est l'élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$[x + y]_j = [x]_j + [y]_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Les opérations précédentes définissent la combinaison linéaire sur $\mathbb{R}^n$: $[\sum_{k=1}^m r_k x_k]_j = \sum_{k=1}^m r_k [x_k]_j$.

Il y a une analogie évidente entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, mais ces espaces sont différents.

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire de x et y est le nombre réel

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Exemple : Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\langle x, e_j \rangle = [x]_j$.

et par conséquent $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$.

Définition

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni de la combinaison linéaire et du produit scalaire précédemment définis.

Proposition

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a

- $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ ssi $x = 0$,
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (commutativité),
- $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$,
- $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Exercice : $\langle \sum_{k=1}^{p} r_k x_k, \sum_{l=1}^{q} s_l y_l\rangle = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} r_k s_l \langle x_k, y_l\rangle$.

Définition

Le module d'un point x de $\mathbb{R}^n$ est le nombre positif ou nul

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [x]_j^2}.$$

On trouve de suite $|0| = 0$ et $|e_j| = 1$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$).

Cette notion généralise celles déjà introduites sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Théorème

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a

- $|x| = 0$ ssi $x = 0$,
- $|rx| = |r|\,|x|$,
- $|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|$,
  l'égalité n'ayant lieu que si on a $x = 0$ ou $y = sx$, avec $s \in \mathbb{R}$.

La dernière relation est appelée l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

- $|[x]_j| \leq |x| \leq \sum_{k=1}^{n} |[x]_k| \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$,
  l'égalité n'ayant lieu que si on a $x = 0$ ou $y = sx$, avec $s \geq 0$,
- $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.

La deuxième relation est appelée l'inégalité de Minkowski.

Exercice : On a toujours $|\sum_{j=1}^{m} r_j x_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |r_j|\,|x_j|$.

Définition

Une distance dist sur un ensemble non vide E est une application

$$\mathrm{dist} : E \times E \to [0, +\infty[\quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

telle que

- $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ ssi $x = y$,
- $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$, (symétrie)
- $\mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, z) + \mathrm{dist}(z, y)\ \forall z \in E$. (inégalité triangulaire)

L'ensemble E muni de la distance dist est appelé l'espace métrique (E, dist).

Proposition

Sur $\mathbb{R}^n$, l'application

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad [0, +\infty[\quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

est une distance.

Définition

La distance précédente est appelée la distance euclidienne.

Proposition

Pour tous w, x, y, z de l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d)$, on a

- $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$,
- $|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$.

Proposition

Pour tous x, y, z de l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, d)$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a

- $d(rx, ry) = |r| d(x,y)$,
- $d(x+y, y+z) = d(x,z)$,
- $d(|x|, |y|) \leq d(x,y)$,
- $d([x]_j, [y]_j) \leq d(x,y)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercice : On a $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$ ssi $z = rx + (1-r)y$, avec $r \in [0,1]$.

Exercice : On a $|d(x,z) - d(z,y)| = d(x,y)$ ssi $x = y$ ou $z = rx + (1-r)y$, avec $r \in]0,1[^c$.

Définition

Un intervalle I de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

où $I_1, \ldots, I_n$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition

Étant donné $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'ensemble

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}.$$

La boule fermée de centre x et de rayon r est l'ensemble

$$B(x, \leq r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}.$$

La sphère de centre x et de rayon r est l'ensemble

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}.$$

Dans $\mathbb{R}$, on a $B(x, r) =]x - r, x + r[$ et $B(x, \leq r) = [x - r, x + r]$.
On a également $S(x, r) = \{x - r, x + r\}$ dans cet espace.

Définition

Une partie E de $\mathbb{R}^n$ est bornée s'il existe $C > 0$ tel que $E \subset B(0, C)$.

On a $E \subset B(0, C)$ ssi $|x| < C$ pour tout $x \in E$.

Exemples : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $B(x, r)$, $B(x, \leq r)$ et $S(x, r)$ sont bornés.

Proposition

Une partie E de $\mathbb{R}^n$ est bornée ssi, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble $E_j = \{[x]_j : x \in E\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Corollaire

Un intervalle $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ de $\mathbb{R}^n$ est borné ssi quelque soit $j \in \{1, \ldots, n\}$, I_j est borné.

Corollaire

Toute partie d'un borné est bornée ; en particulier toute intersection de bornés est bornée.
Tout union finie de bornés est bornée ; en particulier toute partie finie est bornée.

Définition

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}^n$; si $\{|x-y| : x, y \in E\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, on appelle diamètre de E le nombre

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x-y| : x, y \in E\}.$$

Proposition

Une partie non vide E de $\mathbb{R}^n$ admet un diamètre ssi elle est bornée.

Exemples : Toute boule de rayon $r > 0$ admet un diamètre et on a $\operatorname{diam}(B(x, r)) = \operatorname{diam}(B(x, \leq r)) = 2r$.

Si $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ est un intervalle de $\mathbb{R}^n$ constitué d'intervalles I_j d'extrémités a_j, b_j ($j \in \{1, \ldots, n\}$), alors I est borné et $\operatorname{diam}(I) = |b-a|$, où $[a]_j = a_j$ et $[b]_j = b_j$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$).

Définition

Étant donné deux parties non vides E et E' de $\mathbb{R}^n$, la distance entre E et E' est le nombre

$$d(E, E') = \inf\{|x - y| : \; x \in E, \, y \in E'\}.$$

Il est important de constater que d ne définit pas une distance sur les parties de $\mathbb{R}^n$!

Proposition

Si A, B et C sont des parties non vides de $\mathbb{R}^n$, on a

- $d(A, B) \geq 0$,
- $d(A, B) = d(B, A)$,
- si B est borné, $d(A, C) \leq d(A, B) + \mathrm{diam}(B) + d(B, C)$.

La distance entre deux parties peut être nulle sans que ces parties soit égales.

Corollaire

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et toute partie non vide E de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|d(\{x\}, E) - d(\{y\}, E)| \leq d(x, y).$$

II. Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition

Une suite de $\mathbb{R}^n$ est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^n$.

Il s'agit de la même définition que précédemment, où nous avons considéré $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

En fait, on peut remplacer $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}^n$; les résultats obtenus sont toujours valides.

Ainsi, par exemple, si $(x_j)_j$ est une suite de $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$, on a $x_j \to l$ ssi $\forall \epsilon > 0$, $\exists J$ tq $j \geq J \Rightarrow d(x_j, l) = |x_j - l| < \epsilon$.

Théorème

Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers $l \in \mathbb{R}^n$ ssi, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la suite $([x_j]_k)_j$ converge vers $[l]_k$.

Proposition

Si $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont deux suites de $\mathbb{R}^n$ tq $x_j \to l$ et $y_j \to l'$, alors

$$\langle x_j, y_j \rangle \to \langle l, l' \rangle.$$

Proposition

Si $(x_j)_j$ est une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers 0 et $(y_j)_j$ une suite bornée de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\langle x_j, y_j \rangle \to 0.$$

Théorème

Une suite de $\mathbb{R}^n$ converge converge ssi elle est de Cauchy.

III. Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à l'ensemble E si toute boule centrée en x est d'intersection non vide avec E.
L'ensemble des points adhérents à E est appelé l'adhérence de E et est noté $\bar{E}$.

Proposition

Un point est adhérent à un ensemble ssi il existe une suite de cet ensemble qui converge vers ce point.

Définition

Un ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si $\bar{E} \subset E$.

On a donc, si E est fermé, $E = \bar{E}$.

Proposition

Un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est fermé ssi il contient les limites de ses suites convergentes.

Définition

Un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est ouvert si son complémentaire est fermé.

Proposition

Un ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est ouvert ssi $\forall x \in E$, $\exists r > 0$ tq $B(x, r) \subset E$.

Définition

Un ensemble K est compact si de tout recouvrement ouvert de K on peut en extraire un recouvrement fini.

Théorème

Un ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est compact ssi il est fermé et borné.

Théorème

Un ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est compact ssi de toute suite de K on peut extraire une sous-suite convergente.

Fonctions de $\mathbb{R}^n$

I. Généralités

II. Limite des valeurs d'une fonction

III. Fonctions continues

I. Généralités

- Une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$ est une application de A dans $\mathbb{C}$,
- A est l'ensemble (domaine) de d'efinition, noté $\mathrm{dom}(f)$,
- $x \in A$ est la variable ou l'argument, $f(x)$ est la valeur de f en x,
- si $B \subset A$, $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$ est l'image de B par f,
- l'image de f est $\mathrm{im}(f) = f(A)$,
- si $A \subset \mathbb{R}^n$, on écrit $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ne pas confondre la fonction f et la valeur $f(x)$.
$f(x)$ n'est pas une fonction, $x \mapsto f(x)$ est une fonction.

Exemples :

- $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto |x|$,
- $[\cdot]_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto [x]_j \qquad (j \in \{1, \ldots, n\})$.

Définition

Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$; le graphe de f est l'ensemble

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

On a donc $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ si f est complexe, $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ si f est réel.

Ne pas confondre le graphe de f (qui est un ensemble) et le graphique de f (qui est une représentation géométrique).

Si f et g sont deux fonctions de même domaine de définition, on définit naturellement $f = g$, cf $(c \in \mathbb{C})$, $f \pm g$.

Si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions réelles ($n \in \mathbb{N}^*$) définies sur $A \subset \mathbb{C}$, leur enveloppe supérieure est la fonction

$$\sup\{f_1, \ldots, f_n\} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}.$$

Leur enveloppe inférieure est la fonction

$$\inf\{f_1, \ldots, f_n\} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \inf\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}.$$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n fonctions réelles $f_1, \ldots, f_n$ définies sur une même partie A de $\mathbb{C}$.
Leurs enveloppes supérieure et inférieure peuvent être obtenues au moyen d'un nombre fini de combinaisons linéaires et de recours aux parties positives, aux parties négatives ou aux modules de fonctions.

Exemple : $\sup\{f_1, f_2\} = f_1 + (f_2 - f_1)^+ = \dfrac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2}$.

Définition

Une fonction f $\left\{\begin{array}{l} \\ \text{réelle} \\ \text{réelle} \end{array}\right.$ définie sur A est $\left\{\begin{array}{l} \text{bornée} \\ \text{majorée} \\ \text{minorée} \end{array}\right.$ sur $B \subset A$ si

$f(B)$ est un ensemble $\left\{\begin{array}{l} \text{borné} \\ \text{majoré} \\ \text{minoré} \end{array}\right.$.

Elle est bornée (resp. majorée, minorée) si elle l'est sur A.

Si f est majoré sur B, la borne supérieure de $f(B)$ est notée $\sup f(B)$ ou $\sup_B f(x)$.
Idem $\inf f(B)$, $\inf_B f(x)$.

Définition

Un zéro d'une fonction f définie sur A est un point $x \in A$ tel que $f(x) = 0$.
L'ensemble d'annulation de f est l'ensemble des zéros de f.

Définition

Si Z_f désigne l'ensemble d'annulation de f, un zéro x de f est un zéro identique s'il existe un intervalle ouvert contenant x inclus dans Z_f.
L'ensemble des zéros identiques est noté Z_f°.
Un zéro non-identique est un zéro accidentel.
Le support de f, noté $[f]$ ou $\operatorname{supp}(f)$ est l'ensemble $[f] = \mathbb{R}^n \setminus Z_f^\circ$.

Proposition

Le support d'une fonction est un ensemble fermé.

Proposition

Étant donné n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur $\mathbb{R}^n$, on a
$[\sum_{j=1}^n f_j] \subset \cup_{j=1}^n [f_j]$ et $[\prod_{j=1}^n f_j] \subset \cap_{j=1}^n [f_j]$.

Définition

La fonction caractéristique d'un ensemble A est la fonction

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La fonction 0 est la fonction $\chi_\emptyset$, la fonction 1 est la fonction $\chi_{\mathbb{R}^n}$

Exercices : on a

- $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$,
- $B \subset A$ ssi $\chi_B \leq \chi_A$
  et $A = B$ ssi $\chi_A = \chi_B$,
- $\chi_{\cap_{j=1}^n A_j} = \prod_{j=1}^n \chi_{A_j} = \inf\{\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_n}\}$
  et $\chi_{\cup_{j=1}^n A_j} = \sup\{\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_n}\}$,
- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.

II. Limite des valeurs d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de $\bar{A}$ et ℓ un nombre complexe. On dit que ℓ est la limite de f pour x tendant vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array} \right. \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou « $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0$ ».

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de $\bar{A}$ et ℓ un nombre complexe. On dit que f tend vers l'infini lorsque x converge vers x_0 si

$$\forall N > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array} \right. \Rightarrow |f(x)| \geq N.$$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide et non-bornée A de $\mathbb{R}^n$ et ℓ un nombre complexe. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers l'infini si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \begin{cases} x \in A \\ |x| \geq M \end{cases} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On écrit $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide et non-bornée A de $\mathbb{R}^n$. On dit que f tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini si

$$\forall N > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \begin{cases} x \in A \\ |x| \geq M \end{cases} \Rightarrow |f(x)| \geq N.$$

On écrit $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Notation : dans tous les cas, on écrit $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \gamma$ $(\xi \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\},\ \gamma \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$.

Si f est réel, on peut être plus précis :

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
$\Leftrightarrow \forall N > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq N$,
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
$\Leftrightarrow \forall N > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq -N$,
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$
$\Leftrightarrow \forall N > 0, \exists M > 0$ tq $\forall x \in A, |x| \geq M \Rightarrow f(x) \geq N$,
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
$\Leftrightarrow \forall N > 0, \exists M > 0$ tq $\forall x \in A, |x| \geq M \Rightarrow f(x) \leq -N$,
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq f(x) - \ell < \epsilon$,
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq \ell - f(x) < \epsilon$,
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell^+$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ tq $\forall x \in A, |x| \geq M \Rightarrow 0 \leq f(x) - \ell < \epsilon$,
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell^-$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ tq $\forall x \in A, |x| \geq M \Rightarrow 0 \leq \ell - f(x) < \epsilon$,

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ tq $A \cap B \neq \emptyset$,
soit $\xi \in \bar{A} \cap \bar{B}$ ou $\xi = \infty$ si $A \cap B$ n'est pas borné,
soit enfin $\gamma \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
si f est réel, on peut avoir $\gamma \in \{\ell^+, \ell^-, +\infty, -\infty\}$ ($\ell \in \mathbb{R}$).
On dit que f tend vers γ lorsque x tend vers ξ dans B si la restriction de f à $A \cap B$ tend vers γ lorsque x tend vers ξ.

On écrit $\lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x \in B}} f(x) = \gamma$ pour signifier que l'on a $\lim\limits_{x \to \xi} f|_{A \cap B}(x) = \gamma$.

Théorème

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ (si cela a un sens), soit $\gamma \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
f tend vers γ lorsque x tend vers ξ ssi pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers ξ, la suite $(f(x_j))_j$ tend vers γ.

Proposition

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide et n ensembles $A_1, \ldots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) formant une partition de A,
soit $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ (si cela a un sens) et γ comme d'habitude.
Si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ tq $\xi \in \bar{A}_j$ si $\xi \in \mathbb{C}$ ou tq A_j n'est pas borné si $\xi = \infty$, $f|_{A_j}$ tend vers γ lorsque x tend vers ξ, alors f tend vers γ lorsque x tend vers ξ.

Théorème (Cauchy)

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$. Les ASE

- $\lim_{x \to \xi} f(x)$ existe et est fini,
- $\forall$ suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ de A qui convergent vers ξ, $|f(x_j) - f(y_j)| \to 0$,
- pour tout $\epsilon > 0$, $\exists$ intervalle ouvert I contenant ξ tq $\sup_{x,y \in A \cap I} |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définies sur une partie non vide $A \subset \mathbb{R}^n$ et n nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$.
Soit $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f_j(x) = \gamma_j$, avec $\gamma_j \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On a

- si $\gamma_j \in \mathbb{C}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\displaystyle\lim_{x \to \xi} \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \gamma_j$,
- si $\gamma_j \in \mathbb{C}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_0\}$ et $\gamma_{j_0} = \infty$, $\displaystyle\lim_{x \to \xi} \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) = \infty$,
- si $\gamma_j \in \mathbb{C}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\displaystyle\lim_{x \to \xi} \prod_{j=1}^{n} f_j(x) = \prod_{j=1}^{n} \gamma_j$,
- si $\gamma_j \neq 0\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\gamma_{j_0} = \infty$, on a $\displaystyle\lim_{x \to \xi} \prod_{j=1}^{n} f_j(x) = \infty$,
- si $\gamma_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma_2 \neq 0$ et si $f_2(x) \neq 0\ \forall x \in A$, alors $\displaystyle\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ si $\gamma_2 \in \mathbb{C}$ et $\displaystyle\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ si $\gamma_2 = \infty$.

Théorème

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}^n$ et g défini sur $B \subset \mathbb{C}$ tq $f(A) \subset B$.
Soit $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ et supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma$ et $\lim_{x \to \gamma} g(x) = \gamma'$.

On a $\lim_{x \to \xi} g \circ f(x) = \gamma'$.

Proposition

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}^n$, $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ et supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma$.

Si $\gamma \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{array}{ll} \text{(a)}\ \lim_{x \to \xi} \bar{f}(x) = \bar{\gamma} & \text{(c)}\ \lim_{x \to \xi} \Re f(x) = \Re\gamma \\ \text{(b)}\ \lim_{x \to \xi} |f|(x) = |\gamma| & \text{(d)}\ \lim_{x \to \xi} \Im f(x) = \Im\gamma \end{array},$$

si $\gamma = \infty$, on a

$$\text{(a)}\ \lim_{x \to \xi} \bar{f}(x) = \infty \quad \text{(b)}\ \lim_{x \to \xi} |f|(x) = +\infty \quad .$$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions réelles définies sur une partie non vide $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f_j(x) = \gamma_j$. On a, si γ_j^+ et γ^- désignent les parties positive et négative de γ_j,

- $\lim_{x \to \xi} f_1^+(x) = \gamma_1^+$,
- $\lim_{x \to \xi} f_1^-(x) = \gamma_1^-$,
- $\lim_{x \to \xi} \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} = \sup\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$,
- $\lim_{x \to \xi} \inf\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} = \inf\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$,

III. Fonctions continues

Définition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$ est continue en $x_0 \in A$ si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est fini.
Un tel point x_0 est un point de continuité de f.
Si f n'est pas continu en $x_0 \in A$, f est discontinu en x_0 et x_0 est un point de discontinuité de f.

Si f est continu en x_0, on a nécessairement

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Proposition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$ est continue en x_0 ssi $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $x \in A$ et $|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$.

Proposition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$ est continue en x_0 ssi pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers x_0, on a $f(x_j) \to f(x_0)$.

Définition

Une fonction f est continue sur A si elle est définie sur A et continue en tout point de A.

L'ensemble des fonctions continues sur A est noté $C^0(A)$.

Définition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}^n$ est uniformément continue sur A si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $x, y \in A$ et $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Proposition

Si f est uniformément continu sur A alors f est continu sur A.

Exemples de fonctions (uniformément) continues :

- $\chi_\emptyset$, $\chi_{\mathbb{R}^n}$,
- $\Re$, $\Im$, $|\cdot|$,
- $x \mapsto \sum_{j=1}^n \sqrt{x_j}$,

La fonction $x \mapsto \sum_{j=1}^n x_j^2$ ($n \in \mathbb{N}$) est continue mais pas uniformément continue.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$,

Théorème

- Toute cl de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A,
- tout produit fini de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A,
- le quotient de deux fonctions continues sur A est une fonction continue sur A, pour autant que le dénominateur ne s'annule en aucun point de A.

Théorème

Si f est une fonction continue sur A et g est une fonction continue sur une partie contenant $f(A)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur A.

Proposition

Si f est une fonction continue sur A, alors les fonctions $\bar{f}$, $\Re f$, $\Im f$ et $|f|$ sont continues sur A. Si en outre f est réel, f^+ et f^- sont continus sur A.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ réelles et continues sur une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions $\sup\{f_1, \ldots, f_n\}$ et $\inf\{f_1, \ldots, f_n\}$ sont continues sur A.

Proposition

Si f est une fonction continue sur une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$ et si B est une partie non vide de A, alors la restriction $f|_B$ de f à B est une fonction continue sur A.

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue sur K.

Lemme

De toute suite de $f(K)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de $f(K)$.

Théorème (image continue d'un compact)

L'image $f(K)$ est compacte.

Théorème (bornes atteintes)

S'il existe une suite $(x_j)_j$ de K telle que la suite $(f(x_j))_j$ converge vers un élément z_0 de $\mathbb{C}$, alors il existe $\ell \in K$ tq $f(\ell) = z_0$.
Si en outre la fonction f est réelle, alors il existe deux points x_m et x_s de K tq $f(x_m) = \inf f(K)$ et $f(x_s) = \sup f(K)$.

Théorème (Heine)

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

Fonctions dérivables de $\mathbb{R}^n$

I. Fonctions dérivables

Définition

Étant donné $k \in \{1, \dots, n\}$, une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dérivable par rapport à x_k en $x \in U$ si la limite

$$[D_k f]_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h}$$

existe et est finie. Auquel cas, cette limite est appelée la dérivée de f par rapport à la k-ème composante de x.

Définition

Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dérivable par rapport à la k-ème composante sur U si elle est dérivable par rapport à la k-ème composante en x pour tout $x \in U$.

Définition

Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dérivable sur U si elle

Si f est une fonction définie sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$, pour $x \in U$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$, posons

$$U_{x,k} = \{t \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in U\}.$$

Cet ensemble est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient x_k. Posons alors

$$f_{x,k} : U_{x,k} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Il est clair que la fonction f est dérivable par rapport à la k-ème composante en x ssi $f_{x,k}$ est dérivable en x_k et que dans ce cas, on a

$$[D_k f]_x = [Df_{x,k}]_{x_k}.$$

Proposition

Si f est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dérivable par rapport à la k-ème composante en x alors $\lim_{h \to 0} f(x + he_k) = f(x)$.

Il n'y a pas de lien entre continuité et dérivabilité dans $\mathbb{R}^n$ lorsque $n > 1$.

La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas continue en 0.

Exemple : la fonction $[\cdot]_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto [x]_j$ est dérivable sur $\mathbb{R}^n$ et

$$[D_k[\cdot]_j]_x = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{array} \right. .$$

Théorème

Toute cl de fonctions dérivables sur $U \subset \mathbb{R}^n$ est dérivable sur U : pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables sur U et si $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, alors $D_k(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j D_k f_j$.

Théorème

Si f et g sont dérivables sur U, alors fg est dérivable sur U et $D_k(fg) = gD_k f + fD_k g$.

Théorème

Si f et g sont dérivable sur U et si g ne s'annule en aucun point de U, alors f/g est dérivable sur U et $D_k(f/g) = \dfrac{gD_kf - fD_kg}{g^2}$.

Théorème

Une fonction f définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$ est dérivable sur U ssi $\bar{f}$ est dérivable sur U, ce qui a lieu ssi $\Re f$ et $\Im f$ sont dérivables sur U.
On a alors $D_k\bar{f} = \overline{D_kf}$, $D_k\Re f = \Re D_kf$ et $D_k\Im f = \Im D_kf$.

Si f est dérivable, on n'a pas nécessairement $|f|$ dérivable !

Théorème

Si f est dérivable sur U et si $V \subset U$ est ouvert, alors $f|_V$ est dérivable sur V et $D_k(f|_V)$ est la restriction de $D_k f$ à V.

Théorème (fonctions composées)

Si $m \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions réelles et dérivable sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si f est une fonction dérivable et de dérivée continue sur un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ contenant $\{(f_1(x), \ldots, f_m(x)) : x \in U\}$, alors $f(f_1, \ldots, f_m)$ est une fonction dérivable sur U et, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$[D_k f(f_1, \ldots, f_m)]_x = \sum_{j=1}^{m} [D_j f]_{(f_1(x), \ldots, f_m(x))} [D_k f_j]_x.$$

Théorème (fonctions de fonction)

Si f est dérivable sur $U \subset \mathbb{R}^n$ et si g est dérivable sur B, avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est dérivable sur U et $[D_k(g \circ f)]_x = [Dg]_{f(x)}[D_k f]_x$.

Théorème (TAF)

Si f est une fonction réelle et dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $x \in U$ et tout accroissement $h \in \mathbb{R}^n$ tq $B(x, \leq h) \subset U$, il existe des accroissements auxiliaires $h^{(1)}, \dots, h^{(n)}$ de $\mathbb{R}^n$ tq $|h^{(k)}| < |h|$
($k \in \{1, \dots, n\}$) et

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} [h]_k [D_k f]_{x+h^{(k)}}.$$

Définition

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est connexe s'il n'existe pas de partition de U en deux ouverts non-vides.

Exemple : les seuls ouverts connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts (avec l'ensemble vide).
Dans $\mathbb{R}^n$, on peut montrer que les intervalles ouverts et les boules ouvertes sont des ouverts connexes.

Théorème (ouvert connexe)

Dans $\mathbb{R}^n$, deux fonctions dérivables f et g sur un ouvert connexe sont tq $f = g + c$ sur cet ouvert pour une constante $c \in \mathbb{C}$ ssi $D_k f = D_k g$ sur l'ouvert pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

II. Espaces C^p

Proposition

Toute fonction dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dont les dérivées sont continues est elle-même continue.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$; si f est dérivable sur U par rapport à la j-ème composante en x et que $D_j f$ est lui-même dérivable par rapport à la k-ème composante en x, cette dérivée s'écrit $[D_k D_j f]_x$.

Si elle existe, une expression de la forme $D_{k_m} D_{k_{m-1}} \cdots D_{k_1} f$ est appelée une dérivée partielle d'ordre m de f.

Définition

Une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est de classe C^p sur U ($p \in \mathbb{N}^*$), si toute les dérivée d'ordre q de f existent avec $q \leq p$ et si toutes les dérivées d'ordre p sont continues.
Dans ce cas, on dit que f est p fois continûment dérivable sur U et on écrit $f \in C^p(U)$.

Une fonction f est infiniment continûment dérivable sur U, ce que l'on note $f \in C^\infty(U)$, si $f \in C^p(U)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition

Si $f \in C^p(U)$, toutes les dérivées partielles d'ordre $q \leq p$ de f sont continues.

Théorème (interversion des dérivées)

Si une fonction f appartient à $C^p(U)$, toutes les dérivées partielles d'ordre $q \leq p$ de f qui ne diffèrent entre elles que par l'ordre dans lequel on dérive sont égales.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un élément de $\mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$; un tel élément α est appelé un multi-indice.

Si f est de classe C^p avec $|\alpha| \leq p$, on pose

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f.$$

Il s'agit d'une dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$.

Théorème

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

- toute cl d'éléments de $C^p(U)$ appartient à $C^p(U)$,
- tout produit fini d'éléments de $C^p(U)$ appartient à $C^p(U)$,
- le quotient de deux fonctions de $C^p(U)$ appartient à $C^p(U)$, pour autant que le dénominateur ne s'annule en aucun point de A,
- si $f \in C^p(U)$, alors $\bar{f}$, $\Re f$ et $\Im f$ également,
- si $f \in C^p(U)$ et $g \in C^p(V)$, avec $f(U) \subset B$, alors $g \circ f \in C^p(U)$,
- si $f \in C^p(U)$, alors, pour tout ouvert V de U, $f|_V \in C^p(V)$.

Proposition

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ et $f_1, \ldots, f_n \in C^p(U)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tq $|\alpha| \leq p$, on a $D^\alpha(\sum_{j=1}^n c_j f_j) = \sum_{j=1}^n c_j D^\alpha f_j$.

Proposition (formule de Leibniz)

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et si $f, g \in C^p(U)$, on a $D_k^p(fg) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} D_k^j f \, D^{p-j} g$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposition

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^p(U)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tq $|\alpha| \leq p$, on a $D^\alpha \bar{f} = \overline{D^\alpha f}$, $D^\alpha(\Re f) = \Re D^\alpha f$ et $D^\alpha(\Im f) = \Im D^\alpha f$.

Théorème (formule de Taylor-Lagrange)

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $f \in C^p(U)$ est une fonction réelle et si $x, h \in \mathbb{R}^n$ vérifient $\{x + th : t \in [0,1]\} \subset U$, alors il existe $\theta \in]0,1[$ tq

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} h_{j_1} \cdots h_{j_k} [D_{j_1} \cdots D_{j_k} f]_x \\ &+ \frac{1}{p!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_p=1}^{n} h_{j_1} \cdots h_{j_p} [D_{j_1} \cdots D_{j_p} f]_{x+\theta h}. \end{aligned}$$

III. Application à l'étude de fonctions

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$.
La fonction f atteint un maximum local au point $x_0 \in A$ s'il existe $\epsilon > 0$ t.q. $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in A \cap B(x_0, \epsilon)$. La fonction f atteint un minimum local au point $x_0 \in A$ s'il existe $\epsilon > 0$ t.q. $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in A \cap B(x_0, \epsilon)$.

On omet parfois le mot local.

Si f atteint un maximum ou un minimum local en x_0, on dit que f atteint un extremum local en x_0.

L'extremum (maximum ou minimum) est strict si l'inégalité précédente est stricte.

Un extremum est global si l'inégalité est vérifiée pour tout $\epsilon > 0$.

Une fonction peut ne pas avoir d'extremum, atteindre un extremum en un nombre fini de points ou en un nombre infini de points.

On ne dispose pas de méthode générale permettant la recherche d'un extrema d'une fonction réelle sur une partie de $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas des fonctions dérivables sur un ensemble ouvert, on a le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction réelle et dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$; si f atteint un extremum en $x \in U$, alors on a $[D_1 f]_x = [D_2 f]_x = \cdots = [D_n f]_x = 0$.

Ce résultat n'admet pas de réciproque (comme en atteste la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [x]_j^3$).

Définition

Soit f une fonction réelle et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$; un point stationnaire de f dans I est un point de I en lequel les dérivées d'ordre 1 de f s'annulent.

Définition

Si $f \in C^2(U)$ est une fonction réelle, la matrice hessienne associée à f en $x \in U$ est la matrice $H_f(x)$ de dimension $n \times n$ définie par

$$[H_f(x)]_{j,k} = [D_j D_k f]_x,$$

pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Il s'agit d'une matrice réelle et symétrique, donc hermitienne.

Rappels : Une matrice hermitienne H de dimension $n \times n$ de vp $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est dite

- définie positive (dp) si $\lambda_j > 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$,
- définie négative (dn) si $\lambda_j < 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$,
- semi-définie positive (sdp) si $\lambda_j \geq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$,
- semi-définie négative (sdn) si $\lambda_j \leq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$,
- indéfinie dans les autres cas.

Théorème

Soit $x_0 \in U$ un point stationnaire de la fonction réelle $f \in C^2(U)$;

- si la matrice $H_f(x_0)$ est dp (resp. dn), f atteint un minimum (resp. maximum) strict local en x_0,
- s'il existe $r > 0$ tq $H_f(x)$ soit sdp (resp. sdn) pour tout $x \in B(x_0, r)$, f atteint un minimum (resp. maximum) local en x_0,
- si $H_f(x_0)$ est sdp (resp. sdn) et s'il existe $r > 0$ tq $H_f(x)$ soit dp (resp. dn) pour tout $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, f atteint un minimum (resp. maximum) strict local en x_0,
- si $H_f(x_0)$ est indéfini, f n'atteint pas d'extremum en x_0 sur U.

Exercice : rechercher les extrema de la fonction
$f :]0, \pi[^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$.

Définition

Un champ vectoriel $f = (f_1, f_2, f_3)$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ est une application qui à tout point (x, y, z) de U associe le point $(f_1(x, y, z), f_3(x, y, z), f_3(x, y, z))$ de $\mathbb{R}^3$.

f est continu, C^p,... si f_1, f_2 et f_3 le sont.

Rappels :

- le gradient d'une fonction réelle $f(x, y, z)$ est $\nabla f = (D_1 f, D_2 f, D_3 f)$,
- la divergence d'un champ vectoriel f est $\nabla \cdot f = D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3$,
- le rotationnel d'un champ vectoriel f est $\nabla \wedge f = (D_2 f_3 - D_3, f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$.

Définition

Un champ vectoriel f sur U dérive d'un potentiel

- scalaire s'il existe $F \in C^1(U)$ tq $f = \nabla F$,
- vectoriel s'il existe un champ vectoriel $g \in C^1(U)$ tq $f = \nabla \wedge g$.

Exercices : si le chanmps vectoriel f sur U

- dérive d'un potentiel scalaire $F \in C^2(U)$, alors $\nabla \wedge f = \nabla \wedge (\nabla F) = 0$ sur U,
- dérive d'un potentiel vectoriel $g \in C^2(U)$, alors $\nabla \cdot f = \nabla \cdot (\nabla \wedge g) = 0$ sur U.

Définition

Un champ vectoriel f sur U est

- irrotationnel si $f \in C^1(U)$ et $\nabla \wedge f = 0$ sur U,
- indivergentiel si $f \in C^1(U)$ et $\nabla \cdot f = 0$ sur U.

Définition

Les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sont primitivable sur U s'il existe une fonction F dérivable sur U tq
$D_1 F = f_1, \ldots, D_n F = f_n$.

Proposition

Si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ appartiennent à $C^1(U)$ et sont primitivables sur U, alors elles vérifient les égalités croisées : $D_j f_k = D_k f_j$
$\forall j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition

Un ouvert connexe U est dit critique s'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ appartenant à $C^1(U)$ qui vérifient les égalités croisées et qui ne sont pas primitivables.

Sur un tel ouvert, $f_1, \ldots, f_n$ appartenant à $C^1(U)$ sont primitivables ssi ils vérifient les égalités croisées.

Théorème (champ irrotationnel)

Si f est un champ irrotationnel de $C^1(U)$, où U est un ouvert connexe non-critique, alors f dérive d'un potentiel scalaire $F \in C^2(U)$.

De plus, la fonction réelle $G \in C^1(U)$ est tq $f = \nabla G$ ssi il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $G = F + C$ sur U.

Définition

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est étoilé en $a \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in U$, le segment $[a, x] = \{ta + (1 - t)x : t \in [0, 1]\}$ est inclus dans U.

Un ouvert étoilé n'est pas critique.

Théorème (champ indivergentiel)

Si U est un ouvert étoilé en a et si f est un champ indivergentiel de $C^1(U)$, alors f dérive d'un potentiel vectoriel $g \in C^1(U)$.

De plus, le champ vectoriel $h \in C^1(U)$ est tq $f = \nabla \wedge h$ ssi il existe $H \in C^2(U)$ tq $h = g + \nabla H$ sur U.

Exemple : Si $f \in C^0(]0,+\infty[)$ est réel, alors

$$(f(r)x, f(r)y, f(r)z),$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, avec $r = |(x,y,z)|$, dérive d'un potentiel scalaire $F(r)$; F est une primitive réelle de $tf(t)$ sur $]0,+\infty[$.

En particulier :

- $\dfrac{(x,y,z)}{r}$ dérive du potentiel scalaire r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,
- $\dfrac{(x,y,z)}{r^2}$ dérive du potentiel scalaire $\ln(r)$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,
- $-Gm\dfrac{(x,y,z)}{r^3}$ dérive du potentiel scalaire $-Gm/r$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.