Rudiments de logique et théorie des ensembles

I. Logique

II. Ensembles

III. Applications

IV. Ensembles dénombrables

I. Logique (rudiments)

• Quelques locutions et symboles

- Une *relation* entre objets mathématiques est une propriété, vérifiée ou non, entre certains de ces objets
- le principe de *non-contradiction* : une relation ne peut être vraie et fausse à la fois
- le principe du *tiers exclu* : si une relation n'est pas vraie elle est fausse ; si une relation n'est pas fausse, elle est vraie

Paradoxe du menteur : Épiménide, un Crétois, dit « tous les Crétois sont des menteurs ». Dit-il la vérité ?

À partir de deux relations, R et S, on peut en définir de nouvelles :

- négation de R, $\neg R$; une relation est vraie si sa négation est fausse et elle est fausse si sa négation est vraie
- la relation « R ou S » ($R \vee S$) vraie si l'une des relations R ou S est vraie
- la relation « R et S » ($R \wedge S$) vraie si les relations R et S sont vraies
- la relation « R implique S » ($R \Rightarrow S$) : $S \vee \neg R$
- la relation « R si et seulement si S » ($R \Leftrightarrow S$) : $(R \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow R)$

le « ou » est pris au sens non disjonctif : si R et S sont vrais alors $R \vee S$ est vrai.

Seules deux méthodes de construction sont nécessaires. Les autres s'en déduisent.

II. Ensembles

Théorie naïve (= théorie des patates) : un ensemble n'est pas (/est mal) défini.

• Un ensemble est déterminé par ses éléments donnés

- de manière explicite,
- en plaçant entre accolades un symbole générique suivi de « : » et d'une propriété caractérisant les éléments,
- par un symbole.

• Relations concernant les ensembles

- $a \in A$ signifie que a est un élément de A,
- $A \subset B$ signifie que tout élément de A est un élément de B,
- $A = B$ signifie $A \subset B$ et $B \subset A$,
- l'ensemble vide $\emptyset$ est le seul ensemble ne contenant aucun élément,
- $\wp(A)$ est l'ensemble des parties (sous-ensembles) de A.

• Ensembles associés

- $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B,
- $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B,
- $A \setminus B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B,
- A^c, l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A.

Puisque $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B \cap C$ a un sens. On écrit

- a appartient à $\cap_{j \in J} A_j$ si a appartient à chacun des A_j, avec $j \in J$,
- a appartient à $\cup_{j \in J} A_j$ si a appartient à un des A_j, avec $j \in J$.

$A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{j=1}^{n} A_j$ est l'ensemble des éléments $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que $a_1 \in A_1$,..., $a_n \in A_n$.
On pose $A^n = A \times \cdots \times A$ (n fois).

• Deux quantificateurs

- pour tout : $\forall$,
- il existe : $\exists$.

Savoir nier ! ! !

• Paradoxe de Russell

Soit $R = \{A : A \notin A\}$.

Si $R \in R$, alors, par définition de R, $R \notin R$;
si $R \notin R$, alors, par définition de R, $R \in R$.
On a donc $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$!

III. Applications

Une application f de A dans B est une partie de $A \times B$ qui permet d'associer à tout élément a de A un unique élément $f(a)$ de B

Ceci n'est pas une définition, mais permet de définir la notion d'application.

Une notation pour $f : A \to B$ est $f \in B^A$.
Une application $f \in B^A$ est une fonction si $B \subset \mathbb{C}$.

Soit $f : A \to B \quad a \mapsto f(a)$ et $A' \subset A$; la restriction $f|_{A'}$ de f à A' est l'application $f|_{A'} : A' \to B \quad a \mapsto f(a)$.

Soit $f : A \to B$, $A' \subset A$, $A' \neq \emptyset$ et $B' \subset B$;

- l'image directe de f par A' est $f(A') = \{f(a) : a \in A'\}$,
- l'image inverse de f par B' est $f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$.

On pose $f(\emptyset) = \emptyset$.

L'ensemble $f(\{a\})$ contient toujours un seul élément (à savoir $f(a)$) ; $f^{-1}(\{b\})$ peut contenir plusieurs éléments ou être vide.

Proposition

Soit $f \in B^A$; on a

- $A' \subset A'' \subset A$ implique $f(A') \subset f(A'') \subset f(A)$,
- $B' \subset B'' \subset B$ implique $f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B'') \subset f^{-1}(B)$,
- $A_j \subset A\ \forall j \in J$ implique $f(\cup_{j\in J} A_j) = \cup_{j\in J} f(A_j)$ et $f(\cap_{j\in J} A_j) \subset \cap_{j\in J} f(A_j)$,
- $B_j \subset B\ \forall j \in J$ implique $f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}(\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$,
- $B' \subset B$ implique $f^{-1}(B \setminus B') \subset A \setminus f^{-1}(B')$.

• Composition d'applications

Si $f \in B^A$ et $g \in C^B$, la composition de f et g est l'application $g \circ f : A \to C \quad a \mapsto g\big(f(a)\big)$.

Proposition

Si $f \in B^A$, $g \in C^B$ et $C' \subset C$, on a

$$(g \circ f)^{-1}(C') = f^{-1}\big(g^{-1}(C')\big).$$

• Injections, surjections et bijections

Soit $f \in B^A$;

- f est une injection lorsque l'image inverse par f de tout élément de B contient un élément au plus,
- f est une surjection lorsque $f(A) = B$,
- f est une bijection si f est à la fois une injection et une surjection.

Proposition

$f \in B^A$ est une injection si et seulement s'il existe $g \in A^B$ tel que $g \circ f$ est l'identité sur A.

L'application g est appelée un inverse à gauche de f.

Proposition (AC)

$f \in B^A$ est une surjection si et seulement s'il existe $h \in A^B$ tel que $f \circ h$ est l'identité sur B.

L'application h est appelée un inverse à droite de f.

Si $f \in B^A$ est une bijection, il admet donc un inverse à droite et un inverse à gauche.

Proposition (AC)

$f \in B^A$ est une bijection si et seulement s'il admet un inverse à gauche et un inverse à droite.
Dans ce cas, les inverses correspondent.

Dans ce cas, l'inverse unique est noté f^{-1}.

Proposition

Si $f \in B^A$ et $g \in C^B$ sont des injections (resp. surjections, bijections), il en va de même pour l'application $g \circ f$.

• L'axiome du choix

Axiome du choix

Étant donné un ensemble (d'indexation) J non vide, et, pour tout $j \in J$, un ensemble E_j non vide, il existe une application définie sur J, appelée fonction de choix, qui à un indice j de J associe un élément de E_j.

Dans ce cours, nous n'utiliserons qu'une version faible, l'axiome du choix dénombrable, où l'on suppose avoir $J \subset \mathbb{N}$.

IV. Ensembles dénombrables

Deux ensembles A et B sont équipotents s'il existe une bijection $f \in B^A$.

Théorème

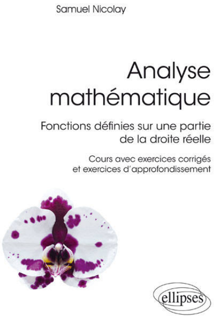
- A et $\wp(A)$ ne sont pas équipotents,
- $\mathbb{N}^n$ et $\mathbb{N}^{n'}$ sont équipotents (n et n' naturels),
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents,
- $\mathbb{R}$ et $\wp(\mathbb{N})$ sont équipotents.

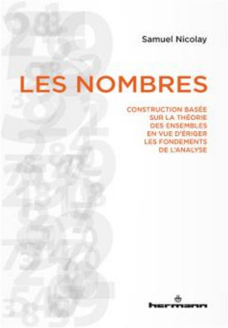
Un ensemble A est dénombrable s'il existe $B \subset \mathbb{N}$ tel que A et B sont équipotents.

Corollaire

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables,
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas dénombrables.

Pour aller plus loin...





Les nombres (rudiments)

I. Les nombres naturels, entiers et rationnels

II. Les nombres réels

III. Les nombres complexes

IV. Compléments sur les nombres réels et complexes
   a. Valeur absolue d'un nombre réel
   b. Module d'un nombre complexe
   c. Signature, parties positive et négative
   d. Parties majorées et minorées de $\mathbb{R}$
   e. Intervalles

I. Les nombres naturels, entiers et rationnels

L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels $\{0, 1, \ldots, \}$ muni de l'opération addition.

Théorème

Il existe une unique extension de $\mathbb{N}$ (muni de l'opération addition) en un groupe $\mathbb{Z}$, appelé ensemble des nombres entiers, tel que tout groupe contenant $\mathbb{N}$ contienne également $\mathbb{Z}$.

Le groupe $\mathbb{Z}$ est donc le plus petit groupe contenant $\mathbb{N}$.

Le groupe $\mathbb{Z}$ est totalement ordonné.

Théorème

Il existe une unique extension de $\mathbb{Z}$ (muni des opérations addition et multiplication) en un corps commutatif $\mathbb{Q}$, appelé ensemble des nombres rationnels, tel que tout corps commutatif contenant $\mathbb{Z}$ contienne également $\mathbb{Q}$.

Le corps commutatif $\mathbb{Q}$ est donc le plus petit corps commutatif contenant $\mathbb{Z}$.

Le corps commutatif $\mathbb{Q}$ est totalement ordonné.

II. Les nombres réels

Théorème

Il existe une unique extension de $\mathbb{Q}$ en un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres réels, pour lequel l'équation $x^2 = r$ pour $r \geq 0$ admet toujours une unique solution positive.

Le nombre $x \geq 0$ vérifiant l'équation $x^2 = r$ est appelé la racine carrée de r et est noté $\sqrt{r}$.

Un nombre irrationnel est un nombre réel qui n'est pas rationnel.

$\mathbb{R}$ est un corps archimédien :

Théorème

Si x et y sont deux nombres réels, avec $x > 0$, alors il existe un nombre naturel n tel que $y < nx$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

Théorème

Si x et y sont deux nombres réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre rationnel q tel que $x < q < y$.

• Rappel sur les corps ordonnés

Puisque $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, on a, pour tous nombres réels x, y et z,

- $x < y$ implique $x + z < y + z$,
- $x > 0$ et $y > 0$ implique $xy > 0$.

Théorème

Pour tous nombres réels x, y et z, on a

- $x > 0$ si et seulement si $-x < 0$,
- $x > 0$ et $y < z$ implique $xy < xz$,
- $x < 0$ et $y < z$ implique $xy > xz$,
- $x^2 \geq 0$,
- $0 < x < y$ implique $0 < y^{-1} < x^{-1}$,
- $0 < 1$.

III. Les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations addition et multiplication définies respectivement comme suit :

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

et

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Proposition

L'ensemble des nombres complexes définit un corps commutatif où

- $(0, 0)$ est le neutre pour l'addition,
- $(-x, -y)$ est l'opposé de (x, y),
- $(1, 0)$ est le neutre pour la multiplication,
- $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ est l'inverse de (x, y) si $(x, y) \neq (0, 0)$.

On pose $i = (0,1)$; on a $i^2 = -1$.

Proposition

Tout nombre complexe (x, y) s'écrit $x + iy$. En particulier tout nombre réel x peut être considéré comme le nombre complexe $(x, 0)$.

• Parties réelle et imaginaire

Si $z = (x, y)$ est un nombre complexe, la partie réelle de z est le nombre réel $\Re z = x$ et la partie imaginaire de z est le nombre réel $\Im z = y$.

Proposition

Soit z, z' deux nombres complexes et r un nombre réel ;

- on a $z = z'$ si et seulement si $\Re z = \Re z'$ et $\Im z = \Im z'$,
- $\Re(rz) = r\Re z$, $\Im(rz) = r\Im z$,
- $\Re(z + z') = \Re z + \Re z'$, $\Im(z + z') = \Im z + \Im z'$.

• Conjugué d'un nombre complexe

Si $z = (x, y)$ est un nombre complexe, le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = (x, -y)$.

On a donc $\overline{x + iy} = x - iy$.

Proposition

Soit z et z' deux nombres complexes ; on a

- $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$,
- $z\bar{z} \geq 0$ et si $z \neq 0$, alors $z\bar{z} > 0$.

Il n'existe pas d'ordre sur les nombres complexes compatible avec l'addition et la multiplication.

IV. Compléments sur les nombres réels et complexes

IV.a. Valeur absolue d'un nombre réel

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad r \mapsto \begin{cases} r & \text{si } r \geq 0 \\ -r & \text{si } r < 0 \end{cases} .$$

$|r| = \sqrt{r^2}$.

Proposition

Soit r et s deux nombres réels ; on a

- $|r| \geq 0$, $|r| = 0$ ssi $r = 0$,
- $|rs| = |r|\,|s|$,
- si $s \neq 0$, $|r/s| = |r|/|s|$,
- $|r + s| \leq |r| + |s|$, égalité que ssi $rs \geq 0$, (inégalité triangulaire)
- $||r| - |s|| \leq |r - s|$. (inégalité triangulaire inversée)

Proposition

Si r et s sont deux nombres réels, on a

- $|r| \leq s$ ssi $-s \leq r \leq s$,
- $|r| \geq s$ ssi $r \geq s$ ou $r \leq -s$.

Exercice Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n nombres réels, on a $|\sum_{j=1}^{n} x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.

IV.b. Module d'un nombre complexe

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad z \mapsto |z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}.$$

Il s'agit d'une généralisation de la valeur absolue.

On a $z\bar{z} = |z|^2$.

Proposition

Soit z et z' deux nombres complexes ; on a

- $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ ssi $z = 0$,
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$,
- $|\Re z| \leq |z|$ et $|\Im z| \leq |z|$,
- $|zz'| = |z|\,|z'|$,
- si $z' \neq 0$, $|z/z'| = |z|/|z'|$,
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, égalité ssi $\exists r \geq 0$ tq $z = rz'$ ou $z' = rz$,
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

IV.c. **Signature, parties positive et négative**

Signature $\quad \text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{-1, 1\} \quad r \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ -1 & \text{si } r < 0 \end{cases}.$

Partie positive $\quad \cdot^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad r \mapsto r^+ = \begin{cases} r & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}.$

Partie négative $\quad \cdot^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad r \mapsto r^- = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0 \\ -r & \text{si } r < 0 \end{cases}.$

Proposition

Soit r et s deux nombres réels ; on a

- $r^+ \geq 0$, $r^- \geq 0$,
- $r^+ = (-r)^-$, $r^- = (-r)^+$,
- $r = r^+ - r^-$ et $|r| = r^+ + r^-$,
- $r^+ = \frac{1}{2}(|r| + r)$ et $r^- = \frac{1}{2}(|r| - r)$,
- $|r^+ - s^+| \leq |r - s|$ et $|r^- - s^-| \leq |r - s|$.

Bornes supérieure et inférieure de deux nombres réels :

$$\sup\{r,s\} = \begin{cases} r & \text{si } r \geq s \\ s & \text{si sinon} \end{cases}, \qquad \inf\{r,s\} = \begin{cases} r & \text{si } r \leq s \\ s & \text{si sinon} \end{cases}.$$

Proposition

Soit r et s deux nombres réels ; on a

- $r^+ = \sup\{r, 0\}$ et $r^- = \sup\{-r, 0\}$,
- $|r| = \sup\{r^+, r^-\}$ et $\inf\{r^+, r^-\} = 0$,
- $\sup\{r,s\} = r + (r-s)^- = r + (s-r)^+$.

Si $r_1, \ldots, r_n$ sont n nombres réels ($n > 2$),

$$\sup\{r_1, \ldots, r_n\} = \sup\{\sup\{r_1, \ldots, r_{n-1}\}, r_n\},$$

$$\inf\{r_1, \ldots, r_n\} = \inf\{\inf\{r_1, \ldots, r_{n-1}\}, r_n\}.$$

Proposition

Soit n nombres réels $r_1, \ldots, r_n$; on a

$$\sup\{r_1, \ldots, r_n\} = -\inf\{-r_1, \ldots, -r_n\},$$

$$\inf\{r_1, \ldots, r_n\} = -\sup\{-r_1, \ldots, -r_n\}.$$

IV.d. **Parties majorées et minorées de $\mathbb{R}$**

Définition

Une partie E de $\mathbb{R}$ est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq b$ pour tout $x \in E$.
Un tel nombre b est appelé un majorant de E.

Définition

Une partie E de $\mathbb{R}$ est minorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq a$ pour tout $x \in E$.
Un tel nombre a est appelé un minorant de E.

Si b est un majorant de E et si $b' \geq b$, b' est aussi un majorant de E.

Définition

Un nombre réel s est une borne supérieure de E si s est un majorant de E tel que, pour tout majorant b de E, on a $s \leq b$.

Définition

Proposition

La borne supérieure d'une partie non vide majorée est unique.

Idem pour les bornes inférieures.
La borne supérieure d'une partie non vide E majorée est notée $\sup E$,
La borne inférieure d'une partie non vide E minorée est notée $\inf E$.
Ces notations sont consistantes...

Proposition

Un majorant s d'une partie E de $\mathbb{R}$ est la borne supérieure de E ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $s - \epsilon < x$.
Un minorant m d'une partie E de $\mathbb{R}$ est la borne inférieure de E ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $m + \epsilon > x$.

Corollaire

Si $s \in E$ est un majorant de E, alors s est la borne supérieure de E.

Idem minorant...

Si $\sup E \in E$, on dit que la borne supérieure est réalisée ou atteinte (On dit parfois que $\sup E$ est le maximum de E),
Si $\inf E \in E$, on dit que la borne inférieure est réalisée ou atteinte (On dit parfois que $\inf E$ est le minimum de E).

Proposition

Si A et B sont deux parties majorées de $\mathbb{R}$, alors on a

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

De même, si A et B sont minorés, alors $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

IV.e. **Intervalles**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; on pose

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$, $]a, b] = \{x : a < x \leq b\}$,

$[a, b[= \{x : a \leq x < b\}$, $]a, b[= \{x : a < x < b\}$,

$[a, +\infty[= \{x : a \leq x\}$, $]a, +\infty[= \{x : a < x\}$,

$]-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$, $]-\infty, b[= \{x : x < b\}$,

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

semi-intervalle / intervalle ouvert / intervalle fermé.
a : origine, b : extrémité. Longueur $b - a$ ou l'infini.
Le vide est aussi considéré comme un intervalle.

Notation α est un nombre ou le symbole $-\infty$,
β est un nombre ou le symbole $+\infty$.
$\rightarrow$ notation $]\alpha, \beta[$.

Théorème

Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi $x_1, x_2 \in I$ et $x_1 < x < x_2$ implique $x \in I$.

Corollaire

Toute intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle (éventuellement vide) de $\mathbb{R}$.

Définition

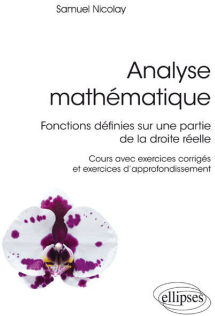
Un intervalle complexe est un ensemble I de la forme

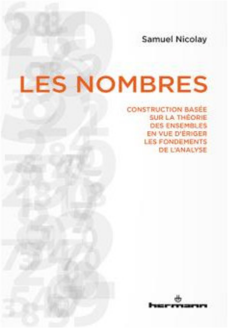
$$I = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \in I_1,\ \Im z \in I_2\},$$

où I_1 et I_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, appelés intervalles constitutifs de I.

On a $I = I_1 \times I_2$.

Pour aller plus loin...





Suites de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

I. Définitions

Définition

Une suite de $\mathbb{K}$ est unélément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$,
i.e. une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{K}$.

Notation $x_. : \mathbb{N}^* \to \mathbb{K} \quad j \mapsto x_j$.
Une telle suite est notée $(x_j)_j$.

Une suite peut être obtenue à l'aide des trois procédés suivants :

- en donnant explicitement l'application ;
  exemple : la suite $(x_j)_j$ définie par $x_j = j^2 + j + 1$ ($j \in \mathbb{N}^*$),
- en donnant une relation de récurrence ;
  exemple : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ et $x_j = x_{j-1} + x_{j-2}$ ($j \geq 3$),
- (AC) si, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, E_j est une partie non vide de $\mathbb{K}$, il existe une suite $(x_j)_j$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a $x_j \in E_j$.

Une application k de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ est strictement croissante si $k(j+1) > k(j)$ pour tout nombre naturel j non nul.

Définition

Une suite $(y_j)_j$ de $\mathbb{K}$ est une sous-suite de la suite $(x_j)_j$ s'il existe une application k de $\mathbb{N}^*$ dans lui-mêmme strictement croissante telle que $y_j = x_{k(j)}$ pour tout nombre naturel j non nul.

Lemme

Si k est une application de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même strictement croissante, alors on a $k(j) \geq j$ pour tout nombre naturel j non nul.

Définition

Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$ converge/tend vers $\ell \in \mathbb{K}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que pour tout indice $j \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $j \geq J$, on a $|x_j - \ell| < \epsilon$;
ℓ est la limite de la suite $(x_j)_j$.

On écrit $x_j \to \ell$ ou $\lim_j x_j = \ell$.

Définition

Une suite $(x_j)_j$ converge s'il existe ℓ tq $x_j \to \ell$;
dans le cas contraire, on dit que la suite diverge.

Pour une suite réelle $(x_j)_J$, on a $x_j \to \ell$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists J$ tq $j \geq J \Rightarrow x_j \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.

Dans la définition de la convergence, les inégalités peuvent être strictes ou non-strictes.

II. Résultats fondamentaux

Théorème

Si une suite converge, sa limite est unique.

Théorème

Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Définition

Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$ est bornée s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|x_j| < C$ pour tout indice naturel j non nul.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Exemples

- la suite constante $x_j = c \ \forall j$ converge vers c,
- la suite définie par $x_j = 1/j \ \forall j$ converge vers 0,
- la suite définie par $x_j = (-1)^j$ ne converge pas,
- la suite définie par $x_j = j$ ne converge pas.

Définition

Une suite $(x_j)_j$ converge absolument vers l'infini si, pour tout $N > 0$, il existe un nombre réel J tel que pour tout indice $j \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $j \geq J$, on a $|x_j| \geq N$.

On écrit $|x_j| \to +\infty$ ou $\lim_j |x_j| = +\infty$.

Une série qui converge absolument vers l'infini ne converge pas ! Il s'agit d'un abus de langage.

Théorème

Toute sous-suite d'une suite convergeant absolument vers l'infini converge absolument vers l'infini.

Dans $\mathbb{R}$, interprétation similaire en termes d'intervalles :
pour j suffisamment grand, x_j n'appartient pas à $[-N, N]$.

III. Suites réelles

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a des propriétés supplémentaires.

Une suite réelle $(x_j)_j$ est

- croissante si $x_j \leq x_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$,
- strictement croissante si $x_j < x_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$,
- décroissante si $x_j \geq x_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$,
- strictement décroissante si $x_j > x_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$,
- monotone si elle est croissante ou décroissante,
- strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Soit une suite réelle $(x_j)_j$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$; on dit qu'elle converge

- à droite vers ℓ s'il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j \geq \ell$, $(x_j \to \ell^+)$
- à gauche vers ℓ s'il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j \leq \ell$, $(x_j \to \ell^-)$
- en croissant vers ℓ si elle est croissante,
- en croissant strictement vers ℓ si elle est strictement croissante,
- en décroissant strictement vers ℓ si elle est strictement décroissante,

Proposition

Si E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée (resp. minorée), alors il existe une suite de E qui converge vers $\sup E$ (resp. vers $\inf E$).

Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée) s'il existe une constante $C > 0$ telle que $x_j \leq C$ (resp. telle que $x_j \geq C$) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Cette suite est majorée ssi l'ensemble de ses valeurs $\{x_j : j \in \mathbb{N}^*\}$ est majoré.

Théorème

Une suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge vers la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de ses éléments.

Corollaire

Si une sous-suite d'une suite réelle monotone converge, alors la suite converge également.

La suite numérique réelle $(x_j)_j$

- converge vers $+\infty$ si, pour tout $N > 0$, il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j \geq N$, $(x_j \to +\infty)$
- converge vers $-\infty$ si, pour tout $N > 0$, il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j \leq -N$, $(x_j \to -\infty)$
- converge en croissant vers $+\infty$ si elle est croissante et converge vers $+\infty$,
- converge en croissant strictement vers $+\infty$ si elle est strictement croissante et converge vers $+\infty$,
- converge en décroissant vers $-\infty$ si elle est décroissante et converge vers $-\infty$,
- converge en décroissant strictement vers $-\infty$ si elle est strictement décroissante et converge vers $-\infty$.

IV. Propriétés des suites convergentes

Proposition

Si les suites $(x_j)_j$ et $(x'_j)_j$ de $\mathbb{K}$ convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, alors la suite $(x_j + x'_j)_j$ converge vers $\ell + \ell'$.

Corollaire

Toute combinaison linéaire de suites convergentes converge vers la combinaison linéaire correspondante des limites.

Proposition

Si $(x_j)_j$ et $(x'_j)_j$ sont deux suites de $\mathbb{K}$ telles que la suite $(x_j)_j$ converge absolument vers l'infini et si la suite $(x'_j)_j$ est bornée, alors la suite $(x_j + x'_j)_j$ converge absolument vers l'infini.

Proposition

Si les suites $(x_j)_j$ et $(x'_j)_j$ de $\mathbb{K}$ convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, alors la suite $(x_j x'_j)_j$ converge vers $\ell\ell'$.

Corollaire

Si $(x_j)_j$ et $(x'_j)_j$ sont deux suites de $\mathbb{K}$ telles que $(x_j)_j$ convergent absolument vers l'infini et $|x'_j| \geq \delta$ pour un nombre $\delta > 0$ quel que soit $j \in \mathbb{N}^*$, alors $(x_j x'_j)_j$ converge absolument vers l'infini.

Proposition

Si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$ converge vers un nombre non nul ℓ et si on a $x_j \neq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, alors la suite $(1/x_j)_j$ converge vers $1/\ell$.

Proposition

Si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$ n'a aucun élément nul, alors elle converge vers 0 ssi $(1/x_j)_j$ converge absolue vers l'infini.

Théorème

Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{C}$ converge vers ℓ ssi les suites $(\Re x_j)_j$ et $(\Im x_j)_j$ convergent vers $\Re\ell$ et $\Im\ell$ respectivement.

Corollaire

Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{C}$ converge vers ℓ ssi $(\bar{x}_j)_j$ converge vers $\bar{\ell}$.

Proposition

Soit $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$. On a les propriétés suivantes :

- si $(x_j)_j$ converge vers ℓ, alors $(|x_j|)_j$ converge vers $|\ell|$,
- $(x_j)_j$ converge vers 0 ssi $(|x_j|)_j$ converge vers 0.

Théorème (de Cesàro)

Si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$ converge vers ℓ, alors la suite $(y_j)_j$ définie par

$$y_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} x_k$$

converge également vers ℓ.

Proposition

Une suite réelle $(x_j)_j$ converge vers ℓ ssi les suites $(x_j^+)_j$ et $(x_j^-)_j$ convergent vers ℓ^+ et ℓ^- respectivement.

Corollaire

Si $(x_j^{(1)})_j$,..., $(x_j^{(n)})_j$ sont n suites réelles qui convergent vers $\ell^{(1)}$,...,$\ell^{(n)}$ respectivement, alors $(\sup\{(x_j^{(1)})_j, \ldots, (x_j^{(n)})_j\})_j$ converge vers $\sup\{\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(n)}\}$.

Proposition

Si $(x_j)_j$ et $(x'_j)_j$ sont deux suites réelles qui convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, alors

- si $\ell \neq \ell'$, il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j \neq x'_j$.
  Dès lors, si $\ell \neq r$, il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j \neq r$,
- si $\ell < \ell'$, il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j < x'_j$.
  En particulier, si $\ell < r$, il existe J tel que $j \geq J$ implique $x_j < r$.

Proposition

Si $(x_j)_j$ est suite réelle qui convergent vers ℓ et si $x_j < r$ pour tous $j \in \mathbb{N}^*$, alors on a $\ell \leq r$.

Même type de résultat avec les autres signes d'inégalité.

Proposition

Si $(x_j)_j$ est suite réelle qui convergent vers $+\infty$ et si la suite réelle $(x'_j)_j$ est telle que $x_j \leq x'_j$ pour tous $j \in \mathbb{N}^*$, alors cette dernière converge également vers $+\infty$.

Théorème (étau)

Si les suites réelles $(x_j)_j$ et $(x''_j)_j$ convergent vers ℓ et si la suite réelle $(x'_j)_j$ vérifie $x_j \leq x'_j \leq x''_j$ pour tous $j \in \mathbb{N}^*$, alors la suite $(x'_j)_j$ converge également vers ℓ.

Exemples

- Si $r > 1$, $r^j \to +\infty$,
- si $0 < r < 1$, $r^j \to 0$,
- si $r > 0$, $\sqrt[j]{r} \to 1$,
- $\sqrt[j]{j} \to 1$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$, $\frac{j^n}{(1+a)^j} \to 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > 1$, on a $\frac{j^n}{z^j} \to 0$,
- $\lim_j \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!}$ converge,
- $(1 + \frac{1}{j})^j$ converge vers la même limite que la suite précédente,
- pour tout $a > 0$ et en choisissant $x_1 > 0$, on a $\frac{1}{2}(x_j + \frac{a}{x_j}) \to \sqrt{a}$.

V. Rudiments de topologie dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{K}$; un point x_0 de $\mathbb{K}$ est adhérent à E si tout intervalle ouvert contenant x_0 est d'intersection non vide avec E. L'ensemble $\bar{E}$ des points adhérents à E est appelé l'adhérence de E.

$\bar{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$, $\bar{\emptyset} = \emptyset$ et $E \subset \bar{E}$.

Proposition

L'adhérence de $\bar{E}$ est $\bar{E}$.

Proposition

Soit $E \subset \mathbb{K}$; un point appartient à $\bar{E}$ ssi il existe une suite de E qui converge vers ce point.

Exemple : l'adhérence d'un intervalle d'extrémités a et b ($a < b$) est $[a, b]$.

Définition

Un ensemble F est fermé si $\bar{F} \subset F$.

Un fermé de $\mathbb{K}$ contient les limites de ses suites convergentes.

Exemples : $\mathbb{K}$ et $\emptyset$ sont fermés ;
$\mathbb{R}$ considéré comme une partie de $\mathbb{C}$ est fermé.

Proposition

Étant donné un ensemble E, $\bar{E}$ est un fermé inclus dans tout fermé contenant E.

« $\bar{E}$ est le plus petit fermé contenant E ».

Définition

Un ensemble U est ouvert si U^c est fermé.

Proposition

Une partie U de $\mathbb{K}$ est ouverte ssi pour tout point de U il existe un intervalle ouvert I contenant ce point tel que $I \subset U$.

Exercices Les intervalles...
Exercice Un singleton est fermé et non-ouvert.

Proposition

- Toute union d'ensembles ouverts est une ensemble ouvert,
- toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert,
- toute intersection d'ensembles fermés est une ensemble fermé,
- toute union finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

VI. Ensembles bornés, ensembles compacts

Définition

Un ensemble E de $\mathbb{K}$ est borné s'il existe $C > 0$ tel que $x \in E$ implique $|x| < C$.

Proposition

Toute intersection d'ensembles bornés est un ensemble borné ; toute union finie d'ensembles bornés est un ensemble borné.

Proposition

Un ensemble E de $\mathbb{R}$ est borné ssi il est majoré et minoré.

Définition

Un ensemble E de $\mathbb{K}$ est compact s'il est à la fois borné et fermé.

Exemple : Les seuls intervalles compacts de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de la forme $[a, b]$ ($a \leq b$).
Exemple : La boule fermée B de rayon $R > 0$, $B = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq R\}$ est un ensemble compact.

Proposition

Toute intersection d'ensembles compacts est un ensemble compact ; toute union finie d'ensembles compacts est un ensemble compact.

Il ne s'agit pas ici de la « vraie définition », mais d'une caractérisation. Elle n'est pas valable dans un cadre plus général.

Définition

Une famille d'ensembles est la donnée d'un ensemble non vide J et, pour tout $j \in J$, d'un ensemble E_j.

Définition

Une famille $(E_j)_{j \in J}$ est une famille d'ouverts si E_j est ouvert $\forall j \in J$.

Définition

Une famille $(E_j)_{j \in J}$ recouvre E si $E \subset \cup_{j \in J} E_j$.

Définition

Un ensemble E satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si, pour toute famille d'ouverts $(U_j)_{j\in J}$ qui recouvre E, il existe un ensemble fini $J' \subset J$ tel que $E \subset \cup_{j\in J'} U_j$.

On dit que « de tout recouvrement ouvert de E, on peut en extraire un recouvrement fini ».

Théorème (RA)

Un ensemble de $\mathbb{K}$ est compact ssi il satisfait la propriété de Borel-Lebesgue.

Exercice Si $(x_j)_j$ est une suite de $\mathbb{K}$ qui converge vers ℓ, alors $\{x_j : j \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\ell\}$ est un compact de $\mathbb{K}$.

VII. Suites de Cauchy

Définition

Une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$ est de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre J tel que $p, q \geq J$ implique $|x_p - x_q| < \epsilon$.

Proposition

Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition

Toute suite convergente est de Cauchy.

Théorème

Une suite de $\mathbb{K}$ converge ssi elle est de Cauchy.

VIII. Théorème de Bolzano-Weierstraß

Lemme

De toute suite bornée de $\mathbb{K}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème (Bolzano-Weierstraß)

Un ensemble de $\mathbb{K}$ est compact ssi de toute suite de cet ensemble on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de cet ensemble.

Séries

I. Définitions

Définition

Étant donné une suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$, la suite des sommes partielles associée est la suite

$$(\sum_{j=1}^{k} x_j)_k = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)_k.$$

Définition

Une série est la donnée d'une suite $(x_j)_j$, appelée terme général de la série et de la suite des sommes partielles associées.

Notation : $\sum_j x_j$ ou $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$.
x_j est le j-ième terme de la série $\sum_j x_j$.

L'étude d'une série se ramène à celle d'une suite. L'inverse est vrai : si $y_1 = x_1$, $y_{j+1} = x_{j+1} - x_j$ ($j \in \mathbb{N}^*$), alors $x_j = \sum_{k=1}^{j} y_k$.

I. Définitions

Définition

la série $\sum_j x_j$ converge si la suite des sommes partielles $(\sum_{j=1}^{k} x_j)_k$ converge.
Dans ce cas, cette limite est appelée la somme de la série $\sum_j x_j$.
Si la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Notation : si elle existe, la limite est notée $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$.

Les notations pour une série et sa limite (éventuelle) sont semblables !

Proposition

Soit $\sum_j x_j$ et $\sum_j y_j$ deux séries convergentes et c un nombre ; les séries $\sum_j x_j + y_j$ et $\sum_j cx_j$ convergent.

Proposition

La suite $(x_j)_j$ converge ssi la série $\sum_j x_{j+1} - x_j$ converge.
Dans ce cas, on a $\lim_j x_j = x_1 + \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1} - x_j$.

Proposition

Si la série $\sum_j x_j$ converge alors, pour tout $J \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$ converge et $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \sum_{j=1}^{J-1} x_j + \sum_{j=J}^{\infty} x_j$.
Inversement, s'il existe $J \in \mathbb{N}^*$ tel que la série $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$ converge, alors la série $\sum_j x_j$ converge.

Définition

Si la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge, alors $\sum_{j=J}^{\infty} x_j$ $(J \in \mathbb{N}^*)$ est appelé le J-ième reste de la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$.

Définition

Une suite est réelle si tous ses termes sont des nombres réels.

Proposition

Une série réelle à termes positifs converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Exemple La série harmonique, $\sum_j 1/j$, ne converge pas.

Exemple La série $\sum_j 1/j^2$ converge.

Théorème (critère de Cauchy)

La série $\sum_j x_j$ converge ssi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel J tel que $q \geq p \geq J$ implique $|\sum_{j=p}^{q} x_j| < \epsilon$.

Corollaire

Si la série $\sum_j x_j$ converge, le terme général associé $(x_j)_j$ converge vers 0.

Définition

Une série $\sum_j x_j$ est absolument convergente lorsque la série des modules $\sum_j |x_j|$ converge.

Théorème

Toute série $\sum_j x_j$ absolument convergente converge.
De plus, on a l'égalité $|\sum_j x_j| \leq \sum_j |x_j|$.

Définition

Une série est semi-convergente si elle converge sans être absolument convergente.

Exemples : La série $\sum_j (-1)^j/j^2$ est absolument convergente ;
la série $\sum_j (-1)^j/j$ est semi-convergente.

Rappel : une permutation sur l'ensemble E est une bijection de E sur E.

Théorème

Si $\sum_j x_j$ est une série absolument convergente et π est une permutation sur $\mathbb{N}^*$, alors la série $\sum_j x_{\pi(j)}$ converge vers la même limite.

Théorème (réarrangement de Riemann)

Soit $\sum_j x_j$ une série réelle semi- convergente ; si $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, il existe une permutation π sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\pi(j)} = \gamma$.

II. Séries fondamentales

Définition

La série géométrique de raison z est la série $\sum_{j=0}^{\infty} z^j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} z^j$.

Lemme

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors $$\sum_{j=0}^{k} z^j = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}.$$

Théorème

La série géométrique de raison $z \in \mathbb{C}$ converge ssi $|z| < 1$.
Auquel cas, la somme vaut $\frac{1}{1-z}$.

• Paradoxe d'Achille et la tortue.

- vitesse d'Achille : v m/s,
- vitesse de la tortue : v/r m/s $(r > 1)$,
- avance accordée par Achille : d m.

Achille met d/v s pour atteindre la position initiale de la tortue.

Pendant ce temps, la tortue a parcouru $\frac{v}{r}\frac{d}{v} = \frac{d}{r}$ m.

Achille parcourt cette distance en $\frac{d}{r}\frac{1}{v}$ s.

Lorsqu'Achille arrive à cette position, la tortue a parcouru $\frac{d}{rv}\frac{v}{r} = \frac{d}{r^2}$ s.

Achille a atteint la n-ième étape en $\sum_{j=0}^{n} \frac{d}{vr^j}$ s.

Temps que mettra Achille pour rattraper son retard sur la tortue :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{vr^j} = \frac{d}{v}\frac{1}{1 - 1/r} = \frac{dr}{v(r-1)}.$$

• Représentation en base 10

Le nombre $a_0, a_1 a_2 \cdots a_j \cdots$ représente la somme de la série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{10^j}$.

On a $\displaystyle 0 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{9}{10^j}$, donc la série converge.

On peut expliquer pourquoi $1 = 0,999 \cdots$.

De fait, on a $\displaystyle 0.111 \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^j} = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$,

donc $\displaystyle 0.999 \cdots = 9 \, \frac{1}{9} = 1$.

De même, $1/3 = 0.333 \cdots$.

Exercice : trouver une formule pour $\sum_{j=k}^{l} z^j$ et $\sum_{j=k}^{\infty} z^j$.

Définition

La série de Riemann d'ordre $\alpha \geq 0$ est la série $\sum_j j^{-\alpha}$.

Proposition (principe de condensation de Cauchy)

Si la suite réelles $(x_j)_j$ à termes positifs est décroissante, la série $\sum_j x_j$ converge ssi la série $\sum_j 2^j x_{2^j}$ converge.

Théorème

La série de Riemann d'ordre $\alpha \geq 0$ converge pour $\alpha \in]1, +\infty[$ et diverge pour $\alpha \in [0, 1]$.

III. Théorèmes d'Abel

Lemme

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, n nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$ et n éléments de $\mathbb{K}$ $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$|\sum_{j=1}^{n} x_j x_j| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |c_j - c_{j-1}| \sup_{1 \leq k \leq n-1} |\sum_{j=1}^{k} x_j| + |c_n| \, |\sum_{j=1}^{n} x_j|.$$

Théorème

- Si la suite $(c_j)_j$ de $\mathbb{C}$ converge vers 0 et est tq la série $\sum_j |c_j - c_{j+1}|$ converge,
- s'il existe $C > 0$ tq la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{K}$ vérifie $|\sum_{j=p}^{q} x_j| \leq C$ quels que soient p, q tq $p \leq q$,

alors la série $\sum_j c_j x_j$ converge et, pour tout $J \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration du reste suivante :

$$|\sum_{j=J}^{\infty} c_j x_j| \leq C \sum_{j=J}^{\infty} |c_j - c_{j+1}|.$$

La condition sur $(c_j)_j$ est vérifiée si la suite est réelle, décroissante et converge vers 0.

Théorème

- Si la suite $(c_j)_j$ de $\mathbb{C}$ est tq la série $\sum_j |c_j - c_{j+1}|$ converge,
- si la série $\sum_j x_j$ de $\mathbb{K}$ converge,

alors la série $\sum_j c_j x_j$ converge et, pour tout $J \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration du reste suivante :

$$|\sum_{j=J}^{\infty} c_j x_j| \leq (|c_J| + 2\sum_{j=J}^{\infty} |c_j - c_{j+1}|) \sup_{k \geq J} |\sum_{j=J}^{k} x_j|.$$

La condition sur $(c_j)_j$ est vérifiée si la suite est réelle, décroissante et converge vers 0.

IV. Étude de la convergence de séries

Définition

Une série alternée est une série réelle qui peut s''ecrire sous la forme $\sum_j (-1)^j r_j$, avec $r_j \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Proposition (Leibniz)

Si $(r_j)_j$ est une suite réelle décroissante vers 0, la série alternée $\sum_j (-1)^j r_j$ converge
et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration du reste

$$|\sum_{j=J}^{\infty} (-1)^j r_j| \leq r_J.$$

Exemple : La série $\sum_j (-1)^j / j$ converge.

Théorème (critère théorique)

Soit $\sum_j x_j$ et $\sum_j y_j$ deux séries réelles à termes positifs ou nuls ;

- si la série $\sum_j y_j$ converge et s'il existe $J \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $x_j \leq C y_j$ pour tout $j \geq J$, alors la série $\sum_j x_j$ converge,
- si la série $\sum_j y_j$ diverge et s'il existe $J \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $x_j \geq C y_j$ pour tout $j \geq J$, alors la série $\sum_j x_j$ diverge.

Théorème (critère de comparaison)

Soit $\sum_j x_j$ et $\sum_j y_j$ deux séries réelles à termes strictement positifs ; si $\lim_j x_j/y_j$ existe, est fini et non nul, alors soit les deux séries convergent, soit les deux séries divergent.

Corollaire

Soit $\sum_j x_j$ et $\sum_j y_j$ deux séries réelles à termes strictement positifs ; si $\exists J$ tel que $j \geq J$ implique $x_{j+1}/x_j \leq y_{j+1}/y_j$ et si la série $\sum_j y_j$ converge, alors la série $\sum_j x_j$ converge.

La série $\sum_j y_j$ dans les résultats précédents est appelée série de comparaison.

Théorème (critère de la racine, Cauchy)

Soit $\sum_j x_j$ une série réelle à termes positifs ou nuls ;

- si $\exists J \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,1[$ tq $\sqrt[j]{x_j} \leq \theta$ $\forall j \geq J$, alors $\sum_j x_j$ converge. Cela arrive notamment si $\sqrt[j]{x_j} \to \theta'$, avec $\theta' < 1$,
- si $\exists J \in \mathbb{N}^*$ tq $\sqrt[j]{x_j} \geq 1$ pour tout $j \geq J$, alors la série $\sum_j x_j$ diverge. Cela arrive notamment si $\sqrt[j]{x_j} \to 1^+$ ou si $\sqrt[j]{x_j} \to \Theta$ avec $\Theta > 1$.

Théorème (critère du quotient, d'Alembert)

Soit $\sum_j x_j$ une série réelle à termes strictement positifs ;

- si $\exists J \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,1[$ tq $x_{j+1}/x_j \leq \theta$ pour tout $j \geq J$, alors la série $\sum_j x_j$ converge.
  Cela arrive notamment si $x_{j+1}/x_j \to \theta'$, avec $\theta' < 1$,
- si $\exists J \in \mathbb{N}^*$ tq $x_{j+1}/x_j \geq 1$ pour tout $j \geq J$, alors $\sum_j x_j$ diverge. C'est le cas si $x_{j+1}/x_j \to 1^+$ ou si $x_{j+1}/x_j \to \Theta$ avec $\Theta > 1$.

Le critère de la racine est toujours applicable lorsque le critère du quotient est applicable.

Théorème (critère de Riemann)

Soit $\sum_j x_j$ une série réelle à termes positifs ou nuls ;

- si $\exists J \in \mathbb{N}^*$, $C > 0$ et $\alpha > 1$ tq $j^\alpha x_j \leq C$ $\forall j \geq J$, alors la série $\sum_j x_j$ converge.
  Cela arrive notamment si $j^\alpha x_j \to C$, avec $\alpha > 1$ et C positif,
- si $\exists J \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tq $jx_j \geq C$ $\forall j \geq J$, alors la série $\sum_j x_j$ diverge.
  Cela arrive notamment si $jx_j \to C$, avec $C > 1$ ou si $jx_j \to +\infty$.

Exercices

- la série $\sum_j j^{-j}$ converge,
- la série $\displaystyle\sum_j \frac{1}{a + jb}$ $(a, b > 0)$ diverge.

Fonctions

I. Généralités

II. Limite des valeurs d'une fonction

III. Fonctions continues

IV. Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$

I. Généralités

- Une fonction définie sur $A \subset \mathbb{K}$ est une application de A dans $\mathbb{C}$,
- A est l'ensemble (domaine) de d'efinition, noté $\mathrm{dom}(f)$,
- $x \in A$ est la variable ou l'argument, $f(x)$ est la valeur de f en x,
- si $B \subset A$, $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$ est l'image de B par f,
- l'image de f est $\mathrm{im}(f) = f(A)$,
- si $A \not\subset \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{C})$, on écrit $f(z) = f(\Re z, \Im z) = f(x, y)$.

Ne pas confondre la fonction f et la valeur $f(x)$.
$f(x)$ n'est pas une fonction, $x \mapsto f(x)$ est une fonction.

Exemples :

- $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto |x|$,
- $\cdot^{\pm} : \mathbb{R} \to [0, +\infty[\quad x \mapsto x^{\pm}$,
- $\Re\cdot : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \Re x$,
- $\Im\cdot : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \Im x$.

Définition

Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{C}$; le graphe de f est l'ensemble

$$\Gamma(f) = \{(\Re x, \Im x, \Re f(x), \Im f(x)) : x \in A\};$$

Si $A \subset \mathbb{R}$, $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$.

Ne pas confondre le graphe de f (qui est un ensemble) et le graphique de f (qui est une représentation géométrique).

Si f et g sont deux fonctions de même domaine de définition, on définit naturellement $f = g$, cf ($c \in \mathbb{C}$), $f \pm g$, fg et f/g (dans ce cas g ne doit pas s'annuler sur son domaine).

Remarque : la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto 2x^2$ est composée de deux fonctions : $f = g \circ h$, avec $g(x) = 2x$ et $h(x) = x^2$.

À une fonction $f : A \to \mathbb{C}$, on associe

- la partie réelle de f, $\Re \circ f$, notée $\Re f$,
- la partie imaginaire de f, $\Im \circ f$, notée $\Im f$,
- le module de f, $|\cdot| \circ f$, noté $|f|$,
- le conjugué de f, $\bar{\cdot} \circ f$, notée $\bar{f}$.

Les fonctions $\Re f$, $\Im f$ et $|f|$ sont réelles.
On a la décomposition canonique suivante : $f = \Re f + i \Im f$.

À une fonction réelle $f : A \to \mathbb{R}$, on associe

- la partie positive de f, $\cdot^+ \circ f$, notée f^+,
- la partie négative de f, $\cdot^- \circ f$, notée f^-.

Si f est une fonction réelle, on a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.
Si f est une fonction complexe, on a
$f = (\Re f)^+ - (\Re f)^- + i(\Im f)^+ - i(\Im f)^-$.

Si $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions réelles ($n \in \mathbb{N}^*$) définies sur $A \subset \mathbb{C}$, leur enveloppe supérieure est la fonction

$$\sup\{f_1, \dots, f_n\} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sup\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Leur enveloppe inférieure est la fonction

$$\inf\{f_1, \dots, f_n\} : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \inf\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n fonctions réelles $f_1, \dots, f_n$ définies sur une même partie A de $\mathbb{C}$.
Leurs enveloppes supérieure et inférieure peuvent être obtenues au moyen d'un nombre fini de combinaisons linéaires et de recours aux parties positives, aux parties négatives ou aux modules de fonctions.

Exemple : $\sup\{f_1, f_2\} = f_1 + (f_2 - f_1)^+ = \dfrac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2}$.

Définition

Une fonction f $\left\{\begin{array}{l} \\ \text{réelle} \\ \text{réelle} \end{array}\right.$ définie sur A est $\left\{\begin{array}{l} \text{bornée} \\ \text{majorée} \\ \text{minorée} \end{array}\right.$ sur $B \subset A$ si

$f(B)$ est un ensemble $\left\{\begin{array}{l} \text{borné} \\ \text{majoré} \\ \text{minoré} \end{array}\right.$.

Elle est bornée (resp. majorée, minorée) si elle l'est sur A.

Si f est majoré sur B, la borne supérieure de $f(B)$ est notée $\sup f(B)$ ou $\sup_B f(x)$.
Idem $\inf f(B)$, $\inf_B f(x)$.

Exercice : $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1/x$ n'est pas majoré, est minoré et $\inf_{x \in]0,+\infty[} f(x) = 0$, alors que $f(x) > 0 \ \forall x \in]0,+\infty[$.

Exercice : Si f et g sont deux fonctions réelles et bornée sur une partie A, établir que $f - g$ est borné sur A et que

$$|\sup_A f(x) - \sup_A g(x)| \leq \sup_A |f(x) - g(x)|.$$

Définition

Un zéro d'une fonction f définie sur A est un point $x \in A$ tel que $f(x) = 0$.
L'ensemble d'annulation de f est l'ensemble des zéros de f.

Définition

Si Z_f désigne l'ensemble d'annulation de f, un zéro x de f est un zéro identique s'il existe un intervalle ouvert contenant x inclus dans Z_f.
L'ensemble des zéros identiques est noté Z_f°.
Un zéro non-identique est un zéro accidentel.
Le support de f, noté $[f]$ ou $\operatorname{supp}(f)$ est l'ensemble $[f] = \mathbb{K} \setminus Z_f^\circ$.

Proposition

Le support d'une fonction est un ensemble fermé.

Proposition

Étant donné n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur $\mathbb{C}$ et n nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on a $[\sum_{j=1}^n c_j f_j] \subset \cup_{j=1}^n c_j[f_j]$ et $[\prod_{j=1}^n f_j] \subset \cap_{j=1}^n [f_j]$.

Définition

La fonction caractéristique d'un ensemble A est la fonction

$$\chi_A : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La fonction 0 est la fonction $\chi_\emptyset$, la fonction 1 est la fonction $\chi_\mathbb{K}$

Exercices : on a

- $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$,
- $B \subset A$ ssi $\chi_B \leq \chi_A$
  et $A = B$ ssi $\chi_A = \chi_B$,
- $\chi_{\cap_{j=1}^n A_j} = \prod_{j=1}^n \chi_{A_j} = \inf\{\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_n}\}$
  et $\chi_{\cup_{j=1}^n A_j} = \sup\{\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_n}\}$,
- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.

II. Limite des valeurs d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{K}$, x_0 un point de $\bar{A}$ et ℓ un nombre complexe. On dit que ℓ est la limite de f pour x tendant vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array} \right. \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou « $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0$ ».

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{K}$, x_0 un point de $\bar{A}$ et ℓ un nombre complexe. On dit que f tend vers l'infini lorsque x converge vers x_0 si

$$\forall N > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array} \right. \Rightarrow |f(x)| \geq N.$$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide et non-bornée A de $\mathbb{K}$ et ℓ un nombre complexe. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers l'infini si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x| \geq M \end{array} \right. \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On écrit $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie non vide et non-bornée A de $\mathbb{K}$. On dit que f tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini si

$$\forall N > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x| \geq M \end{array} \right. \Rightarrow |f(x)| \geq N.$$

On écrit $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Notation : dans tous les cas, on écrit $\lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma \quad (\xi, \gamma \in \mathbb{K} \cup \{\infty\})$.

Si f est réel, on peut être plus précis :

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
  $\Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq N,$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
  $\Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq -N,$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$
  $\Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x| \geq M \Rightarrow f(x) \geq N,$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
  $\Leftrightarrow \forall N > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x| \geq M \Rightarrow f(x) \leq -N,$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$
  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq f(x) - l < \epsilon,$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$
  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq l - f(x) < \epsilon,$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell^+$
  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x| \geq M \Rightarrow 0 \leq f(x) - l < \epsilon,$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell^-$
  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tq } \forall x \in A,\ |x| \geq M \Rightarrow 0 \leq l - f(x) < \epsilon,$

Définition

Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{K}$ et $B \subset \mathbb{K}$ tq $A \cap B \neq \emptyset$,
soit $\xi \in \bar{A} \cap \bar{B}$ ou $\xi = \infty$ si $A \cap B$ n'est pas borné,
soit enfin $\gamma \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
si f est réel, on peut avoir $\gamma \in \{\ell^+, \ell^-, +\infty, -\infty\}$ ($\ell \in \mathbb{R}$).
On dit que f tend vers γ lorsque x tend vers ξ dans B si la restriction de f à $A \cap B$ tend vers γ lorsque x tend vers ξ.

On écrit $\lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x \in B}} f(x) = \gamma$ pour signifier que l'on a $\lim\limits_{x \to \xi} f|_{A \cap B}(x) = \gamma$.

Si f est défini sur une partie de $\mathbb{R}$, on pose $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in]0, +\infty[}} f(x)$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in]-\infty, 0[}} f(x)$.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$ tq $x \in \mathrm{dom}(f)$, $x \geq M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Si f est défini sur une partie de $\mathbb{R}$, on pose $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in]x_0, +\infty[}} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in]-\infty, x_0[}} f(x)$.

On parle de convergence par la droite et par la gauche respectivement.

Exemple : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tq $x \in \mathrm{dom}(f),\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Exercice : Établir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\Re z)^3 + (\Im z)^3}{|z|^2} = 0.$$

Théorème

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{K}$ non vide et $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ (si cela a un sens), soit $\gamma \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
f tend vers γ lorsque x tend vers ξ ssi pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers ξ, la suite $(f(x_j))_j$ tend vers γ.

Exemple : $z \mapsto \dfrac{\Re z \Im z}{z^2}$ n'admet pas de limite à l'origine.

Proposition

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{K}$ non vide et n ensembles $A_1, \ldots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ formant une partition de A,
soit $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ (si cela a un sens) et γ comme d'habitude.
Si $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ tq $\xi \in \bar{A}_j$ si $\xi \in \mathbb{C}$ ou tq A_j n'est pas borné si $\xi = \infty$, $f|_{A_j}$ tend vers γ lorsque x tend vers ξ, alors f tend vers γ lorsque x tend vers ξ.

Corollaire

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\bar{A}$ n'appartenant pas à A.
Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \gamma$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \gamma$.

Corollaire

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point de A.
Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Théorème (Cauchy)

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{K}$ non vide et $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$. Les ASE

- $\lim_{x \to \xi} f(x)$ existe et est fini,
- $\forall$ suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ de A qui convergent vers ξ, $|f(x_j) - f(y_j)| \to 0$,
- pour tout $\epsilon > 0$, $\exists$ intervalle ouvert I contenant ξ tq $\sup_{x,y \in A \cap I} |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définies sur une partie non vide $A \subset \mathbb{K}$ et n nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$.
Soit $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f_j(x) = \gamma_j$, avec $\gamma_j \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On a

- si $\gamma_j \in \mathbb{C}$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\lim_{x \to \xi} \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \gamma_j$,
- si $\gamma_j \in \mathbb{C}$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_0\}$ et $\gamma_{j_0} = \infty$, $\lim_{x \to \xi} \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) = \infty$,
- si $\gamma_j \in \mathbb{C}$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\lim_{x \to \xi} \prod_{j=1}^{n} f_j(x) = \prod_{j=1}^{n} \gamma_j$,
- si $\gamma_j \neq 0$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\gamma_{j_0} = \infty$, on a $\lim_{x \to \xi} \prod_{j=1}^{n} f_j(x) = \infty$,
- si $\gamma_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma_2 \neq 0$ et si $f_2(x) \neq 0$ $\forall x \in A$, alors $\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ si $\gamma_2 \in \mathbb{C}$ et $\lim_{x \to \xi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ si $\gamma = \infty$.

Théorème

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{K}$ et g défini sur $B \subset \mathbb{C}$ tq $f(A) \subset B$.
Soit $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ et supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma$ et $\lim_{x \to \gamma} g(x) = \gamma'$.

On a $\lim_{x \to \xi} g \circ f(x) = \gamma'$.

Proposition

Soit f défini sur $A \subset \mathbb{K}$, $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$ et supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma$.

Si $\gamma \in \mathbb{C}$, on a

(a) $\lim_{x \to \xi} \bar{f}(x) = \bar{\gamma}$ (c) $\lim_{x \to \xi} \Re f(x) = \Re \gamma$

(b) $\lim_{x \to \xi} |f|(x) = |\gamma|$ (d) $\lim_{x \to \xi} \Im f(x) = \Im \gamma$,

si $\gamma = \infty$, on a

(a) $\lim_{x \to \xi} \bar{f}(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to \xi} |f|(x) = +\infty$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions réelles définies sur une partie non vide $A \subset \mathbb{K}$ et $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, supposons avoir $\lim_{x \to \xi} f_j(x) = \gamma_j$. On a, si γ_j^+ et γ^- désignent les parties positive et négative de γ_j,

- $\lim_{x \to \xi} f_1^+(x) = \gamma_1^+$,
- $\lim_{x \to \xi} f_1^-(x) = \gamma_1^-$,
- $\lim_{x \to \xi} \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} = \sup\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$,
- $\lim_{x \to \xi} \inf\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} = \inf\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$,

III. Fonctions continues

Définition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{K}$ est continue en $x_0 \in A$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est fini.
Un tel point x_0 est un point de continuité de f.
Si f n'est pas continu en $x_0 \in A$, f est discontinu en x_0 et x_0 est un point de discontinuité de f.

Si f est continu en x_0, on a nécessairement

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Proposition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{K}$ est continue en x_0 ssi $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $x \in A$ et $|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$.

Proposition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{K}$ est continue en x_0 ssi pour toute suite $(x_j)_j$ de A qui converge vers x_0, on a $f(x_j) \to f(x_0)$.

Définition

Une fonction f est continue sur A si elle est définie sur A et continue en tout point de A.

L'ensemble des fonctions continues sur A est noté $C^0(A)$.

Définition

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{K}$ est uniformément continue sur A si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $x, y \in A$ et $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Proposition

Si f est uniformément continu sur A alors f est continu sur A.

Remarque : $]0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1/x$ est continu sur $]0,+\infty[$ mais pas uniformément continu.

Exemples de fonctions (uniformément) continues :

- $\chi_\emptyset$, $\chi_\mathbb{K}$,
- $\Re$, $\Im$, $|\cdot|$,
- $x \mapsto \sqrt{x}$,

La fonction $x \mapsto x^2$ $(n \in \mathbb{N})$ est continue mais pas uniformément continue.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{K}$,

Théorème

- Toute cl de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A,
- tout produit fini de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A,
- le quotient de deux fonctions continues sur A est une fonction continue sur A, pour autant que le dénominateur ne s'annule en aucun point de A.

Théorème

Si f est une fonction continue sur A et g est une fonction continue sur une partie contenant $f(A)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur A.

Proposition

Si f est une fonction continue sur A, alors les fonctions $\bar{f}$, $\Re f$, $\Im f$ et $|f|$ sont continues sur A. Si en outre f est réel, f^+ et f^- sont continus sur A.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ réelles et continues sur une partie non vide A de $\mathbb{K}$. Les fonctions $\sup\{f_1, \ldots, f_n\}$ et $\inf\{f_1, \ldots, f_n\}$ sont continues sur A.

Proposition

Si f est une fonction continue sur une partie non vide A de $\mathbb{K}$ et si B est une partie non vide de A, alors la restriction $f|_B$ de f à B est une fonction continue sur A.

Soit K un compact non vide de $\mathbb{K}$ et f une fonction continue sur K.

Lemme

De toute suite de $f(K)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de $f(K)$.

Théorème (image continue d'un compact)

L'image $f(K)$ est compacte.

Théorème (bornes atteintes)

S'il existe une suite $(x_j)_j$ de K telle que la suite $(f(x_j))_j$ converge vers un élément z_0 de $\mathbb{C}$, alors il existe $\ell \in K$ tq $f(\ell) = z_0$.
Si en outre la fonction f est réelle, alors il existe deux points x_m et x_s de K tq $f(x_m) = \inf f(K)$ et $f(x_s) = \sup f(K)$.

Théorème (Heine)

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

IV. Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition

Une fonction f définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est continue à gauche en $x_0 \in A$ si $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$.

Elle est continue à droite en $x_0 \in A$ si $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$.

Proposition

Une fonction f définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in A$ ssi elle est continue à gauche et à droite en x_0 (si cela a un sens).

Exemples

- La fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 \chi_{[0,3[} + x^3 \chi_{[3,+\infty[}$ est continue sur $[0, +\infty[\setminus \{3\}$, continue à droite en 3, mais pas continue à gauche en 3,
- la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad (x \mapsto x^2 + 18)\chi_{[0,3[} + x^3 \chi_{[3,+\infty[}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Définition

Une fonction réelle f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est $\begin{array}{c}\text{croissante}\\ \text{décroissante}\end{array}$ sur A si $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \begin{array}{c}\leq\\ \geq\end{array} f(x_2)$.

Une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur A est dite monotone sur A.

Définition

Une fonction réelle f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est $\begin{array}{c}\text{strictement croissante}\\ \text{strictement décroissante}\end{array}$ sur A si $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \begin{array}{c}<\\ >\end{array} f(x_2).$$

Une fonction qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur A est dite strictement monotone sur A.

Si f est une fonction strictement monotone sur $A \subset \mathbb{R}$, et si $x_1, x_2 \in A$ sont tels que $f(x_1) = f(x_2)$, on a nécessairement $x_1 = x_2$.

Proposition

Si f est une fonction réelle, continue sur une partie $\bar{A}$ de $\mathbb{R}$ et monotone sur A, alors f est aussi monotone sur $\bar{A}$.

Proposition

Soit f une fonction réelle, définie et monotone sur une partie A de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de A ; si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

alors f est continu en x_0.

Théorème (TVI)

Soit f une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$. Supposons que

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \gamma_1, \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = \gamma_2,$$

avec $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.
Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, pour tout y_0 compris strictement entre γ_1 et γ_2, il existe $x_0 \in]\alpha, \beta[$ tq $f(x_0) = y_0$.

Le point x_0 du théorème précédent n'est pas nécessairement unique.

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle : si f est une fonction réelle et continue sur l'intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire

Toute fonction réelle, continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est strictement monotone sur I.

Notation : $f(\xi^{\pm}) = \lim_{x \to \xi^{\pm}} f(x)$.

Théorème (limite monotone)

Si f est une fonction réelle et croissante sur $]\alpha, \beta[$, alors les limites $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent pour tout $x_0 \in]\alpha, \beta[$ et sont finies.
Si elles sont égales, alors f est continu en x_0.
De plus, les limites $f(\alpha^+)$ et $f(\beta^-)$ existent et sont soit finies, soit égales à l'infini.
Enfin, on a $f(\alpha^+) \leq f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \leq f(\beta^-)$, pour tout $x_0 \in]\alpha, \beta[$ et même $f(\alpha^+) < f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) < f(\beta^-)$ si f est strictement croissant.

Il existe bien entendu un énoncé analogue avec les signes d'inégalité inverses pour les fonctions décroissantes.

Définition

Une fonction réglée sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ est une fonction définie sur cet intervalle qui admet une limite à gauche et à droite en tout point de $]\alpha, \beta[$.

Une fonction monotone est réglée.

La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'admet pas de limite à gauche ou à droite en zéro.

Théorème (Froda)

L'ensembles des points de discontinuité d'une fonction réelle et monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est dénombrable.

Définition

Une fonction réelle sur $A \subset \mathbb{R}$ est convexe (resp. concave) sur l'intervalle $I \subset A$ si, pour tous $x_1, x_2 \in I$ et tout $\theta \in]0,1[$, on a

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right. \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2).$$

Les points de la forme $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ ($\theta \in [0,1]$) décrivent le segment d'extrémités x_1 et x_2.
Le point d'abscisse $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ de la droite déterminée par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ a pour ordonnée $\theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2)$.

$\Rightarrow$ Une fonction f est convexe sur $[x_1, x_2]$ si $(x, f(x))$ se situe en-dessous de $(x, \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) + f(x_2))$ $\forall x \in [x_1, x_2]$.

f est concave sur I ssi $-f$ est convexe sur I
$\Rightarrow$ l'étude des fonctions convexes suffit.

Proposition (inégalité de Jensen)

Si f est une fonction réelle et convexe sur $I \subset \mathbb{R}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et tous $r_1, \ldots, r_n > 0$ tels que $\sum_{j=1}^n r_j = 1$, on a $\sum_{j=1}^n r_j x_j \in I$ et

$$f(\sum_{j=1}^n r_j x_j) \leq \sum_{j=1}^n r_j f(x_j).$$

Rappel : $\ln(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_2}) = \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(x_j)$.

Puisque ln est concave, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_j) \leq \ln(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_j)$,

ce qui implique $\ln(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_2}) \leq \ln(\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_j)$.

Puisque ln est bijectif et croissant sur son domaine, on obtient $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_2} \leq \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j$.

Proposition (lemme des 3 cordes, inégalité des pentes)

Si f est une fonction réelle et définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, les CSE,

- f est convexe sur I,
- pour tous $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

- pour tout $x_0 \in I$, la fonction

$$I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  est croissante.

Théorème

Toute fonction réelle et convexe sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est continue sur cet intervalle.

Ce résultat n'est plus vrai si l'intervalle n'est pas ouvert !

Considérer $[0,1[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{array} \right. .$

Fonctions dérivables

I. Dérivabilité

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble ouvert $A \subset \mathbb{K}$ et x_0 un point de A ; la fonction f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (*)$$

existe et est finie, auquel cas cette limite est appelée la dérivée de f en x_0. La fonction est dérivable sur A si elle est dérivable en tout point de A.

Notation : $[Df]_{x_0}$ ou $Df(x_0)$ (Euler).

Il existe d'autres notations, comme $f'(x_0)$ ou $\frac{d}{dx} f(x_0)$. Attention aux ambiguïtés !

(*) peut se réécrire $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

On peut généraliser cette définition.
(via la notion de point d'accumulation.)

Proposition

Toute fonction dérivable en un point de $\mathbb{C}$ est continue en ce point.

L'inverse n'est pas vrai !
Ce résultat ne se généralise pas toujours !

Si f est dérivable en x, alors $R(h) = f(x+h) - f(x) - h[Df]_x$ tend vers 0 si $h \to 0$, mais $R(h)/h$ également.

Définition

Une fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ admet une dérivée à droite (resp. à gauche) en $x_0 \in A$ s'il existe $\epsilon > 0$ pour lequel on a $[x_0, x_0 + \epsilon[\subset A$ (resp. $]x_0 - \epsilon, x_0] \subset A$) et si la limite

$$\lim_{\left\{\begin{array}{l} h \to 0^+ \\ h \to 0^- \end{array}\right.} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe et est finie.

Notation : $[Df]_{x_0^+}$ (resp. $[Df]_{x_0^-}$).

Définition

Si f est dérivable sur une intervalle I, $Df : I \to \mathbb{C} \quad x \mapsto [Df]_x$ est une fonction définie sur I, appelée la dérivée de f sur I.

Interprétaion : $[Df]_x$ est le coefficient angulaire de la tangente de f en x.

Exemples :

- La fonction constante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle en tout point,
- $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est de dérivée égale à 1 en tous points,
- $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est de dérivée égale à $2x$ en x,
- $|\cdot|$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et de dérivée égale à sign,
- $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de dérivée égale à $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en x,
- $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de dérivée égale à $\dfrac{-1}{x^2}$ en x.

Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point !

$\mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad z \mapsto \Re z$ n'est dérivable en aucun point.
$\mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point.

Si f est défini sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, l'existence de la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ semble plus contraignante, puisque h est ici un nombre complexe.

Posons

$$D_x f(x+iy) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f\big((x+h)+iy\big) - f(x+iy)}{h}$$

et

$$D_y f(x+iy) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f\big(x+i(y+h)\big) - f(x+iy)}{h}.$$

Si f admet une dérivée complexe en $x+iy$, on a $D_x f(x+iy) = Df(x+iy)$ et $D_y f(x+iy) = iDf(x+iy)$.

En particulier, $1/2(D_x - iD_y)f = Df$ et $1/2(D_x + iD_y)f = 0$.

Théorème

Toute cl de fonctions dérivables sur A est dérivable sur A :
pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables sur A et si $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, alors
$D(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j D f_j$.

Théorème

Si f et g sont dérivables sur A, alors fg est dérivable sur A et
$D(fg) = gDf + fDg$.

Exemple : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{K}$ et de dérivée nx^{n-1} en x.

Théorème

Si f et g sont dérivable sur A et si g ne s'annule en aucun point de A, alors f/g est dérivable sur A et $D(f/g) = \dfrac{gDf - fDg}{g^2}$.

Théorème

Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}$ est dérivable sur A ssi $\bar{f}$ est dérivable sur A, ce qui a lieu ssi $\Re f$ et $\Im f$ sont dérivables sur A.
On a alors $D\bar{f} = \overline{Df}$, $D\Re f = \Re Df$ et $D\Im f = \Im Df$.

Ce dernier résultat n'est plus valide si $A \not\subset \mathbb{R}$!
(cf. $z \mapsto \bar{z}$)

Si f est dérivable, on n'a pas nécessairement $|f|$ dérivable !

Théorème

Si f est dérivable sur A et si $U \subset A$ est ouvert, alors $f|_U$ est dérivable sur U et $D(f|_U)$ est la restriction de Df à U.

Théorème

Si f est dérivable sur A et si g est dérivable sur B, avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est dérivable sur A et $D[g \circ f]_x = [Dg]_{f(x)}[Df]_x$.

Exercice : Si $f \in C^0([-1,1])$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée donnée par

$$[Df]_x = (1-x^2)^{-1/2},$$

où la fonction

$$g : x \mapsto f(\frac{2x}{1+x^2})$$

est-elle définie ? Continue ? Dérivable ? Que vaut sa dérivée ?

II. TAF et conséquences

Lemme

Si f est une fonction réelle et dérivable sur un intervalle $]\alpha, \beta[$, borné ou non de $\mathbb{R}$ et si x_0 est un point de $]\alpha, \beta[$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, alors on a $[Df]_{x_0} = 0$.

Lemme (Rolle)

Si f est une fonction réelle et continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), dérivable sur $]a, b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $[Df]_{x_0} = 0$.

Exemple : la dérivée de la fonction $[-1, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ admet un zéro.

Exemple : La dérivée de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto e^{i2\pi x}$ ne s'annule en aucun point.

Exercice : Si f est une réelle et dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et si Df ne s'annule en aucun point de cet intervalle, alors pout tout y_0, l'équation $f(x) = y_0$ n'admet au plus qu'une solution sur cet intervalle.

Théorème (TAF)

Si f est une fonction réelle et continue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tq

$$f(b) = f(a) + (b - a)[Df]_{x_0}.$$

Corollaire (TAF)

Si f est une fonction réelle et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in I$ et tout accroissement $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tq $x + h \in I$, il existe un accroissement auxiliaire h' strictement compris entre 0 et h tq

$$f(x + h) = f(x) + h[Df]_{x+h'}.$$

Théorème (ouvert connexe)

Deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ sont égales à une constante additive près ssi leurs dérivées sont égales :

Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et si f, g sont deux fonctions dérivables sur I, alors $f = g + c$ sur I pour une constante $c \in \mathbb{C}$ ssi on a $Df = Dg$ sur I.

III. Espaces C^p

Définition

Une fonction f est continûment dérivable sur une partie A de $\mathbb{K}$ si elle est définie sur A, dérivable sur A et si sa dérivée est continue sur A.

Notation : L'ensemble des fonctions continûment dérivables sur A est noté $C^1(A)$.

On pose $D^0 f = f$.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{K}$; on définit $D^p f$, avec $p \in \mathbb{N}$, par récurrence :
Si $D^p f$ est une fonction définie et dérivable sur A, on pose

$$D^{p+1} f = D(D^p f).$$

On appelle $D^p f$ la dérivée d'ordre p de f.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \subset \mathbb{K}$; une fonction f est p fois continûment dérivable sur A si elle est définie sur A, toutes ses dérivées d'ordre $q \leq p$ existent sur A et si $D^p f$ est continu sur A.

Notation : $f \in C^p(A)$.

Définition

Une fonction f est infiniment continûment dérivable sur A si $f \in C^p(A)$ quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Notation : $f \in C^\infty(A)$.

Si $f \in C^\alpha(A)$ $(\alpha \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$, on dit que f est de classe C^α sur A.

Proposition

Si $f \in C^p(A)$, alors $D^q f$ est continu sur A pour tout $q \leq p$.

On a

$$C^\infty(A) \subset \cdots \subset C^{p+1}(A) \subset C^p(A) \subset C^{p-1}(A) \subset \cdots \subset C^1(A) \subset C^0(A)$$

et $C^\infty(A) = \cap_{p \in \mathbb{N}} C^p(A)$.

f dérivable sur A n'implique pas $f \in C^1(A)$.

Ex : $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Théorème

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $A \subset \mathbb{K}$,

- toute cl d'éléments de $C^p(A)$ appartient à $C^p(A)$,
- tout produit fini d'éléments de $C^p(A)$ appartient à $C^p(A)$,
- le quitient de deux fonctions de $C^p(A)$ appartient à $C^p(A)$, pour autant que le dénominateur ne s'annule en aucun point de A,
- si $f \in C^p(A)$ et $g \in C^p(B)$, avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f \in C^p(A)$,
- si $f \in C^p(A)$, alors, pour $B \subset A$, $f|_B \in C^p(B)$.

Proposition

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ et $f_1, \ldots, f_n \in C^p(A)$, alors pour tout $q \leq p$, on a $D^q(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j D^q f_j$.

Proposition (formule de Leibniz)

Si $A \subset \mathbb{K}$ et si $f, g \in C^p(A)$, on a $D^p(fg) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} D^j f\, D^{p-j} g$.

Proposition

Si $A \subset \mathbb{R}$ et $f \in C^p(A)$, alors, pour tout $q \leq p$,
on a $D^q \overline{f} = \overline{D^q f}$, $D^q(\Re f) = \Re D^q f$ et $D^q(\Im f) = \Im D^q f$.

Le résultat précédent n'est plus vrai si $A \not\subset \mathbb{R}$.

Théorème (formule de Taylor-Lagrange)

Si f est une fonction réelle appartenant à $C^{p-1}([a,b]) \cap C^p(]a,b[)$ $(a, b \in \mathbb{R})$, alors il existe $x \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(b-a)^j}{j!} [D^j f]_a + \frac{(b-a)^p}{p!} [D^p f]_x.$$

Corollaire

Si $f \in C^p(]\alpha,\beta[)$ est une fonction réelle, alors pour tout $x \in]\alpha,\beta[$ et tout accroissement $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $x + h \in]\alpha,\beta[$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^j}{j!} [D^j f]_x + \frac{h^p}{p!} [D^p f]_{x+\theta h}.$$

IV. Application à l'étude de fonctions réelles

Théorème

Si f est une fonction réelle et dérivable sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$, alors f est croissant (resp. décroissant) sur $]\alpha, \beta[$ ssi on a $Df \geq 0$ (resp. $Df \leq 0$) sur $]\alpha, \beta[$.

Théorème

Si f est une fonction réelle et dérivable sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$, alors f est strictement croissant (resp. strictement décroissant) sur $]\alpha, \beta[$ ssi on a $Df \geq 0$ (resp. $Df \leq 0$) sur $]\alpha, \beta[$ et si Df n'a pas de zéro intérieur dans $]\alpha, \beta[$.

Théorème (fonction inverse)

Toute fonction f réelle, strictement croissante (resp. strictement décroissante) et continue sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$ est une bijection entre $]\alpha, \beta[$ et $I =]\lim_{x \to \alpha^+} f(x), \lim_{x \to \beta^-} f(x)[$ (resp. $I =]\lim_{x \to \beta^-} f(x), \lim_{x \to \alpha^+} f(x)[$).

Définition

La bijection inverse associée à la fonction f de l'énoncé précédent est notée f^{-1} et est définie sur I par $f^{-1}(y) = x$ ssi $f(x) = y$.

La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse (ou réciproque) de f.

Théorème (fonction inverse)

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a les résultats suivants (cas strictement croissant) :

1. le graphe de f^{-1} est celui de f où on permute les rôles de la variable et de la valeur de la fonction,
2. la fonction f^{-1} est strictement croissante sur I,
3. la fonction f^{-1} est continue sur I,
4. si on pose, $\gamma_1 = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ et $\gamma_2 = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$, on a $\lim_{y\to\gamma_1^+} f^{-1}(y) = \alpha^+$ et $\lim_{y\to\gamma_2^-} f^{-1}(y) = \beta^-$,
5. si en outre f est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ (resp. appartient à $C^p(]\alpha,\beta[)$) et si Df diffère de 0 en tout point de $]\alpha,\beta[$, alors f^{-1} est dérivable sur I (resp. appartient à $C^p(I)$) et on a
$$[Df^{-1}]_y = \frac{1}{[Df]_{f^{-1}(y)}},$$
6. f est la fonction inverse def^{-1}.

Théorème

Une fonction réelle et déivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est convexe (resp. concave) sur cet intervalle ssi sa dérivée est croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle.

Corollaire

Une fonction réelle et deux fois dérivables sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est convexe (resp. concave) sur cet intervalle ssi sa dérivée seconde est une fonction positive (resp. négative) sur l'intervalle.

Proposition

Si f est une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble N des points de I où f n'est pas dérivable est dénombrable et Df est continu sur $I \setminus N$.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

1. f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de I,
2. les deux fonctions définies par la dérivée à droite et la dérivée à gauche sont respectivement continue à droite et à gauche,
3. N est l'ensemble des points de I où la dérivée à droite n'est pas continue ; c'est également l'ensemble des points de I où la dérivée à gauche n'est pas continue,
4. les dérivées à droite et à gauche coïncident sur $I \setminus N$.

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.
La fonction f atteint un maximum local au point $x_0 \in A$ s'il existe $\epsilon > 0$ t.q. $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in A \cap]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$. La fonction f atteint un minimum local au point $x_0 \in A$ s'il existe $\epsilon > 0$ t.q. $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in A \cap]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$.

On omet parfois le mot local.

Si f atteint un maximum ou un minimum local en x_0, on dit que f atteint un extremum local en x_0.

L'extremum (maximum ou minimum) est strict si l'inégalité précédente est stricte.

Un extremum est global si l'inégalité est vérifiée pour tout $\epsilon > 0$.

Une fonction peut ne pas avoir d'extremum, atteindre un extremum en un nombre fini de points ou en un nombre infini de points.

On ne dispose pas de méthode générale permettant la recherche d'un extrema d'une fonction réelle sur une partie de $\mathbb{R}$.

Dans le cas des fonctions dérivables sur un ensemble ouvert, on a le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction réelle et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$; si f atteint un extremum en $x \in I$, alors on a $[Df]_x = 0$.

Ce résultat n'admet pas de réciproque (comme en atteste la fonction x^3).

Définition

Soit f une fonction réelle et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$; un point stationnaire de f dans I est un point de I en lequel la dérivée de f s'annule.

Ainsi, si une fonction réelle et dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ atteint un extremum en un point, alors ce point est un point stationnaire de f.

Cette méthode n'est d'aucun secours lorsqu'on s'écarte des hypothèses.

La méthode naturelle de recherche des extrema d'une fonction f réelle et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ consiste à déterminer les points stationnaires de f dans I, puis à examiner chacun de ces points stationnaires.

Théorème

Soit f une fonction réelle et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ un point stationnaire de f.
La fonction atteint un maximum local en x_0 s'il existe $\epsilon > 0$ t.q. $x_0 - \epsilon \leq x < x_0$ implique $[Df]_{x_0} \geq 0$ et $x_0 < x \leq x_0 + \epsilon$ implique $[Df]_{x_0} \leq 0$. La fonction atteint un minimum local en x_0 s'il existe $\epsilon > 0$ t.q. $x_0 - \epsilon \leq x < x_0$ implique $[Df]_{I_0} \geq 0$ et $x_0 < x \leq x_0 + \epsilon$ implique $[Df]_{x_0} \geq 0$.
La fonction n'atteint pas d'extremum en x_0 s'il existe $\epsilon > 0$ t.q. Df est non nul et garde un signe constant sur $[x_0 - \epsilon[\cup]x_0, x_0 + \epsilon]$.

Théorème

Soit $p > 1$ un nombre entier et $x \in \mathbb{R}$. Si f est une fonction réelle appartenant à $C^p(]x-\epsilon, x+\epsilon[)$ pour un nombre $\epsilon > 0$ et si

$$[Df]_x = \cdots = [D^{p-1}f]_x = 0,$$

avec $[D^p f]_x \neq 0$, alors si p est pair, f atteint un extremum local strict en x ; c'est un maximum si $[D^p f]_x < 0$ et un minimum si $[D^p f]_x > 0$.
Si p est impair, la fonction n'atteint pas d'extremum en x.

Exercice : Étant donné $a, b > 0$, rechercher les extrema et discuter de la croissance de la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + \frac{b}{x}.$$

Exercice : Établir que toute fonction réelle, continue et non-monotone sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ admet un extrema local.

Définition

Une fonction réelle définie sur une partie non-majorée A de $\mathbb{R}$ admet la droite $y = mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$ comme asymptote en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - mx - p| = 0.$$

Une fonction réelle définie sur une partie non-minorée A de $\mathbb{R}$ admet la droite $y = mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$ comme asymptote en $-\infty$ lorsque

$$\lim_{x \to -\infty} |f(x) - mx - p| = 0.$$

Une fonction réelle définie sur une partie non-majorée A de $\mathbb{R}$ admet la droite $y = mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$ comme asymptote en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - mx - p| = 0.$$

Si $m = 0$, on parle d'asymptote horizontale et si m n'est pas nul, on parle d'asymptote oblique.

Proposition

Définition

Une fonction réelle f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ admet la droite $x = c$, avec $c \in \bar{A} \setminus A$, comme asymptote verticale lorsque

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty.$$

Exemple : $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}$.

Définition

Un point d'inflexion d'une fonction réelle f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un point x_0 de cet intervalle où s'opère un changement de concavité.

Ainsi, x_0 est un point d'inflexion ssi il existe $\epsilon > 0$ t.q. $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ est un intervalle de I pour lequel une des deux fonctions f ou $-f$ est concave sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$ et convexe sur $]x_0, x_0 + \epsilon[$.

Exemple : $x \mapsto (x-1)^3$.

Définition

Une fonction réelle f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ admet une tangente à droite en $x_0 \in A$ si la limite

$$\gamma_+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Une fonction réelle f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ admet une tangente à gauche en $x_0 \in A$ si la limite

$$\gamma_- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe.

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Le point $x_0 \in I$ est un point anguleux de f si les dérivées à gauche et à droite de f en x_0 existent et sont de signe différent.

Définition

V. Calcul de limites

Problème : Soit f défini sur $A \subset \mathbb{K}$, g défini sur $B \subset \mathbb{C}$ avec $f(A) \subset B$ et $\xi \in \bar{A} \cup \{\infty\}$. Si $\lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma$, que peut-on dire de $\lim_{x \to \xi} g \circ f(x)$

Si $\lim_{y \to \gamma} g(y)$ a un sens (OK si g est continu en γ), alors $\lim_{x \to \xi} g \circ f(x) = \lim_{y \to \gamma} g(y)$.

Si g est continu en γ, une simple substitution convient ; il existe d'autres cas où une substitution admet une interprétation directe :

- $c + \infty = \infty$, $c \in \mathbb{C}$ (ex : $\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) + x$),
- $c\infty = \infty$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ex : $\lim_{x \to +\infty} x \tanh(x)$),
- $c/\infty = 0$, $c \in \mathbb{C}$ (ex : $\lim_{x \to +\infty} \tanh(x)/x$).

On a aussi

- $r \pm \infty = \pm\infty$, $r \in \mathbb{R}$,
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$,
- $r \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } r > 0 \\ \mp\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$,
- $\frac{r}{\pm\infty} = \begin{cases} 0^{\pm} & \text{si } r > 0 \\ 0^{\mp} & \text{si } r < 0 \end{cases}$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \sin(x) + x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} (2 + \sin(x))x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)/x = 0$.

Il existe des cas où la limite cherchée existe même si $\lim_{y\to\gamma} g(y)$ n'existe pas (ex : $\lim_{x\to 0} (x + \sin(x))/\sin(x)$).

Il s'agit de cas où la substitution de γ dans g conduit à un symbole dénué d'interprétation ; on dit qu'il s'agit d'un symbole illusoire indéterminé.

Voici les principaux :

- symboles illusoires de base : « $0/0$ », « 0∞ », « ∞/∞ ».
  Équivalents : $f/g = f(1/g) = (1/g)/(1/f)$.
  Exemples : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\exp(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

- symbole illusoire « $\infty - \infty$ ».
  Se ramène aux précédents : $f - g = f(1 - g/f)$ (l'indétermination ne subsiste que si $g/f \to 1$).
  Exemple : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \cot(x)$.

- symboles illusoires exponentiels : « 0^0 », « 1^∞ », « ∞^0 » se ramènent aux symboles de base grâce à la formule $X^x = e^{x\ln(X)}$.

- d'autres symboles illusoires se ramènent aux précédents.

L'étude d'une limite d'un quotient peut parfois se ramener à l'étude de la limite sur le quotient des dérivées.

Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$

Cette manière de faire peut se généraliser.

Théorème (l'Hospital)

Soit f et g deux fonctions réelles et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que g et Dg diffèrent de 0 en tout point de I. Soit aussi r un point de I et ξ un des symboles r^+, r^-, $+\infty$ ou $-\infty$ t.q. il existe une suite de I qui converge vers ξ. Si on a

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \infty$$

et si $\lim_{x\to\xi} \frac{Df}{Dg}(x) = \gamma$, γ pouvant être un nombre réel ou l'un des symbole $+\infty$ ou $-\infty$, alors

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f}{g}(x) = \gamma.$$

Si g est une fonction réelle et dérivable sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et si Dg ne s'annule en aucun point de I, g ne peut s'annuler qu'une fois au plus.
$\to$ restreindre I au besoin.

On ne peut rien déduire de $\lim_{x \to \xi} \frac{Df}{Dg}(x)$ à partir de $\lim_{x \to \xi} \frac{f}{g}(x) = \gamma$.
(cf. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x) + x}{x}$).

$\lim_{x \to \xi} \frac{Df}{Dg}(x) = \gamma^{\pm}$ n'implique pas $\lim_{x \to \xi} \frac{f}{g}(x) = \gamma^{\pm}$.
(cf. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$).

Utiliser le théorème de l'Hospital avec parcimonie ! ! !
En général, on peut faire sans.

Exemples :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) = 1,$

- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)} = 2,$

- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -1/6,$

- $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = 1/2,$

- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = -e/2.$