Intégration sur un compact de $\mathbb{R}^n$

I. Intégrales multiples

II. Permutation de l'ordre d'intégration

III. Mesure d'un ensemble

I. Intégrales multiples

Si I et I' sont deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $I \times I'$, on peut considérer l'intégrale superposée

$$\int_{I'} \int_{I} f(x,y)\, dxdy = \int_{I'} (\int_{I} f(x,y)\, dx)\, dy.$$

La première étape consiste à remarquer que l'on peut effectuer les opérations dans l'ordre inverse :

Théorème

Soient I et I' sont deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $I \times I'$; on a

$$\int_{I'} \int_{I} f(x,y)\, dx\ dy = \int_{I} \int_{I'} f(x,y)\, dy\, dx.$$

On peut dès lors introduire la notation

$$\int_{I\times I'} f\, dxdy = \int_{I'} \int_{I} f\, dxdy = \int_{I} \int_{I'} f\, dydx.$$

On parle d'intégrale double sur l'intervalle compact $I \times I'$.

On introduit de la même manière les intégrales multiples ; par exemple, pour les intégrales triples, on pose

$$\int_{I\times I'\times I''} f\, dxdydz = \int_{I} \int_{I'} \int_{I''} f\, dxdydz.$$

ou simplement $\int_{I\times I'\times I''} f\, dx$.

Définition

L'intégrale d'une fonction f continue sur un compact K de $\mathbb{R}^n$ est l'intégrale de la fonction $f\chi_K$ sur I, où I est un intervalle compact (de $\mathbb{R}^n$) contenant K.

On écrit dans ce cas

$$\int_K f\,dx = \int_I f\chi_K\,dx.$$

II. Permutation de l'ordre d'intégation

Si $n > 1$ est un nombre entier, soit $n' \geq 1$ un nombre entier tel que $n' < n$ et posons $n'' = n - n'$.

Si π est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, on pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x' = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n')}), \qquad x'' = (x_{\pi(n'+1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

De cette manière, on peut écrire $x = (x', x'')$ et si f est une fonction définie en x, on pose $f(x', x'') = f(x)$.

Si E est une partie de $\mathbb{R}^n$ et x' un point de $\mathbb{R}^{n'}$, considérons la projection

$$E_{x'} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n''} : (x', x'') \in E\}.$$

De même, si x'' est un point de $\mathbb{R}^{n''}$, on pose

$$E^{x''} = \{x' \in \mathbb{R}^{n'} : (x', x'') \in E\}.$$

Il s'agit de parties de $\mathbb{R}^{n''}$ et $\mathbb{R}^{n'}$ respectivement.

Il est aussi naturel d'écrire

$$E_{\mathbb{R}^{n'}} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n''} : \text{il existe } x' \in \mathbb{R}^{n'} \text{ tel que } (x', x'') \in E\}.$$

et

$$E^{\mathbb{R}^{n''}} = \{x' \in \mathbb{R}^{n'} : \text{il existe } x'' \in \mathbb{R}^{n''} \text{ tel que } (x', x'') \in E\}.$$

Si f est une fonction définie sur E, pour x'' fixé, on peut considérer la fonction

$$f(\cdot, x'') : E^{x''} \to \mathbb{C} \quad x' \mapsto f(x', x'').$$

De même, pour x' fixé, la fonction

$$f(x', \cdot) : E_{x'} \to \mathbb{C} \quad x'' \mapsto f(x', x'')$$

est bien définie.

Théorème (Fubini)

Si f est une fonction continue sur un compact K, alors

$$\int_K f\,dx = \int_{K_{\mathbb{R}^{n'}}} \int_{K^{x''}} f(x', x'')\,dx'dx''.$$

Cette égalité est appelée une réduction de l'intégrale $\int_K f\,dx$.

Ce résultat est bien sûr toujours valide si on remplace $K_{\mathbb{R}^{n'}}$ et $K^{x''}$ par $K^{\mathbb{R}^{n''}}$ et $K_{x'}$ respectivement.

III. Mesure d'un ensemble

Définition

La mesure d'un ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$ est la quantité

$$|K| = \int_K 1\, dx.$$

Exercice : la mesure d'un rectangle de $\mathbb{R}^2$ de base b et de hauteur h est bh.

Exercice : calculer la mesure du disque de rayon $R > 0$.

Exercice : calculer la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon $R > 0$.

Compléments sur l'intégration sur $\mathbb{R}^n$

I. Intégrales sur une partie non compacte de $\mathbb{R}^n$

II. Changement de variable

I. Intégrales sur une partie non compacte de $\mathbb{R}^n$

À l'instar de ce qui a été fait sur $\mathbb{R}$, une fonction f continue et positive est intégrable sur un ensemble E (borné ou non) de $\mathbb{R}^n$ lorsque

$$\sup_{K \subset\subset E} \int_K f \, dx$$

existe et est fini, où la borne supérieure est prise sur les compacts K de E.

Auquel cas, on pose

$$\int_E f \, dx = \sup_{K \subset\subset E} \int_K f \, dx.$$

Si f est une fonction continue sur une partie E de $\mathbb{R}^n$, elle est absolument intégrable sur E si les fonctions positives $(\Re f)^+$, $(\Re f)^-$, $(\Im f)^+$ et $(\Im f)^-$ sont intégrables sur E, auquel cas, on pose

$$\int_E f\,dx = \int_E (\Re f)^+\,dx - \int_E (\Re f)^-\,dx + i\int_E (\Im f)^+\,dx - i\int_E (\Im f)^-\,dx.$$

Théorème (Fubini)

Si f est une fonction continue absolument intégrable sur un ensemble E de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\int_E f\,dx = \int_{E_{\mathbb{R}^{n'}}} \int_{E^{x''}} f(x',x'')\,dx'\,dx''.$$

Cette égalité est appelée une réduction de l'intégrale $\int_E f\,dx$.

Ce résultat est bien sûr toujours valide si on remplace $E_{\mathbb{R}^{n'}}$ et $E^{x''}$ par $E^{\mathbb{R}^{n''}}$ et $E_{x'}$ respectivement.

Il n'en reste pas moins que nous n'avons toujours pas de critère d'intégration dans le cadre général.

Le résultat suivant règle partiellement la question.

Théorème (Tonelli)

Si f est une fonction continue sur une partie E de $\mathbb{R}^n$ telle que $|f(\cdot, x'')|$ est intégrable sur $E^{x''}$ pour (presque) tout $x'' \in E_{\mathbb{R}^{n'}}$ et si

$$x'' \mapsto \int_{E^{x''}} |f(x', x'')| \, dx'$$

est intégrable sur $E_{\mathbb{R}^{n'}}$ alors f est absolument intégrable sur E.

Les hypothèses de ce résultat portent sur $|f|$ et non f.

Corollaire

Si g est une fonction absolument intégrable sur A et h une fonction absolument intégrable sur B, alors la fonction f définie par

$$f : A \times B \to \mathbb{C} \quad (x, y) \mapsto g(x)h(y)$$

est absolument intégrable sur $A \times B$.

Exercice : Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,+\infty[^2} e^{-y(1+x^2)}\, dxdy$ a un sens et obtenir sa valeur.

En pratique, on est parfois amené à calculer une intégrale sous forme réduite pour laquelle on ne peut appliquer les méthodes de calcul acquises ici. Dans ce cas, une permutation de l'ordre d'intégration peut s'avérer une stratégie payante ; il s'agit simplement de considérer l'intégrale sous une autre forme réduite.

Exercice : Établir que pour tout $x > 0$, la fonction e^{-y}/y est intégrable sur $]x, +\infty[$ et que la fonction

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. Enfin, obtenir une valeur de

$$\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dydx.$$

Remarquons que, dans le calcul de $\int_E f dxdy$ par réduction ou par permutation de l'ordre d'intégration, il est essentiel que la fonction f soit intégrable sur E.

En particulier, il n'est pas suffisant d'imposer l'intégrabilité de f sur E^y pour presque tout $y \in E_{\mathbb{R}^{n'}}$ et l'intégrabilité de $\int_{E^y} f dx$ sur $E_{\mathbb{R}^{n'}}$ (sauf bien sûr si f est une fonction positive, auquel cas f est intégrable sur E, par application du théorème de Tonelli).

Considérons par exemple la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Sur son domaine de définition, on a

$$f(x,y) = D_x \frac{-x}{x^2+y^2} = D_y \frac{y}{x^2+y^2}$$

et $f(\cdot, y)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $y \in]0,1[$.

On a donc

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = [\frac{-x}{x^2 + y^2}]_0^1 = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

Cette fonction est intégrable sur $]0,1[$ et il vient

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy = -\int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

De la même manière, on vérifie que $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $x \in]0,1[$, avec

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = [\frac{y}{x^2 + y^2}]_0^1 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Puisque cette fonction est intégrable sur $]0,1[$, on peut écrire

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dydx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Dans ce cas, on ne peut donc permuter les intégrales ! La raison en est simple : f n'est pas intégrable sur $]0,1[^2$.

Montrons que l'intégrale $\int_{]0,1[^2} |f| dxdy$ n'a pas sens. Si c'était le cas, l'intégrale pourrait être réduite. Or, pour tout $x \in]0,1[$, on trouve aisément

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x,y)| dy &= \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy + \int_x^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} dy \\
&= \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^x - \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_x^1 \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

On peut conclure, cette fonction n'étant pas intégrable sur $]0,1[$.

II. Changement de variable

Définition

Soit U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$; un changement de variable régulier (CVR) d'ordre p entre U et U' est une bijection $\varphi : U \to U'$ tq $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^p(U)$ et $\varphi_1^{-1}, \ldots, \varphi_n^{-1} \in C^p(U')$

Les deux dernières conditions s'écrivent $\varphi \in C^p(U)$ et $\varphi^{-1} \in C^p(U')$.

Très souvent, on pose $\varphi(x) = x'(x)$ et $\varphi^{-1}(x') = x(x')$ et on parle du chanchement de variable $x(x')$ entre U et U', $x'(x)$ étant appelé le changement de variable inverse (entre U' et U).

Bien entendu, la composition de changments de variables est un changement de variable.

Définition

Soit $x(x')$ un CVR d'ordre p entre U et U' ; les matrices jacobiennes associées $(\frac{\partial(x)}{\partial(x')})$ et $(\frac{\partial(x')}{\partial(x)})$ sont définies par

$$\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)_{j,k} = D_{x'_k} x_j(x') \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right)_{j,k} = D_{x_k} x'_j(x),$$

pour $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Définition

Soit $x(x')$ un CVR d'ordre p entre U et U' ; les jacobiens associés sont donnés par

$$\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right) \qquad \text{et} \qquad \det\left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right).$$

Il s'agit d'éléments de $C^{p-1}(U')$ et $C^{p-1}(U)$ respectivement.

Théorème (changement de variable)

Si $x(x')$ est un CVR d'ordre $p \geq 1$ entre les ouverts U et U' de $\mathbb{R}^n$, alors f est absolument intégrable sur U si et seulement si

$$f(x(x'))\,|\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)|$$

est absolument intégrable sur U', auquel cas, on a

$$\int_U f\,dx = \int_{U'} f(x(x'))\,|\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)|\,dx'.$$

Si A est une matrice réelle non-singulière de type $n \times n$ et si a est un point de $\mathbb{R}^n$, $x = Ax' + a$ est un CVR d'ordre infini entre $\mathbb{R}^n$ et lui-même.

Une fonction f est donc absolument intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $|\det A| f(A \cdot + a)$ l'est, auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + a) dx.$$

Il s'ensuit que si E est une partie intégrable de $\mathbb{R}^n$, alors $AE + a$ également et $|AE + a| = |\det A||E|$.

En particulier,

- les translations préservent l'intégrabilité et la mesure d'un ensemble,
- les rotations préservent l'intégrabilité et la mesure d'un ensemble.

Envisageons le passage aux coordonnées polaires dans le plan. Il nous faut donc considérer le CVR

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

d'ordre infini entre

$$U_{\theta_0} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) : r \geq 0\} \quad \text{et} \quad U'_{\theta_0} =]0, +\infty[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[,$$

θ_0 étant un nombre quelconque. Le module du jacobien vaut

$$\left| \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right) \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

Une demi-droite étant une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$, U_{θ_0} est égal presque partout à $\mathbb{R}^2$ et le théorème du changement de variable permet d'affirmer qu'une fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $(r,\theta) \mapsto rf(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est intégrable sur U'_{θ_0}, auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, dxdy = \int_0^{+\infty} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} rf(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) d\theta dr.$$

Comme application, considérons le disque de rayon $R > 0$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$.

Cet ensemble est égal presque partout à

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

et un passage en coordonnées polaires transforme cet ensemble en l'intervalle $]0, R[\times]0, 2\pi[$.

On a donc

$$|B| = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \pi R^2,$$

comme attendu.

Calculons la mesure de l'ellipse

$$E_{a,b} = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$$

avec $a, b > 0$. Cet ensemble étant compact, il est intégrable. Avec le changement de variable linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

l'ellipse devient

$$B_1 = \{(x', y') : x'^2 + y'^2 \leq 1\},$$

c'est-à-dire le disque centré à l'origine et de rayon unité. On a donc

$$|E_{a,b}| = \int_{B_1} ab \, dx' dy' = \pi ab.$$

Remarquons que l'on peut combiner le changement de variable linéaire et le passage aux coordonnées polaires en considérant directement le CVR

$$\left\{ \begin{array}{l} x = ar\cos(\theta) \\ y = br\sin(\theta) \end{array} \right. .$$

Théorème (Euler-Poisson)

Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Démonstration. On vérifie trivialement que $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ est une fonction continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de Tonelli permet alors d'affirmer que la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x)f(y) = e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[^2$.

Un passage aux coordonnées polaires procure les égalités

$$\begin{aligned}
(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx)^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y^2} dy \\
&= \int_{]0,+\infty[^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} re^{-\lambda r^2} d\theta dr \\
&= \frac{\pi}{2}[-\frac{e^{-\lambda r^2}}{2\lambda}]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\lambda},
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Envisageons maintenant le passage aux coordonnées polaires dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Il nous faut cette fois-ci considérer la CVR

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{array}\right.$$

d'ordre infini entre

$$U_{\theta_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0), z) : r \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{et} \quad U'_{\theta_0} =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[,$$

θ_0 étant un nombre quelconque.

Le module du jacobien vaut

$$\left|\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right)\right| = \left|\begin{array}{ccc} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{array}\right|$$
$$= r^2\sin(\theta).$$

Un demi-plan étant une partie négligeable de $\mathbb{R}^3$, U_{θ_0} est égal presque partout à $\mathbb{R}^3$ et le théorème du changement de variable permet d'affirmer qu'une fonction $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$(r, \theta, \phi) \mapsto r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta))$$

est intégrable sur U'_{θ_0}, auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, dxdydz$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta)) \, d\phi d\theta dr.$$

Considérons la mesure de la boule B de rayon $R > 0$,

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

On constate que la boule B est égale presque partout à

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Par un passage aux coordonnées polaires, cet ensemble se transforme en $]0, R[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$.

La mesure de la boule vaut donc

$$|B| = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Étant donné trois nombres réels strictement positifs a, b et c, calculer la mesure de l'ellipsoïde

$$E_{a,b,c} = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Le changement de variable linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

transforme $E_{a,b,c}$ en la boule de rayon unité.

Il s'ensuit que $E_{a,b,c}$ est intégrable (ce que l'on savait déjà puisque $E_{a,b,c}$ est compact) et que l'on a

$$|E_{a,b,c}| = \frac{4}{3}\pi abc.$$