L'intégrale de Darboux

I. Définition et premières propriétés

II. Interprétation de l'intégrale d'une fonction

III. Calcul d'intégrales

I. Définition et premières propriétés

Définition

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'intérieur de I est le plus grand intervalle ouvert inclus dans I ; il est noté I°.

Exercice : Si I et I' sont deux intervalles tq $I \subset I'$, alors $I^\circ \subset I'^\circ$.

Exercice : Si I et I' sont deux intervalles d'intersection non vide, alors on a $(I \cap I')^\circ = I^\circ \cap I'^\circ$.

Définition

Un découpage d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est la donnée d'une partition de I en un nombre fini d'intervalles I_j ($j \in \{1, \dots, n\}$) de longueurs non nulles ; on le note $(I_j)_{j=1}^n$.

Définition

Une fonction φ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite étagée s'il existe un découpage $(I_j)_{j=1}^n$ de I tq φ soit constant sur chacun des intervalles I_j° ($j \in \{1, \ldots, n\}$). Un tel découpage est dit adapté à φ.

Proposition

Toute cl de fonctions étagées sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction étagée sur I.

Définition

Un découpage $(I_j)_{j=1}^n$ est plus fin que le découpage $(I'_j)_{j=1}^m$ du même intervalle si, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $j' \in \{1, \ldots, m\}$ tq $I_j \subset I'_{j'}$.

Si φ est une fonction étagée sur I et si $(]x_j, x_{j+1}])_{j=1}^n$ définit un découpage adapté à φ, alors $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(\xi_j)\chi_{]x_j,x_{j+1}]}$, où ξ_j est un point de $]x_j, x_{j+1}[$.

Définition

Si I est un intervalle borné d'extrémités a et b ($a \leq b$), on désigne par $|I|$ la longueur de I : $|I| = b - a$, $|\emptyset| = 0$.

Lemme

Soit φ une fonction étagée sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$; si $(I_j)_{j=1}^n$ et $(I'_j)_{j=1}^m$ sont deux découpages adaptés à φ, alors on a

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_j)\,|I_j| = \sum_{j=1}^{m} \varphi(\xi'_j)\,|I'_j|,$$

où ξ_j et ξ'_j sont des points de I_j° et $I_j'^\circ$ respectivement.

Définition

Si φ est une fonction étagée sur l'intervalle borné I de $\mathbb{R}$ et $(I_j)_{j=1}^n$ est un découpage adapté à φ, l'intégrale de Darboux de φ sur I est la quantité

$$m_I(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_j)\,|I_j|,$$

avec $\xi_j \in I_j^\circ$.

Proposition

Si φ et ψ sont deux fonctions étagées sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$, alors $m_I(c\varphi + c'\psi) = c\, m_I(\varphi) + c' m_I(\psi)$, pour tous nombres c et c'.

Proposition

Si φ et ψ sont deux fonctions étagées sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$, alors $\varphi \leq \psi$ implique $m_I(\varphi) \leq m_I(\psi)$; en particulier, $\varphi \geq 0$ implique $m_I(\varphi) \geq 0$.

Notation : si f est une fonction bornée sur I, on pose $\|f\|_I = \sup |f|(I)$.

Proposition

Si φ est une fonction étagée sur l'intervalle borné I de $\mathbb{R}$, on a $|m_I(\varphi)| \leq m_I(|\varphi|) \leq \|\varphi\|_I |I|$.

Notation : si f est une fonction réelle et bornée sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$, on pose

$$\underline{m}_I(f) = \sup\{m_I(\varphi) : \varphi \text{ fct ét tq } \varphi \leq f\},$$

et

$$\overline{m}_I(f) = \inf\{m_I(\psi) : \psi \text{ fct ét tq } \psi \geq f\},$$

On a $-\|f\|_I |I| \leq \underline{m}_I(f) \leq \overline{m}_I(f) \leq \|f\|_I |I|$.

Proposition

Si f et g sont deux fonctions réelles et bornées sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$, on a toujours

$$\underline{m}_I(f+g) \geq \underline{m}_I(f) + \underline{m}_I(f) \qquad \text{et} \qquad \overline{m}_I(f+g) \leq \overline{m}_I(f) + \overline{m}_I(f).$$

Proposition

Soit f une fonction réelle et bornée sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$. Pour tout nombre c positif, on a

$$\underline{m}_I(cf) = c\underline{m}_I(f) \qquad \text{et} \qquad \overline{m}_I(cf) = c\overline{m}_I(f).$$

Pour tout nombre c négatif, on a

$$\underline{m}_I(cf) = c\overline{m}_I(f) \qquad \text{et} \qquad \overline{m}_I(cf) = c\underline{m}_I(f).$$

Définition

Une fonction réelle et bornée sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ est intégrable sur I au sens de Darboux (ou Riemann) lorsque $\underline{m}_I(f) = \overline{m}_I(f)$.
La valeur $m_I(f) = \underline{m}_I(f)$ est alors appelée l'intégrale de Darboux de f.

Si φ et ψ fct ét tq $\varphi \leq f \leq \psi$, alors $m_I(\varphi) \leq m_I(f) \leq m_I(\psi)$.

En prenant $\varphi = \inf f(I)$ et $\psi = \sup f(I)$, il vient
$\inf f(I) \leq \dfrac{m_I(f)}{|I|} \leq \sup f(I)$.

Lemme

Une fonction réelle f est intégrable sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions étagées φ et ψ vérifiant $\varphi \leq f \leq \psi$ sur I tq $m_I(\psi) - m_I(\varphi) < \epsilon$.

Définition

Si f est une fonction à valeurs complexes, f est intégrable sur un intervalle compact I si $\Re f$ et $\Im f$ le sont ; on pose dans ce cas $m_I(f) = m_I(\Re f) + i m_I(\Im f)$.

La fonction $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas intégrable au sens de Darboux sur $[0, 1]$.

Proposition

Si f et g sont intégrables sur un intervalle compact I et si c, c' sont deux constantes, on a $m_I(cf + c'g) = c\, m_I(f) + c' m_I(g)$.

Lemme

Si g et h sont deux fonctions vérifiant $g \leq h$, on a $h^{\pm} - g^{\pm} \leq h - g$.

Proposition

Soit f une fonction réelle ; si f est intégrable sur l'intervalle compact I, alors f^{+} et f^{-} le sont également.

Proposition

Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle compact I, il en va de même pour $|f|$.

L'inverse n'est pas vrai (utiliser la fonction de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$) !

Proposition

Si f et g sont deux fonctions réelles et intégrables sur l'intervalle compact I, alors $\sup\{f,g\}$ et $\inf\{f,g\}$ sont également intégrables sur I.

Lemme

L'intégrale d'une fonction positive est positive.

Proposition

Si f et g sont deux fonctions réelles et intégrables sur l'intervalle compact I tq $f \leq g$, alors $m_I(f) \leq m_I(g)$.

Proposition

Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle compact I, on a $|m_I(f)| \leq m_I(|f|) \leq \|f\|_I \, |I|$.

Proposition

Si f est une fonction intégrable, continue et positive sur l'intervalle compact I tq $m_I(f) = 0$, alors $f = 0$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle compact est intégrable sur cet intervalle.

Théorème

Toute fonction monotone sur un intervalle compact est intégrable sur cet intervalle.

II. Interprétation de l'intégrale d'une fonction

Soit f une fonction réelle et intégrable sur l'intervalle compact I de $\mathbb{R}$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, soit φ et ψ deux fonctions étagées sur I tq $\varphi \leq f \leq \psi$ et

$$m_I(f) - m_I(\varphi) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad m_I(\psi) - m_I(f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $(]x_j, x_{j+1}])_{j=1}^{n}$ un découpage de I plus fin que ceux adaptés à φ et ψ et, pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, soit ξ_j vérifiant $x_j < \xi_j < x_{j+1}$.

La fonction $\theta = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\chi_{]x_j,x_{j+1}]}$ est une fonction étagée tq $\varphi \leq \theta \leq \psi$.

On a $|m_I(f) - m_I(\theta)| \leq m_I(\psi) - m_I(\varphi) < \epsilon$, autrement dit

$$|m_I(f) - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)| < \epsilon.$$

Notation : si $I = [a, b]$, $m_I(f) = \int_a^b f\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \int_I f\, dx$.

Proposition (relation de Chasles)

Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle compact I et $(I_j)_{j=1}^n$ est un découpage de I, alors f est intégrable sur chaque intervalle $\overline{I_j}$ et

$$\int_I f\,dx = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f\,dx.$$

Si f est intégrable sur $[a,c]$, on a

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$$

pour tout $b \in]a,c[$.

Dès lors, il vient $\displaystyle\int_b^c f\,dx = \int_a^c f\,dx - \int_a^b f\,dx$

et on peut convenir d'écrire $\displaystyle\int_b^c f\,dx = \int_b^a f\,dx + \int_a^c f\,dx$,

en adoptant la convention naturelle $\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$.

Lemme

Si f est intégrable sur les intervalles compacts $[a,b]$ et $[b,c]$ $(a < b < c)$, alors f est intégrable sur $[a,c]$.

Proposition

Si $x_1,\ldots,x_{n+1}$ sont des nombres réels $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ et si f est intégrable sur l'intervalle d'extrémités x_j, x_{j+1} pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, alors f est intégrable sur l'intervalles d'extrémités x_1, x_{n+1} et

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f\,dx.$$

Théorème (sommes de Riemann)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle compact I ; si, étant donné $\delta > 0$, $(I_j^{(\delta)})_{j=1}^{n(\delta)}$ est un découpage de I tq

$$\sup\{|I_j^{(\delta)}| : 1 \leq j \leq n(\delta)\} < \delta$$

et si, pour tout $j \in \{1, \ldots, n(\delta)\}$, $\xi_j^{(\delta)}$ est un point de $I_j^{(\delta)}$, on a

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sum_{j=1}^{n(\delta)} f(\xi_j^{(\delta)}) |I_j^{(\delta)}| = \int_I f\, dx.$$

Exemple : Soit la fonction $x \mapsto x$ sur $[a, b]$. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, posons $x_j = a + (j-1)\frac{b-a}{n}$ et $\xi_j = a + (j - \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$.
Les intervalles $(]x_j, x_{j+1}])_{j=1}^{n}$ forment un découpage de $]a, b]$ et ξ_j est un élément de $]x_j, x_{j+1}[$.
On trouve $\int_a^b x\, dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Exemple : Soit la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[a, b]$. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, posons $x_j = a + (j-1)\frac{b-a}{n}$ et $\xi_j = a + j\,\frac{b-a}{n}$.
Les intervalles $(]x_j, x_{j+1}])_{j=1}^n$ forment un découpage de $]a, b]$ et ξ_j est un élément de $]x_j, x_{j+1}]$.
On a

$$\sum_{j=1}^n \xi_j^2 (x_{j+1} - x_j) = (b-a)a^2 + (b-a)^3 \frac{(2n+1)(n+1)}{6n^2} + (b-a)^2 a \frac{n+1}{n}.$$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^n \xi_j^2 (x_{j+1} - x_j) = (b-a)a^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 + (b-a)^2 a$.

On trouve ainsi $\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

III. Calcul d'intégrales

Théorème (fondamental)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors, pour tout $x \in I$, la fonction

$$F : I \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

est dérivable sur I et sa dérivée est égale à f.

Plus précisément, si f est une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui admet une limite à droite $f(x^+)$ (resp. à gauche $f(x^-)$) en x, alors la fonction F admet $f(x^+)$ pour dérivée à droite (resp. $f(x^-)$ pour dérivée à gauche) en ce point.

Définition

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ admet une primitive ou est primitivable sur A s'il existe une fonction F définie et dérivable sur A tq $DF = f$ sur A ;
F est alors appelé une primitive de f sur A.

Corollaire

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.

Théorème (variation des primitives)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I, alors

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a),$$

pour tous $a, b \in I$.

Corollaire (théorème de la moyenne)

Si f est une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de longueur non nulle, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tq

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx.$$

Exemple : Pour la fonction x^k sur $[a, b]$ ($0 < a < b$, $k \neq -1$), $\displaystyle\int_a^b x^k \, dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$.

Exercice : Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\lim_{j \to +\infty} \left(\frac{1}{j+1} + \frac{1}{j+2} + \cdots + \frac{1}{nj}\right) = \ln(n)$.

Notation : Si f est défini sur $]\alpha,\beta[$ de $\mathbb{R}$, $[f]_a^b = f(b) - f(a)$ pour $a, b \in]\alpha,\beta[$ et $[f]_\alpha^\beta = \lim_{x\to\beta^-} f(x) - \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$.

Proposition

Si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, alors pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b g\, Df\, dx = [fg]_a^b - \int_a^b f\, Dg\, dx.$$

Exercice : trouver une primitive de la fonction
$[0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(x+1)$.

Exercice : calculer $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\prod_{k=1}^{j}(1+\frac{k}{j})}$.

Théorème (formule de Taylor avec reste intégral)

Si f est une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors pour tous $a, b \in I$, on a

$$f(b) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(b-a)^j}{j!} D^j f(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} D^{p+1} f(t)\, dt.$$

Corollaire

Si f est une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in I$ tout nombre h tq $x + h \in I$, on a

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} D^j f(x) + \frac{h^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p D^{p+1} f(x+th)\, dt.$$

Théorème (intégration par substitution)

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et f une fonction continue sur $\varphi([a, b])$. On a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\, D\varphi(x)\, dx.$$

Exemple : Calculer, si possible, l'intégrale $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx$.

Définition

Soit A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$ et p un nombre naturel non nul ou le symbole infini ; une fonction φ de A dans B est un changement de variable régulier (CVR) d'ordre p entre A et B si $\varphi : A \to B$ est une bijection de classe C^p tq $D\varphi$ ne s'annule en aucun point de A.

Corollaire (changement de variable)

Soit φ un CVR entre un intervalle compact I et $[a, b]$; si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(x)\big)\, D\varphi(x)\, dx.$$

Pour un CVR φ, φ^{-1} a la même régularité que φ.

Exemple : Si f est une fonction paire et continue sur l'intervalle $[-a, a]$ ($a > 0$), alors $\int_{-a}^{a} f\, dx = 2\int_0^a f\, dx$.

Exemple : Si f est une fonction impaire et continue sur l'intervalle $[-a, a]$ ($a > 0$), alors $\int_{-a}^{a} f\, dx = 0$.

Exercice : calculer, si possible, l'intégrale $\int_1^n \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, où $n > 1$ est un nombre réel.

Plus l'intervalle $[0, n]$ est grand, plus l'intégrale se rapproche de $\ln(\sqrt{2}+1)$.

Fonctions élémentaires

I. Fonctions exp et log

II. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

III. Fonctions circulaires

IV. Applications

I. Fonctions exp et log

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction

$$\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

qui vaut 0 en 1 et admet pour dérivée $1/x$ sur $]0,+\infty[$.

Proposition

La fonction ln est réelle, tq $\ln(1) = 0$, strictement croissante, concave, de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et de dérivée égale à $1/x$ sur cet intervalle.

Théorème

Pour tous nombres x et x' strictement positifs, on a

$$\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x').$$

Corollaire

Pour tous nombres strictement positifs x et x', et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

- $\ln(1/x) = -\ln(x)$,
- $\ln(x/x') = \ln(x) - \ln(x')$,
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$,
- pour $n \neq 0$, $\ln(x^{1/n}) = \ln(x)/n$.

Proposition

On a

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln^n(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0^+.$$

Définition

Étant donné $x \in]-1,1]$, la série $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{x^{j+1}}{j+1}$ est appelée une série de Mercator.

Théorème

Pour tout $x \in]-1,1]$, on a $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{x^{j+1}}{j+1} = \ln(x+1)$.

Corollaire

Pour la série harmonique alternée, on a $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\ln(2)$.

Définition

La constante d'Euler-Mascheroni est le nombre $\gamma = \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} - \ln(j)$.

Définition

La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ étant une bijection, elle admet une fonction inverse ; cette fonction est appelée la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et est notée exp.

Proposition

La fonction exponentielle,

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

est tq $\exp(0) = 1$, strictement croissante, convexe et de dérivée égale à exp sur cet intervalle.

Théorème

Pour tous nombres réels x et x', on a

$$\exp(x + x') = \exp(x)\exp(x').$$

Corollaire

Pour tout nombre réel x, on a $\exp(x)\exp(-x) = 1$ et donc $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

Lemme

Pour tout nombre réel x, on a $|\exp(x)| \leq \exp(|x|)$.

Théorème

Pour tout nombre réel x, on a $\exp(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

Définition

Le nombre e est défini comme suit : $e = \exp(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$.

Proposition

Le nombre e est irrationnel.

Proposition

On a $\ln(e) = 1$.

Proposition

Pour tout nombre naturel n, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n \exp(x) = 0.$$

En particulier, $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

La fonction exp est unique au sens suivant : si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tq $f(0) = c$ pour une constante non nulle c et $Df = f$, alors on a $f = c \exp$ sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi définir la fonction exp comme suit :

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\quad x \mapsto \lim_{j \to +\infty} (1 + \frac{x}{j})^j.$$

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$ converge absolument.

Définition

La fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ est la fonction définie comme suit

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots .$$

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

Théorème

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.

Théorème

La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$, avec $D \exp = \exp$.

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) \exp(-z) = 1$;
en particulier, $\exp(z) \neq 0$ pour tout z.

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) = \exp(\Re z) \exp(i \Im z)$.

Définition

Pour $x \in]0, +\infty[$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose $x^z = \exp(z \ln(x))$.

On a $e^z = \exp(z \ln(e)) = \exp(z)$.
Pour $z = n$ ou $z = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on retrouve la définition classique.

Définition

Si $z_0 \in \mathbb{C}$, la puissance d'exposant complexe est la fonction qui à $x \in]0, +\infty[$ associe x^{z_0}.

Définition

Si $x_0 > 0$, l'exponentielle d'argument positif est la fonction qui à $z \in \mathbb{C}$ associe x_0^z.

Proposition

Pour $x > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{x^z} = x^{\bar{z}}$.

Lemme

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ix}| = 1$.

Proposition

Pour $x > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $|x^z| = x^{\Re z}$.

Proposition

Pour $x > 0$ et $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $x^z x^{z'} = x^{z+z'}$
et donc $x^{-z} = 1/x^z$.

Proposition

Pour $x, x' > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $x^z x'^z = (xx')^z$.

Proposition

Pour tous $x > 0$ et $r \in \mathbb{R}$, on a $\ln(x^r) = r \ln(x)$.

Proposition

Pour tous $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $(x^r)^z = x^{rz}$.

Proposition

Pour tous $x > 0$, $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $(x^z)^k = x^{kz}$.

En toute généralité, on n'a pas $(x^z)^{z'} \stackrel{!}{=} x^{zz'}$!

Proposition

Pour x_0, la fonction exponentielle d'argument x_0 est de classe C^∞ et $Dx_0^z = x_0^z \ln(x_0)$.

Proposition

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, la fonction puissance d'exposant z_0 est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $Dx^{\mathbf{z_0}} = z_0 x^{\mathbf{z_0}-1}$.

Proposition

Pour tous $X, X' > 0$ et tous $x, x' \in \mathbb{R}$, on a

- $X^x > 0$,
- $X^x X^{x'} = X^{x+x'}$, $X^x X'^x = (XX')^x$ et $(X^x)^{x'} = X^{xx'}$,
- si en outre $x > 0$, $X^{\ln(x)} = x^{\ln(X)}$.

Proposition

Si $x_0 > 0$, la fonction $x \mapsto x_0^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et jouit des propriétés suivantes : x_0^x est une fonction

- strictement positive sur $\mathbb{R}$,
- appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$ et vérifiant $Dx_0^x = x_0^x \ln(x_0)$,
- strictement croissante si $x_0 > 1$, strictement décroissante si $0 < x_0 < 1$,
- convexe,
- tq
$$\lim_{x \to +\infty} x_0^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x_0 > 1 \\ 0^+ & \text{si } 0 < x_0 < 1 \end{cases}$$
et
$$\lim_{x \to -\infty} x_0^x = \begin{cases} 0^+ & \text{si } x_0 > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < x_0 < 1 \end{cases} .$$

Proposition

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^{x_0}$ est définie sur $]0, +\infty[$ et jouit des propriétés suivantes : x^{x_0} est une fonction

- strictement positive sur $]0, +\infty[$,
- appartenant à $C^\infty(]0, +\infty[)$ et vérifiant $Dx^{x_0} = x_0 x^{x_0 - 1}$,
- strictement croissante si $x_0 > 0$, strictement décroissante si $x_0 < 0$,
- convexe si $x_0 \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, concave si $x \in]0, 1[$,
- tq
$$\lim_{x \to +\infty} x^{x_0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x_0 > 0 \\ 0^+ & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$
et
$$\lim_{x \to 0^+} x^{x_0} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } x_0 > 0 \\ +\infty & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}.$$

Définition

Si $b \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on appelle logarithme de base b la fonction
$\log_b :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

Pour deux bases b, b',

$$\log_b(x) = \frac{\ln(b')}{\ln(b)} \frac{\ln(x)}{\ln(b')} = \log_b(b') \log_{b'}(x).$$

$\log_b(x)$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir x :
$b^{\log_b(x)} = e^{\log_b(x)\ln(b)} = x$.

Proposition

Pour $b > 1$ et $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^a} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b(x)}{x^a} = 0.$$

II. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Définition

Une fonction réelle définie sur un intervalle symétrique $[-a, a]$ ou $]-\alpha, \alpha[$ est une fonction $\left\{ \begin{array}{l} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{array} \right.$ si $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{array} \right.$ pour tout x de l'intervalle.

Définition

Étant donne une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, la fonction
$f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ est appelée partie paire de f
et la fonction $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ est appelée partie impaire de f.

Bien sûr, f_p est pair, f_i impair et $f = f_p + f_i$.

Cette décomposition est unique.

Définition

La fonction $\left\{\begin{array}{ll} \text{cosinus hyperbolique} & \text{notée } \cosh \\ \text{sinus hyperbolique} & \text{notée } \sinh \end{array}\right.$ est la $\left\{\begin{array}{l} \text{partie paire} \\ \text{partie impaire} \end{array}\right.$ de la fonction exp restreinte à $\mathbb{R}$.

On a donc

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ et $e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$ and $\sinh(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$.

Proposition

Les fonctions cosh et sinh sont réelles, définies sur $\mathbb{R}$ et respectivement paire et impaire. Qui plus est,

- $\cosh(0) = 1$ et $\cosh(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $\sinh(0) = 0$, $\sinh(x) < 0$ pour $x < 0$ et $\sinh(x) > 0$ pour $x > 0$,
- on a $\lim_{x \to \pm\infty} \cosh(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to \pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty$,
- $\cosh, \sinh \in C^\infty(\mathbb{R})$, $D\cosh = \sinh$ et $D\sinh = \cosh$,
- cosh est str. décroissant sur $]-\infty, 0[$, str. croissant sur $]0, +\infty[$
- sinh est str. croissant sur $\mathbb{R}$,
- cosh est convexe sur $\mathbb{R}$, sinh est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$.

Théorème

On a $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Si on pose $X = \cosh(x)$ et $Y = \sinh(x)$, l'équation $X^2 - Y^2 = 1$ définit, dans le plan, une hyperbole équilatère. Ces fonctions constituent donc un paramétrage de cette hyperbole.

Définition

La fonction tangente hyperbolique est la fonction

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Définition

La fonction cotangente hyperbolique est la fonction

$$\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$

Proposition

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\tanh(0) = 0$,
- tanh est impair et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,
- coth est impair et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $D \tanh = 1/\cosh^2$ sur $\mathbb{R}$ et $D \coth = -1/\sinh^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- tanh est str. croissant sur $\mathbb{R}$, coth est str. décroissant sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$,
- tanh est convexe sur $]-\infty, 0[$ et concave sur $]0, +\infty[$, coth est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$,
- on a $\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1^-$, $\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = (-1)^+$, $\lim_{x \to +\infty} \coth(x) = 1^+$, $\lim_{x \to -\infty} \coth(x) = (-1)^-$, et $\lim_{x \to 0^+} \coth(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \coth(x) = -\infty$.

Proposition (addition et soustraction)

Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, on a $\cosh(x \pm x') = \cosh(x)\cosh(x') \pm \sinh(x)\sinh(x')$, $\sinh(x \pm x') = \sinh(x)\cosh(x') \pm \cosh(x)\sinh(x')$ et $\tanh(x \pm x') = \dfrac{\tanh(x) \pm \tanh(x')}{1 \pm \tanh(x)\tanh(x')}$.

Proposition

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\tanh^2(x) + \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1$ et, pour tout $x \neq 0$, $\coth^2(x) - \dfrac{1}{\sinh^2(x)} = 1$.

On a $\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$ et

$$\sinh(x) = \begin{cases} \sqrt{\cosh^2(x) - 1} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{\cosh^2(x) - 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition

Pour $x \in \mathbb{R}$,

- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$,
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$,
- $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$,
- $\cosh(2x) + 1 = 2\cosh^2(x)$,
- $\cosh(2x) - 1 = 2\sinh^2(x)$.

Proposition

Pour $x, x' \in \mathbb{R}$,

- $\cosh(x + x') + \cosh(x - x') = 2\cosh(x)\cosh(x')$,
- $\sinh(x + x') + \sinh(x - x') = 2\sinh(x)\cosh(x')$,
- $\cosh(x + x') - \cosh(x - x') = 2\sinh(x)\sinh(x')$,
- $\cosh(x) + \cosh(x') = 2\cosh(\dfrac{x + x'}{2})\cosh(\dfrac{x - x'}{2})$,
- $\cosh(x) - \cosh(x') = 2\sinh(\dfrac{x + x'}{2})\sinh(\dfrac{x - x'}{2})$,
- $\sinh(x) + \sinh(x') = 2\sinh(\dfrac{x + x'}{2})\cosh(\dfrac{x - x'}{2})$,
- $\sinh(x) - \sinh(x') = 2\sinh(\dfrac{x - x'}{2})\cosh(\dfrac{x + x'}{2})$.

Proposition

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$(\cosh(x) \pm \sinh(x))^n = e^{\pm nx} = \cosh(nx) \pm \sinh(nx)$,
$\cosh^n(x) = 2^{-n}(e^x + e^{-x})^n$ et $\sinh^n(x) = 2^{-n}(e^x - e^{-x})^n$.

Définition

La fonction argument sinus hyperbolique, notée arsinh, est la fonction inverse de la fonction sinh.

Proposition

La fonction arsinh

- est définie, réelle, impaire et str. croissante sur $\mathbb{R}$,
- vérifie $\operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = \sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{arsinh}(0) = 0$,
- appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ et vérifie $D\operatorname{arsinh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
- est concave sur $]-\infty, 0[$, et $]0, +\infty[$,
- donne lieu aux relations $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arsinh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arsinh}(x) = +\infty$.

On a $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Définition

La fonction argument cosinus hyperbolique, notée arcosh, est la fonction inverse de la restriction de cosh à $[0, +\infty[$.

Proposition

La fonction arcosh

- est définie, réelle et str. croissante sur $[1, +\infty[$,
- vérifie $\operatorname{arcosh}(\cosh(x)) = x$ pour $x \in [0, +\infty[$, $\cosh(\operatorname{arcosh}(x)) = x$ pour $[1, +\infty[$ et $\operatorname{arcosh}(1) = 0$,
- appartient à $C^0([0, +\infty[)$, $C^\infty(]1, +\infty[)$ et vérifie $D\operatorname{arcosh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,
- est concave,
- donne lieu à la relation $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcosh}(x) = +\infty$.

On a $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Définition

La fonction argument tangente hyperbolique, notée artanh, est la fonction inverse de la fonction tanh.

Proposition

La fonction artanh

- est définie, réelle, impaire et str. croissante sur $]-1, 1[$,
- vérifie $\operatorname{artanh}(\tanh(x)) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$, $\tanh(\operatorname{artanh}(x)) = x$ pour $]-1, 1[$ et $\operatorname{artanh}(0) = 0$,
- appartient à $C^\infty(]-1, 1[)$ et vérifie $D\operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$,
- est concave sur $]-1, 0[$ et convexe sur $]0, 1[$,
- donne lieu aux relations $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \operatorname{artanh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{artanh}(x) = +\infty$.

On a $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Définition

La fonction argument cotangente hyperbolique, notée arcoth, est la fonction inverse de la restriction de coth à $]0, +\infty[$.

Proposition

La fonction artanh

- est définie, réelle et str. décroissante sur $]1, +\infty[$,
- vérifie $\operatorname{arcoth}(\coth(x)) = x$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $\coth(\operatorname{arcoth}(x)) = x$ pour $]1, +\infty[$,
- appartient à $C^\infty(]1, +\infty[)$ et vérifie $D\operatorname{arcoth}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,
- est convexe,
- donne lieu aux relations $\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arcoth}(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcoth}(x) = 0^+$.

III. Fonctions circulaires

Définition

La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} i^j \frac{x^j}{j!}$.

Définition

La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos(x) = \Re e^{ix}$.
La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin(x) = \Im e^{ix}$.

Bien sûr ces fonctions sont réelles et on a $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et $e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i\sin(x)$ (formule d'Euler).

Proposition

On a $\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$ et $\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$.

Théorème (relation fondamentale)

On a $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on pose $X = \cos(x)$ et $Y = \sin(x)$, l'équation $X^2 + Y^2 = 1$ définit, dans le plan, le cercle unité centré à l'origine. Les fonctions cos et sin sont donc un paramétrage de ce cercle.

Proposition

On a les propriétés suivantes :

- les fonctions cos et sin sont réelles sur $\mathbb{R}$,
- on a $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$,
- cos est une fonction paire, sin est une fonction impaire,
- on a $\cos, \sin \in C^\infty(\mathbb{R})$, $D\cos = -\sin$ et $D\sin = \cos$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$,
- les nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ ne sont jamais simultanéments nuls.

Lemme

Pour tout $x \in]0, 2[$, on a $\sin(x) > 0$.

Lemme

On a $\cos(2) < 0$.

Proposition

Il existe un et un seul zéro de la fonction cosinus sur $]0, 2[$.

Définition

Le nombre π est le nombre qui est égal à deux fois le zéro unique de cos sur $]0, 2[$.

Théorème

La fonction cosinus est réelle sur $\mathbb{R}$, appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$, et vérifie $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$. De plus, elle est str. décroissante et concave sur $[0, \pi/2]$.
La fonction sinus est réelle sur $\mathbb{R}$, appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$, et vérifie $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$. De plus, elle est str. croissante et concave sur $[0, \pi/2]$.

Corollaire

On a $e^0 = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{3\pi/3} = -i$ et $e^{2i\pi} = 1$.
Ainsi, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(3\pi/2) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$ et
$\sin(0) = 0$, $\cos(\pi/2) = 1$, $\sin(\pi) = 0$, $\sin(3\pi/2) = -1$, $\sin(2\pi) = 0$.

Le nombre π est irrationnel.

Définition

La fonction tangente, notée tan, est la fonction définie sur

$$A_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos(x) = 0\}$$

par $\tan : A_{\tan} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Définition

La fonction cotangente, notée cot, est la fonction définie sur

$$A_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin(x) = 0\}$$

par $\cot : A_{\cot} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Soit la droite d'équation $mx + p$, avec $m > 0$; l'angle θ défini par cette droite et l'horizontale vérifie $\tan(\theta) = m$.

Proposition (addition et soustraction)

Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x \pm x') = \cos(x)\cos(x') \mp \sin(x)\sin(x')$, $\sin(x \pm x') = \sin(x)\cos(x') \pm \cos(x)\sin(x')$ et $\tan(x \pm x') = \dfrac{\tan(x) \pm \tan(x')}{1 \mp \tan(x)\tan(x')}$, pour autant que cette expression existe.

Proposition

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\dfrac{1}{\cos^2(x)} - \tan^2(x) = 1$ et $\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \cot^2(x) = 1$, si ces expressions existent.

Proposition

Pour $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$,
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,
- $\tanh(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$ si existe,
- $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$ (Carnot),
- $1 - \cosh(2x) = 2\sin^2(x)$ (Carnot).

Proposition

Pour $x, x' \in \mathbb{R}$,

- $\cos(x+x') + \cos(x-x') = 2\cos(x)\cos(x')$,
- $\sin(x+x') + \sin(x-x') = 2\sin(x)\cos(x')$,
- $\cos(x+x') - \cos(x-x') = -2\sin(x)\sin(x')$,
- $\cos(x) + \cos(x') = 2\cos(\frac{x+x'}{2})\cos(\frac{x-x'}{2})$ (Simpson),
- $\cos(x) - \cos(x') = -2\sin(\frac{x+x'}{2})\sin(\frac{x-x'}{2})$ (Simpson),
- $\sin(x) + \sin(x') = 2\sin(\frac{x+x'}{2})\cos(\frac{x-x'}{2})$ (Simpson),
- $\sin(x) - \sin(x') = 2\sin(\frac{x-x'}{2})\cos(\frac{x+x'}{2})$ (Simpson).

Proposition

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(\cos(x) \pm i\sin(x))^n = \cos(nx) \pm i\sin(nx)$ (Moivre), $\cos^n(x) = 2^{-n}(e^{ix} + e^{-ix})^n$ et $\sin^n(x) = (2i)^{-n}(e^{ix} - e^{-ix})^n$.

$$\text{Rappel : } i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } 4 \\ i & \text{si } k-1 \text{ est multiple de } 4 \\ -1 & \text{si } k-2 \text{ est multiple de } 4 \\ -i & \text{si } k-3 \text{ est multiple de } 4 \end{cases}.$$

Proposition (formules de réduction)

Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(k\frac{\pi}{2} + x) = \Re\Big(i^k\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\Big)$$

et

$$\sin(k\frac{\pi}{2} + x) = \Im\Big(i^k\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\Big).$$

Corollaire (formules des compléments)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

Corollaire (formules des suppléments)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

Corollaire (relations de périodicité)

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(2k\pi + x) = \cos(x)$ et $\sin(2k\pi + x) = \sin(x)$.

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période t ($t > 0$) si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x + kt) = f(x)$.

Théorème

L'ensemble des zéros de sin est $E = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
En particulier, l'ouvert de définition de cot est $\mathbb{R} \setminus E$.

Théorème

L'ensemble des zéros de cos est $E = \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.
En particulier, l'ouvert de définition de tan est $\mathbb{R} \setminus E$.

Proposition

Si $t \in \mathbb{R}$ vérifie $\cos(x+t) = \cos(x)$ (resp. $\sin(x+t) = \sin(x)$) quel que soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $t = 2k\pi$.

Proposition

Si x et t sont deux nombres réels tq

$$\cos(x+t) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+t) = \sin(x),$$

alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $t = 2k\pi$.

Proposition

La fonction tan

- appartient à $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$,
- vérifie $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$ pour tout x appartenant à son domaine,
- vérifie $\tan(0) = 0$ et

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty,$$

- ainsi que $D\tan = \dfrac{1}{\cos^2}$,
- il s'agit d'une fonction impaire, str. croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$,
- concave sur $]-\pi/2, 0[$ et convexe sur $]0, \pi/2[$.

Proposition

La fonction cot appartient à $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$ et vérifie $\cot(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$, pour tout x appartenant à son domaine.

En utilisant les formules, on trouve, sur $[0, \pi]$,

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

On peut également montrer que l'on a $\cos(\pi/5) = \varphi/2$, où $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

Définition

La fonction arc sinus, notée arcsin, est la fonction inverse de la fonction sin restreinte à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

Proposition

La fonction arcsin

- est définie, réelle impaire et str. croissante sur $[-1, 1]$,
- vérifie $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour $x \in [-1, 1]$,
- $\arcsin(-1) = -\pi/2$ et $\arcsin(1) = \pi/2$,
- appartient à $C^0([-1, 1]) \cap C^\infty(]-1, 1[)$ et vérifie $D\arcsin(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$,
- est concave sur $]-1, 0[$ et convexe sur $]0, 1[$.

Puisqu'on a $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, on a introduit la définition suivante :

Définition

La fonction arc cosinus, notée arccos est la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Proposition

La fonction arccos

- est définie, réelle et str. décroissante sur $[-1, 1]$,
- vérifie $\arccos(\cos(x)) = x$ pour $x \in [0, \pi]$ et $\cos(\arccos(x)) = x$ pour $x \in [-1, 1]$,
- $\arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(1) = 0$,
- appartient à $C^0([-1, 1]) \cap C^\infty(]-1, 1[)$ et vérifie $D\arccos(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$,
- est convexe sur $]-1, 0[$ et concave sur $]0, 1[$.

Définition

La fonction arc tangente, notée arctan, est la fonction inverse de la fonction tan restreinte à $]-\pi/2, \pi/2[$.

Proposition

La fonction arctan

- est définie, réelle impaire et str. croissante sur $\mathbb{R}$,
- vérifie $\arctan(\tan(x)) = x$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(\arctan(x)) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$,
- appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ et vérifie $D \arctan(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
- est convexe sur $]-\infty, 0[$ et concave sur $]0, +\infty[$,
- donne lieu aux relations $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = (-\dfrac{\pi}{2})^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}^-$.

Définition

La fonction arc cotangente, notée arccot est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Proposition

La fonction arccot

- est définie, réelle et str. décroissante sur $\mathbb{R}$,
- vérifie $\operatorname{arccot}(\cot(x)) = x$ pour $x \in]0, \pi[$ et $\cot(\operatorname{arccot}(x)) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$,
- appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ et vérifie $D\operatorname{arccot}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$,
- est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$,
- donne lieu aux relations $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot}(x) = \pi^-$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot}(x) = \pi^+$.

À partir du développement en séries de arctan, on peut montrer que l'on a $\frac{\pi}{4} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1}$.

IV. Applications

On a $e^z = e^{\Re z}(\cos(\Im z) + i\sin(\Im z))$, donc $\Re e^z = e^{\Re z}\cos(\Im z)$, $\Im e^z = e^{\Re z}\sin(\Im z)$ et $|e^z| = e^{\Re z}$.

Proposition

Les nombres complexes z et z' sont tq $e^z = e^{z'}$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $z = z' + 2ik\pi$.

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| = 1$, l'équation $e^{i\theta} = z$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Théorème

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Dans cette écriture, on a $\rho = |z|$ et θ est défini à un multiple entier de 2π près par les équations $\cos(\theta) = \Re z/\rho$ et $\sin(\theta) = \Im z/\rho$.

Définition

Le nombre ρ intervenant dans le théorème précédent est appelé le module de z ;
le nombre θ est quant à lui appelé l'argument de z.

L'argument de z n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près.

Le conjugué de $\rho e^{i\theta}$ est $\rho e^{-i\theta}$, le produit de $\rho e^{i\theta}$ et $\rho' e^{i\theta'}$ est $\rho\rho' e^{i\theta+\theta'}$, le quotient de $\rho e^{i\theta}$ par $\rho' e^{i\theta'}$ est $\rho/\rho' e^{i\theta-\theta'}$
et, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, les racines n-ièmes de $\rho e^{i\theta}$ sont les nombres $\rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$, avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Proposition

Si la suite $(x_j)_j$ de $\mathbb{R}$ décroît vers 0 et si $\theta \in \mathbb{R}$ n'est pas un multiple entier de 2π,
alors les suites $\sum_j x_j \cos(j\theta)$, $\sum_j x_j \cos(j\theta)$ et $\sum_j x_j e^{ij\theta}$ convergent et, pour tout $J \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|\sum_{j=J}^{\infty} x_j \left\{ \begin{array}{c} \cos(j\theta) \\ \sin(j\theta) \\ e^{ij\theta} \end{array} \right\}| \leq \frac{x_J}{|\sin(\theta/2)|}.$$

Exercice : étudier la convergence de la série $\sum_j x_j$ dont le terme général est donné par

$$x_j = \frac{(c-2)^j}{2^j c^j \sqrt{2j+1}},$$

pour toutes les valeurs du paramètre complexe c.

Exercice : Montrer que l'on a

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Théorème

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la solution unique $\theta \in [0, 2\pi[$ de l'équation $z/|z| = e^{i\theta}$ est donnée par le fonction $\theta = \arg(z)$ définie comme suit,

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Re z > 0 \text{ et } \Im z = 0 \\ \arctan(\Im z/\Re z) & \text{si } \Re z > 0 \text{ et } \Im z > 0 \\ \pi/2 & \text{si } \Re z = 0 \text{ et } \Im z > 0 \\ \arctan(\Im z/\Re z) + \pi & \text{si } \Re z < 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } \Re z = 0 \text{ et } \Im z < 0 \\ \arctan(\Im z/\Re z) + 2\pi & \text{si } \Re z > 0 \text{ et } \Im z < 0 \end{cases}.$$

De plus, on a $\arg(x+iy) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\})$,

$$D_x \arg(x+iy) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad D_y \arg(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Définition

La fonction arg définie dans le théorème précédent est appelée la fonction argument.

La fonction arg n'admet pas de dérivée complexe.

Proposition

Si x et x' sont 2 nombres réels str. positifs tq $x < x'$, on a

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x'}} < \sqrt{xx'} < \frac{x' - x}{\ln(x') - \ln(x)} < \frac{x + x'}{2} < \sqrt{\frac{x^2 + x'^2}{2}}.$$

Primitivation dans $\mathbb{R}$

I. Généralités

II. Théorie du calcul des primitives

I. Généralités

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions définies sur A ; on écrit $f \approx g$ sur A s'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ tq $f = g + c$ sur A

$f \approx g$ se lit « f est égal à g à une constante additive près ».

Cette notation définit une relation déquivalence sur A.

Proposition

Deux fonctions f, g définies sur A sont tq $f \approx g$ ssi $[f]_a^b = [g]_a^b$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.

Proposition

Si f, g sont 2 fonctions dérivables sur $]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, alors on a $f \approx g$ sur $]\alpha, \beta[$ ssi $Df = Dg$ sur $]\alpha, \beta[$.

Proposition

Si F est une primitive sur A de $f \in C^p(A)$, alors $F \in C^{p+1}(A)$.

La fonction $\chi_{]0,+\infty[}$ n'est pas primitivable sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Si F et F_* sont 2 primitives d'une même fonction f sur $]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, alors on a $F \approx F_*$ sur $]\alpha, \beta[$ et, pour tout $c \in \mathbb{C}$, $F + c$ est une primitive de f sur $]\alpha, \beta[$.

Corollaire

Si f est primitivable sur $]\alpha, \beta[$, il existe une et une seule primitive de f sur $]\alpha, \beta[$ qui en $x_0 \in]\alpha, \beta[$ prend une valeur fixée.

Notation : Si f est primitivable sur A, $\int f(x)\,dx = \int f\,dx$ désigne une primitive quelconque de f sur A.

Proposition

Si f est une fonction réelle et primitivable sur $A \subset \mathbb{R}$, alors il existe une primitive de f qui est une fonction réelle sur A.

Proposition

Si f est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors, pour tout $x_0 \in I$, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Il existe des fonctions non-continue qui sont primitivables.
Par exemple $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dérivable mais pas continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

II. Théorie du calcul des primitives

Proposition

Si f est primitivable sur A, $\int f\,dx$ existe et est une fonction dérivable sur A tq $D\int f\,dx = f(x)$ sur A.

Proposition

Si F est une fonction dérivable sur A, DF est primitivable sur A et F est une primitive de DF sur A.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions primitivables sur A et $c_1, \ldots, c_n$ sont n nombres complexes, alors $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ est primitivable sur A et $\sum_{j=1}^{n} c_j \int f_j\,dx$ est une primitive de $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j$.

Proposition

Une fonction f est primitivable sur $]\alpha, \beta[$ ssi $\bar{f}$ est primitivable sur $]\alpha, \beta[$. On a alors $\int \bar{f}\, dx = \overline{\int f\, dx}$.

Proposition

Une fonction f est primitivable sur $]\alpha, \beta[$ ssi $\Re f$ et $\Im f$ sont primitivables sur $]\alpha, \beta[$. On a alors $\int f\, dx \approx \int \Re f\, dx + i \int \Im f\, dx$.

Proposition (par parties)

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur A et si fDg est primitivable sur A, alors gDf est primitivable sur A et

$$f(x)g(x) - \int f(x)Dg(x)\, dx$$

est une primitive de gDf.

Proposition (substitution)

Si f est une fonction primitivable sur $]\alpha,\beta[$ et si $\varphi :]\alpha',\beta'[\to]\alpha,\beta[$ est une fonction dérivable sur $]\alpha',\beta'[$, alors $(f\circ\varphi)D\varphi$ est une fonction primitivable sur $]\alpha',\beta'[$ tq

$$\int f(\varphi(x'))\,D\varphi(x')\,dx' \approx [\int f(x)\,dx](\varphi(x')).$$

Proposition (changement de variable)

Soit f est une fonction sur $]\alpha,\beta[$; si $\varphi :]\alpha',\beta'[\to]\alpha,\beta[$ est un CVR d'ordre p ($p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ou $p=\infty$) et $(f\circ\varphi)D\varphi$ est primitivable sur $]\alpha',\beta'[$, alors f est primitivable sur $]\alpha,\beta[$ et

$$\int f(x)\,dx \approx [\int f(\varphi(x'))\,D\varphi(x')\,dx'](\varphi^{-1}(x)).$$

$\exp(x)/x$ est continu sur $]0, +\infty[$, mais la primitive de cette fonction ne peut s'obtenir au moyen d'un nombre fini de fonctions élémentaires.

On a $\displaystyle\int x^k \, dx \approx \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Définition

Une fonction exponentielle-polynôme est une fonction qui peut s'écrire sous la forme du produit $x \mapsto e^{z_0 x} P(x)$ d'une exponentielle et d'un polynôme.

- si $z_0 = 0 \to$ OK,
- sinon, si $P = c$, $\int c e^{z_0 x} \, dx \approx c e^{z_0 x} / z_0$,
- sinon, primitivation par parties pour abaisser le degré de P jusque 0.

Exemple : $\int x e^{-x} \, dx \approx -(1+x)e^{-x}$.

• Calcul de $\int P(x, \cos(ax), \sin(ax), \dots, cos(bx), \sin(bx))\, dx$

Formules trigonométriques $\to$ $P(\cdots)$ s'écrit sous la forme d'1 cl de fonctions de la forme $P(x)\cos(kx)$ ou $P(x)\sin(kx)$.

- si $k = 0 \to$ OK,
- sinon, si $P = c \to$ OK,
- sinon, par partie ; pour abaisser successivement le degré de P' jusque 0.

Exemple : $\int \cos^2(x)\, dx \approx \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

• Calcul de $\int P(x, \cosh(ax), \sinh(ax), \dots, cosh(bx), \sinh(bx))\, dx$

Idem...

• Primitivation d'une fraction rationnelle

Une fraction rationnelle $\rightarrow$ cl de monômes et de fractions du type $c/(x-x_0)^k$.

$$\int \frac{dx}{x-a} \approx \ln|x-a| \qquad \text{et} \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^k} \approx \frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ pour tout $k \geq 2$ et

$$\int \frac{dx}{(x-z_0)^k} \approx \frac{1}{1-k}\frac{1}{(x-z_0)^{k-1}}$$

sur $\mathbb{R}$, pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $k \geq 2$.
Enfin, on a

$$\int \frac{dx}{x-z_0} \approx \ln|x-z_0| + i \arctan\left(\frac{x-\Re z_0}{\Im z_0}\right)$$

sur $\mathbb{R}$, pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Si R est une fraction rationnelle dont tous les coefficients sont réels, on peut éviter toute intervention des nombres complexes.
Dans ce cas, $R \to$ cl de monômes, de fractions rationnelles de la forme $n/(x-a)^k$ et de fractions rationnelles de la forme $\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^p}$, avec $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$ tq $b^2 - 4ac < 0$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On a

$$\begin{aligned}
&\int \frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^p}\, dx \\
&\approx \frac{m}{2a} \begin{cases} \frac{1}{1-p}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{p-1}} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln|ax^2+bx+c| & \text{si } p = 1 \end{cases} \\
&+ (n - \frac{bm}{2a}) a^{-p} \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}} (\frac{4a^2}{4ac-b^2})^p [\int \frac{dt}{(t^2+1)^p}](\frac{x+b/2a}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}).
\end{aligned}$$

On a $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+1} \approx \arctan(t)$
et, pour $p > 1$,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^p} \approx \frac{1}{2p-2}\frac{t}{(t^2+1)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2p-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{p-1}}.$$

Exercice : Pour $a > 0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} \approx \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$
sur $]-\infty,-a[$, $]-a,a[$ et $]a,+\infty[$.

• cas où le calcul se ramène au calcul d'une primitive de fraction rationnelle

$\displaystyle\int R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx,$
sur I, avec $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tq $ad \neq bc$ et
$I \subset \{x : (ax+b)/(cx+d) > 0\}$.

Poser $x \mapsto t(x) = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$), où $ax^2 + bx + c$ n'a pas de zéro double.

- si $a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, on travaille soit sur un intervalle inclus dans $]-\infty, x_1[$, soit sur un intervalle inclus dans $]x_2, +\infty[$ ($x_1 < x_2$ sont les zéros).
  Poser $x \mapsto t(x) = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

- si $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, on travaille sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
  Poser $x \mapsto t(x) = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

- si $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, on travaille sur un intervalle inclus dans $]x_1, x_2[$.
  Poser $x \mapsto t(x) = \sqrt{a\frac{x - x_2}{x - x_1}}$.

Exemple : Si $a > 0$, $\int dx/\sqrt{a^2+x^2} \approx \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) \approx \operatorname{arsinh}(x/a)$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Si $a > 0$, $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx \approx \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Si $a > 0$, $\int dx/\sqrt{x^2-a^2} \approx \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) \approx \operatorname{arcosh}(x/a)$ sur $]a,+\infty[$.

Exemple : Si $a > 0$,
$\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx \approx -\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}$ sur $]a,+\infty[$.

Exemple : Si $a > 0$, $\int dx/\sqrt{a^2-x^2} \approx -2\arctan(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}})$ sur $]-a,a[$.

Exemple : Si $a > 0$, $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx \approx \frac{a^2}{2}\arcsin(x/a) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$ sur $]-a,a[$.

$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx$,
avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$. On travaille sur un intervalle inclus dans $\{x : ax+b > 0\} \cap \{x : cx+d > 0\}$.
Poser $x \mapsto t(x) = \sqrt{ax+b}$.

• Calcul de $\displaystyle\int R(\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots)\, dx$

sur $I \subset]-\pi, \pi[$ où l'intégrand est continu.
Formules $\to \int R'\big(\cos(x), \sin(x)\big)\, dx$.

Poser $t(x) = \tan(x/2)$ et utiliser les formules

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{et} \quad Dx(t) = \frac{2}{1+t^2}.$$

Exemple : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)} \approx \ln\big(\tan(\frac{x}{2})\big)$ sur $]0, \pi[$.

Proposition

Une fraction rationnelle $R\big(\cos(x), \sin(x)\big)$ peut s'écrire sous la forme $R'\big(\cos(x)\big)\sin(x)$ ssi on a

$$R\big(\cos(x), \sin(x)\big) = -R\big(\cos(x), -\sin(x)\big).$$

Dans ce cas, utiliser la substitution $t = \cos(x)$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)} \approx \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right| \approx \ln\big(\tan(\frac{x}{2})\big)$ sur $]0, \pi[$.

Proposition

Une fraction rationnelle $R\big(\cos(x), \sin(x)\big)$ peut s'écrire sous la forme $R'\big(\sin(x)\big)\cos(x)$ ssi on a

$$R\big(\cos(x), \sin(x)\big) = -R\big(-\cos(x), \sin(x)\big).$$

Dans ce cas, utiliser la substitution $t = \sin(x)$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)} \approx \frac{1}{2} \ln \Big|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\Big| \approx -\ln\big(\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\big)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Proposition

Une fraction rationnelle $R\big(\cos(x), \sin(x)\big)$ peut s'écrire sous la forme $R'\big(\tan(x)\big)$ ssi on a

$$R\big(\cos(x), \sin(x)\big) = R\big(-\cos(x), -\sin(x)\big).$$

Dans ce cas, utiliser la substitution $t = \tan(x)$.

Exemple : $\displaystyle\int \tan(x)\, dx \approx \frac{1}{2} \ln\left(1 + \tan^2(x)\right) \approx -\ln\big(\cos(x)\big)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan^2(x)} \approx -\cot(x) - x$ sur $]0, \pi/2[$.

• Calcul de $\int R(\cosh(x), \sinh(x), \cosh(2x), \sinh(2x), \ldots)\, dx$

idem...

Poser $t(x) = \tanh(x/2)$ et utiliser les formules

$$\cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \text{et} \quad Dx(t) = \frac{2}{1-t^2}.$$

Proposition

Une fraction rationnelle $R\big(\cosh(x), \sinh(x)\big)$ peut s'écrire sous la forme $R'\big(\cosh(x)\big)\sinh(x)$ ssi on a

$$R\big(\cosh(x), \sinh(x)\big) = -R\big(\cosh(x), -\sinh(x)\big).$$

Dans ce cas, utiliser la substitution $t = \cosh(x)$.

Proposition

Une fraction rationnelle $R\big(\cosh(x), \sinh(x)\big)$ peut s'écrire sous la forme $R'\big(\sinh(x)\big)\cosh(x)$ ssi on a

$$R\big(\cosh(x), \sinh(x)\big) = -R\big(-\cosh(x), \sinh(x)\big).$$

Dans ce cas, utiliser la substitution $t = \sinh(x)$.

Proposition

Une fraction rationnelle $R\big(\cosh(x), \sinh(x)\big)$ peut s'écrire sous la forme $R'\big(\tanh(x)\big)$ ssi on a

$$R\big(\cosh(x), \sinh(x)\big) = R\big(-\cosh(x), -\sinh(x)\big).$$

Dans ce cas, utiliser la substitution $t = \tanh(x)$.

• Passage de $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ à l'une des primitives $\int R'(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\, dx$ ou $\int R'(\cosh(\varphi), \sinh(\varphi))\, dx$

- si $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, poser $x \mapsto t(x) = \dfrac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}(x + \dfrac{b}{2a})$ pour avoir

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \approx$$
$$[\int R(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t,$$
$$\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}\sqrt{t^2+1})\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, dt](\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}).$$

Ensuite, effectuer le CVR $\varphi \mapsto t(\varphi) = \sinh(\varphi)$ entre $\mathbb{R}$ et lui-même.

- si $a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, utiliser le CVR t défini par $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} t(x)$ sur $]-\infty, x_1[$ ou $]x_2, +\infty[$ pour avoir

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \approx$$

$$[\int R(-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} t,$$

$$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}\sqrt{t^2-1})\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\, dt](\pm\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}).$$

Ensuite, effectuer le CVR $\varphi \mapsto t(\varphi) = \cosh(\varphi)$ entre $]1, +\infty[$ et $]0, +\infty[$.

- si $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, utiliser le CVR t défini par $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} t(x)$ sur $]x_1, x_2[$ pour avoir

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \approx$$
$$[\int R(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} t,$$
$$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4|a|}} \sqrt{1-t^2}) \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\, dt](\pm \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}).$$

Ensuite, effectuer le CVR $\varphi \mapsto t(\varphi) = \sin(\varphi)$ entre $]-1, 1[$ et $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exemple : Pour $a > 0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \approx \operatorname{arsinh}(\frac{x}{a})$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Pour $a > 0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \approx \operatorname{arcosh}(\frac{x}{a})$ sur $]a, +\infty[$ (par exemple).

Exemple : Pour $a > 0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \approx \arcsin(\frac{x}{a})$ sur $]-a, a[$.

• Primitivation des fonctions inverses

Si g est une fonction inverse et f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$, pour primitiver fg sur I, on commence par calculer une primitive F de f sur I.

On a alors $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx \approx F(x)g(x) - \int F(x)Dg(x)\,dx$.

Exemple : $\int \ln(x)\,dx \approx x\ln(x) - x$ sur $]0, +\infty[$.

Exemple : $\int \arcsin(x)\,dx \approx x\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$.

Exemple : $\int \operatorname{artanh}(x)\,dx \approx x\operatorname{artanh}(x) - \ln(1-x^2)/2$ sur $]-1, 1[$.

Équations différentielles

I. Opérateurs de dérivation

Définition

Un opérateur de dérivation d'ordre p sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une application définie sur $C^p(I)$ pour un nombre entier strictement positif p, qui à une fonction $f \in C^p(I)$ associe une fonction faisant (éventuellement) intervenir la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre p.

Si F est un opérateur de dérivation d'ordre p sur I et f une fonction de $C^p(I)$, $F(f)$ est une fonction définie sur I.

Notation : On écrit Ff plutôt que $F(f)$.

Exemple :

- D,
- $D + D^2 : I \to \mathbb{C} \quad f \mapsto Df + D^2 f$,
- $D - I : I \to \mathbb{C} \quad f \mapsto Df - f$.

On sait que $(D - I)f = 0$ possède $f = \exp$ comme solution.

Définition

L'opérateur conjugué de F est l'opérateur $\bar{F}$ défini par $\bar{F}f = \overline{F\bar{f}}$, ou de manière équivalente $\bar{F}\bar{f} = \overline{Ff}$.
L'opérateur F est réel si $\bar{F} = F$.

Définition

Étant donné $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n opérateurs de dérivation $F_1, \ldots, F_n$ sur I et n nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$, la cl $\sum_{j=1}^n c_j F_j$ est l'opérateur de dérivation sur I défini par $(\displaystyle\sum_{j=1}^n c_j F_j)f = \sum_{j=1}^n c_j(F_j f)$.

On vérifie de suite que l'on a $\displaystyle\overline{\sum_{j=1}^n c_j F_j} = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j \bar{F}_j$.

Définition

Étant donné $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n opérateurs de dérivation $F_1, \ldots, F_n$ sur I, le produit $F_1 F_2 \ldots F_n$ est l'opérateur de dérivation sur I défini par $(F_1 F_2 \ldots F_n) f = F_1 \Big(F_2 \big(\ldots (F_n f) \big) \Big)$.

En génréral, on n'a pas $F_1 F_2 \neq F_2 F_1$.

On pose $F^1 = F$ et $F^{n+1} = F F^n$. On définit également $F^0 f = f$.

On vérife de suite que l'on a $\overline{F_1 \cdots F_n} = \bar{F}_1 \cdots \bar{F}_n$.

Exercice : Établir que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$(x^2 D - (j-1)x)^k = x^{j+k} D^k \big(x^{k-j} (\cdot) \big).$$

Définition

Un opérateur de dérivation F d'ordre p sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est un opérateur de dérivation linéaire s'il vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, toutes fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de $C^p(I)$ et toutes constantes complexes $c_1, \ldots, c_n$, $F(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j (F f_j)$.

Proposition

Si F est un opérateur de dérivation linéaire réel, on a les identités $\Re(Ff) = F\Re f$ et $\Im(Ff) = F\Im f$.

Définition

Toute combinaison linéaire de dérivées de la forme D^j, avec $0 \leq j \leq p$, est un opérateur de dérivation linéaire d'ordre p sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$. Un tel opérateur est noté explicitement $\sum_{j=0}^{p} c_j D^j$ ($c_p \neq 0$) et est appelé un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants.

Proposition

On a $\overline{\sum_{j=0}^{p} c_j D^j} = \sum_{j=0}^{p} \bar{c}_j D^j$.

Proposition

Les ODLCC commutent.

Définition

À l'ODLCC $\sum_{j=0}^{p} c_j D^j$, on associe son polynôme caractéristique, à savoir le polynôme $\sum_{j=0}^{p} c_j z^j$.

Exemple : Le polynôme caractéristique de $2D + D^2 + D^3$ est $2z + z^2 + z^3$.

Théorème

L'application qui à un ODLCC associe son polynôme caractéristique est un isomorphisme entre l'ensemble des ODLCC et l'ensemble des polynômes.
Plus explicitement, l'application $\varphi : \sum_{j=0}^{p} c_j z^j \mapsto \sum_{j=0}^{p} c_j D^j$ est une bijection entre l'espace des polynômes et l'espace des ODLCC vérifiant les propriétés suivantes : si L_1 et L_2 sont 2 ODLCC, P_1 et P_2 leur polynômes caractéristiques respectifs, alors, pour toutes constantes c_1 et c_2, on a

- $\varphi(c_1 P_1 + c_2 P_2) = c_1 \varphi(P_1) + c_2 \varphi(P_2) = c_1 L_1 + c_2 L_2$,
- $\varphi(P_1 P_2) = \varphi(P_1)\varphi(P_2) = L_1 L_2$.

Corollaire

Toute identité algébrique associée à une cl d'ODLCC est la cl correspondante des polynômes caractéristiques
et le polynôme caracéristique d'un produit fini d'ODLCC est le produit correspondant des polynômes caractéristiques.

Corollaire

Toute identité algébrique entre polynômes qui ne fait intervenir que des cl et des produits finis donne lieu à la même identité entre les ODLCC qu'ils caractérisent.

Exemple : Pour tout $c \in \mathbb{C}$, l'identité $(z-c)(z+c) = z^2 - c^2$ donne lieu à l'identité $(D-c)(D+c) = D^2 - c^2$.

II. Équation différentielles linéaires à coefficients constants

Définition

Étant donné un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$, un ODLCC $L(D)$ d'ordre p sur $]\alpha, \beta[$ et un élément f de $C^0(]\alpha, \beta[$, une solution de l'équation $L(D)u = f$ sur $]\alpha, \beta[$ est un élément u de $C^p(]\alpha, \beta[)$ tq $L(D)u = f$. En particulier, si f est la fonction 0, on dit que le problème est homogène. L'équation $L(D)u = f$ est appelée une équation linéaire homogène à coefficients constants ; si $f = 0$, l'équation est dite homogène.

Objectif : caractériser l'ensemble des solutions de l'EDLCC $L(D)u = f$ sur $]\alpha, \beta[$, c-à-d déterminer l'ensemble $\{u \in C^p(]\alpha, \beta[: L(D)u = f \text{ sur }]\alpha, \beta[\}$.

$L(D)$ linéaire $\rightarrow$ toute cl de solutions de l'EDLCC homogène est encore une solution.

Si $u \in C^\infty(]\alpha, \beta[)$ est solution de l'EDLCC homogène $L(D)u = 0$, $\forall$ ODLCC $L'(D)$ sur $]\alpha, \beta[$, $L'(D)u$ est encore solution de l'équation de départ.

Lemme

Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $u \in C^p(]\alpha, \beta[)$, on a
$L(D)(e^{cx}u(x)) = e^{cx}L(D+c)u(x)$.

Exemple : $Du + cu = 0 \overset{v(x)=e^{cx}u(x)}{\Longleftrightarrow} e^{-cx}Dv = 0$
$\Leftrightarrow v = C \Leftrightarrow u(x) = Ce^{-cx}$.

Exemple : Soit $N(t)$ le nombre de radionucléotides à l'instant t. On suppose que le taux de désintégration est proportionnel au nombre de radionucléotides, i.e. il existe $c > 0$ tq $DN = -cN$.
Il s'agit d'une EDLCC homogène d'ordre 1 $\rightarrow N(t) = Ce^{-ct}$, où C est le nombre de radionucléotides en $t = 0$.
Période de demi-vie : t_* tq la motié des nucléotides est désintégrée
$\rightarrow Ce^{-ct_*} = C/2 \rightarrow t_* = \ln(2)/c$.

Théorème

La solution la plus générale de l'EDLCC homogène $L(D)u = 0$ sur $]\alpha, \beta[$ s'écrit

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} P_{\alpha_j - 1}(x) e^{a_j x}$$

sur $]\alpha, \beta[$, où

- $a_1, \dots, a_m$ sont les zéros distincts du polynôme caractéristique $L(z)$,
- α_j $(1 \leq j \leq m)$ est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,
- $P_{\alpha_j - 1}$ $(1 \leq j \leq m)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\alpha_j - 1$.

Corollaire

Toute solution de l'EDLCC homogène $L(D)u = 0$ sur $]\alpha, \beta[$ appartient à $C^\infty(]\alpha, \beta[)$.

Définition

Une exponentielle-polynôme de la forme $x^l e^{a_j x}$, avec $l \in \{0, \ldots, \alpha_j - 1\}$ et $j \in \{1, \ldots, m\}$ est appelée une solution fondamentale de l'opérateur $L(D)$ sur $]\alpha, \beta[$.

Une solution fondamentale est solution de l'EDLCC homogène $L(D)u = 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

Toute solution de cette équation est cl de ces fonctions.

Il y a p solutions fondamentales et la solution la plus générale dépend de p constantes.

Théorème

Si $L(D)$ est un ODLCC réel et si a_j est un zéro α_j-uple de $L(z)$ n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, alors $\bar{a}_j$ est aussi un zéro de $L(z)$ de même multiplicité et on peut remplacer $P_{\alpha_j - 1}(x) e^{a_j x} + Q_{\alpha_j - 1}(x) e^{\bar{a}_j x}$ par $e^{\Re a_j x}(P'_{\alpha_j - 1}(x) \cos(\Im a_j x) + Q'_{\alpha_j - 1}(x) \sin(\Im a_j x))$ dans l'expression de la solution la plus générale de l'EDLCC $L(D)u = 0$.

Théorème (indépendance linéaire des solutions)

Si on note $u_1, \ldots, u_p$ les solutions fondamentales de l'opérateur $L(D)$, alors, pour tout $x_0 \in]\alpha, \beta[$, et tous $z_0, \ldots, z_{p-1} \in \mathbb{C}$, il existe des nombres complexes uniques $d_1, \ldots, d_p$ tq la solution $u = \sum_{j=1}^{p} d_j u_j$ de l'EDLCC homogène $L(D)u = 0$ sur $]\alpha, \beta[$ vérifie $D^j u(x_0) = z_j$, pour tout $j \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Exemple : Si $a \neq 0$ et b sont des nombres complexes, déterminer la solution la plus générale de l'équation $(aD + b)u = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Si $a \neq 0$, b et c sont des nombres complexes, déterminer la solution la plus générale de l'équation $(aD^2 + bD + c)u = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple : On considère une masse m (ramenée à son centre d'inertie) attachée à un ressort linéaire sans masse et posée sur un plan horizontal. On fait l'hypothèse que les forces de frottement entre le plan et la masse sont nulles.
La position $x = 0$ désigne la position du centre d'inertie de la masse au repos.
Loi de Hooke : $F = -kx$ ($k > 0$).
Seconde loi de Newton : $F = ma$.
$\rightarrow a = -kx/m$
$\rightarrow D^2 x = \dfrac{-k}{m} x = -\omega^2 x$
$\rightarrow x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
$\rightarrow x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ ($C \geq 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$).

Théorème

La solution la plus générale d'une EDLCC non-homogène $L(D)u = f$ sur $]\alpha, \beta[$ est la somme d'une solution particulière de $L(D)u = f$ sur $]\alpha, \beta[$ et de la solution la plus générale de l'EDLCC homogène $L(D)u = 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

Corollaire

Si l'EDLCC non-homogène $L(D)u = f$ d'ordre p sur $]\alpha, \beta[$ admet une solution particulière u_1, si x_0 appartient à $]\alpha, \beta[$ et si $z_0, \dots, z_{p-1}$ sont des nombres complexes, il existe une solution unique de l'EDLCC $L(D)u = f$ sur $]\alpha, \beta[$ telle que $D^j u_2(x_0) = z_j$, pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$.

Si $L(D)=\sum_{j=0}^{p} c_j D^j$ est un ODLCC d'ordre p sur $]\alpha,\beta[$, on met en évidence les p constantes dont dépend la solution la plus générale de l'équations $L(D)u=0$ en écrivant cette solution sous la forme

$$u=\sum_{j=1}^{p} C_j u_j,$$

où $u_1,\dots,u_p$ sont les solutions fondamentales de l'équation homogène.

Pour traiter les solutions de l'EDLCC $L(D)u=f$ sur $]\alpha,\beta[$, on suppose avoir $f\in C^l(]\alpha,\beta[)$.

Théorème (variation des constantes)

Avec les notations qui précèdent, pour tout $x\in]\alpha,\beta[$, le système

$$\left\{\begin{array}{r} \sum_{j=1}^{p} C_j u_j(x)=0\\ \sum_{j=1}^{p} C_j D u_j(x)=0\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{p} C_j D^{p-2} u_j(x)=0\\ \sum_{j=1}^{p} C_j D^{p-1} u_j(x)=f(x)/c_p \end{array}\right.$$

admet une solution unique $C_1(x),\dots,C_p(x)$, où $C_1,\dots,C_p$ sont en fait

Exercice : Résoudre l'équation $Du + u = e^{e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice : Étant donné $\omega \in]0, +\infty[$, résoudre l'équation $(D^2 + \omega^2)u = 1/\cos(\omega x)$ sur $]-\pi/(2\omega), \pi/(2\omega)[$.

Proposition (exponentielles-polynômes)

Si $L(D)$ est un ODLCC d'odre $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sur $]\alpha, \beta[$, si $c \in \mathbb{C}$ et P est un polynôme de degré q, l'équation $L(D)u = e^{cx}P(x)$ sur $]\alpha, \beta[$ admet une solution de la forme $e^{cx}Q(x)x^{\alpha_0}$, où Q est un polynôme de degré q et α_0 est la multiplicité de c comme zéro de $L(z)$.

Proposition

Si l'ODLCC $L(D)$ est d'ordre $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et si f appartient à $C^p(]\alpha, \beta[)$, on a

$$L(D)(e^{cx}f(x)) = e^{cx} \sum_{j=0}^{p} \frac{D^j L(c)}{j!} D^j f(x),$$

pour tout $c \in \mathbb{C}$.

Exercice : Résoudre l'équation $Du + u = \cos$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice : Résoudre l'équation $D^3 u - u = x(e^x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Définition

Une équation d'Euler est une équation différentielle dy type $\sum_{j=0}^{p} c_j (xD)^j u = f$, avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où $c_1, \ldots, c_p$ sont des nombres complexes avec $c_p \neq 0$ et où f appartient à $C^l(]a, \beta[)$ ($l \in \mathbb{N}$), $]a, \beta[$ étant un intervalle inclus dans $]0, +\infty[$.
Les solutions de l'équation d'Euler sont les fonctions $u \in C^p(]a, \beta[)$ qui vérifient cette équation.

Proposition

Toute équation différentielle du type $\sum_{j=0}^{p} d_j x^j D^j u = f$, avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{C}$, $d_p \neq 0$ et où $f \in C^l(]a, \beta[)$ ($l \in \mathbb{N}$), avec $]a, \beta[\subset]0, +\infty[$ est une équation d'Euler et inversement.

Proposition

La solution la plus générale de l'équation d'Euler

$$\sum_{j=0}^{p} c_j (xD)^j u = f,$$

avec $f \in C^l(]a, \beta[)$, s'écrit $u = v \circ \ln$, où v est la solution la plus générale de l'EDLCC

$$\sum_{j=0}^{p} c_j D^j v = g$$

sur $]\ln(a^+), \ln(\beta^-)[$, g étant la fonction de classe C^l sur cet intervalle définie par $g(y) = f(e^y)$.

Exercice : Si $a \neq 0$ et b sont des nombres complexes, déterminer la solution la plus générale de l'équation $axDu + bu = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice : Si $a \neq 0$, b et c sont des nombres complexes, déterminer la solution la plus générale de l'équation $a(xDu)^2 + bxDu + cu = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice : Résoudre l'équation $xDu + u = e^x$ sur $]0, +\infty[$.

Proposition

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_0, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$, avec $c_p \neq 0$ et $f \in C^l(]\alpha, b[)$ ($l \in \mathbb{N}$), où $]\alpha, b[\subset]-\infty, 0[$. La solution la plus générale de l'équation

$$\sum_{j=0}^{p} c_j (xD)^j u = f,$$

sur $]\alpha, b[$, s'écrit $u(x) = v(\ln(-x))$, où v est la solution la plus générale de l'EDLCC

$$\sum_{j=0}^{p} c_j D^j v = g$$

sur $]\ln((-b)^+), \ln((-\alpha)^-[)[$, g étant la fonction de classe C^l sur cet intervalle définie par $g(y) = f(-e^y)$.

III. Équations différentielles ordinaires

Définition

Une équation différentielle à second membre séparé (EDSMS) est une équation différentielle qui s'écrit $Du = f(x)g(u)$.

Théorème

Soit 2 fonctions réelles $f \in C^0(]\alpha_1, \beta_1[)$, $g \in C^0(]\alpha_2, \beta_2[)$ et des points $x_0 \in]\alpha_1, \beta_1[$ et $u_0 \in]\alpha_2, \beta_2[$;

- si $g(u_0) = 0$, la fonction $u = u_0 \chi_{]\alpha_1, \beta_1[}$ appartient à $C^\infty(]\alpha_1, \beta_1[)$, est réelle et vérifie $u(]\alpha_1, \beta_1[) \subset]\alpha_2, \beta_2[$, $u(x_0) = u_0$, $Du(x) = f(x)g(u(x))$ pour tout $x \in]\alpha_1, \beta_1[$,
- si $g(u_0) \neq 0$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq $\alpha_1 \leq a < x_0 < b \leq \beta_1$ et une fonction réelle $u \in C^1(]a, b[)$ unique tq $u(]a, b[) \subset]\alpha_2, \beta_2[$, $u(x_0) = u_0$ et $Du(x) = f(x)g(u(x))$ pour tout $x \in]a, b[$.

La solution la plus générale de l'EDSMS $Du = fg(u)$ sur $]\alpha, \beta[$ s'obtient en résolvant l'équation $\displaystyle\int \frac{du}{g(u)} = \int f(x)\, dx + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, par rapport à u.
Si g s'annule en c, $u = c\chi_{]\alpha,\beta[}$ est une solution, généralement particulière.

Exercice : Trouver, si elles existent, les solutions de l'équation différentielle $Du = -x/u$ qui vérifient $u(1) = 1$.

Soit $Du = f(ax + bu + c)$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$; si $u \in C^1(I)$ vérifie l'équation, alors $v = ax + bu + c$ est tq $a + bDu = Dv$ et vérifie l'EDSMS $Dv = f(v) + a$.

Exercice : Intégrer l'équation différentielle $Du = -\sin^2(x + u)$.

Définition

Une équation différentielle à second membre homogène par rapport à x et u (EDSMH) est une équation différentielle qui s'écrit $Du = f(u/x)$.

Le cas $f(u/x) = u/x$ est connu : équation d'Euler ou EDSMS.

Si on cherche une solution d'une EDSMH sur un intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on peut introduire la fonction auxiliaire $v(x) = u(x)/x$; l'équation de départ devient $Dv = (f(v) - v)/x$, c-à-d une EDSMS.

La méthode s'applique pour les équations du type $Du = \frac{u}{x} + f(x)g(u/x)$: en posant $v = u/x$, cette équation se transforme en l'EDSMS $Dv = g(v)f(x)/x$.

Exercice : Intégrer l'équation différentielle $Du = \frac{u}{x} + \frac{u^2}{x^3}$.

Définition

Une équation différentielle à second membre linéaire en u (EDSML) est une équation différentielle qui s'écrit $Du = a(x)u + b(x)$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, où $a, b \in C^0(I)$ sont réels.

Proposition

La solution la plus générale de l'EDSML $Du = a(x)u + b(x)$ sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ s'écrit

$$u(x) = e^{\int a(x)\,dx}\Big(\int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}dx + C\Big),$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice : Résoudre l'équation différentielle $Du = -\frac{u}{x} + x^2$.

Définition

Une équation différentielle de Bernoulli est une équation de la forme $Du = au + bu^r$, où r est un nombre réel, avec $a, b \in C^0(I)$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si $r = 1$: EDSMS ; si $r = 0$: EDSML en u.

Si $r \neq 0, 1$, en divisant les deux membres par u^r, on obtient

$$Du^{1-r} = (1-r)au^{1-r} + (1-r)b,$$

qui est une EDSML en u^{1-r}.

De plus, si $r > 0$, $u = 0$ est une solution, généralement particulière.

Définition

Une équation différentielle renversée est une équation différentielle qui s'écrit $Du = \dfrac{1}{a(u)x + b(u)}$ ou $Du = \dfrac{1}{a(u)x + b(u)x^r}$, avec $r \in \mathbb{R}$ et où a et b sont continus.

On peut supposer r différent de 0 et 1.

Méthode : prendre x comme inconnue et u comme variable.
Sous certaines conditions, on a $D_x u = 1/D_u x$ et on est ramené à une EDSML en x ou à une équation de Bernoulli.

• Équations différentielles d'ordre deux

Si « u manque » : poser $v = Du$ pour éventuellement obtenir une équation résoluble par une des méthodes précédentes.

C'est le cas pour les équations suivantes :

- $D^2 u = g(x)h(Du)$
- $D^2 u = g(Du/x)$,
- $D^2 u = g(x)Du + h(x)$.

Dans ce cas, la solution v dépend d'un paramètre réel. Reste à résoudre $Du = v$, dont la solution nécessitera la présence d'une seconde constante.

Exercice : Résoudre l'équation différentielle $D^2 u = (Du)^2$.

Exercice : Résoudre l'équation différentielle $D^2 u = \frac{Du}{x} + 1$.

Exercice : Résoudre l'équation différentielle $(1 - x^2)D^2 u = 2 + xDu$.

Pour résoudre les équations différentielles où x manque, on considère une hypothétique fonction v satisfaisant la relation $v \circ u = Du$

Ce qui permet d'écrire

$$D^2 u = D(v \circ u) = [Dv](u)Du = [Dv](u)v(u) = \frac{D_u v^2(u)}{2} = \frac{D_u[(Du)^2]}{2}$$

Exercice : Résoudre l'équation différentielle $D^2 u = \dfrac{1 + (Du)^2}{u}$.

Considérons les équations homogènes en u, Du et D^2u.
On pose $\lambda u = Du$.

Il vient alors

$$D^2u = \lambda Du + uD\lambda = u(\lambda^2 + D\lambda)$$

et on peut simplifier par une puissance de u, ce qui ramène le problème à une équation différentielle du premier ordre en λ.

Exercice : Résoudre l'équation différentielle $uD^2u - (Du)^2 = 6xu^2$.

Compléments sur l'intégrale de Darboux

I. Intégrales de Darboux généralisées

Si $0 < a < b$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a $\displaystyle\int_a^b x^s\,dx = \frac{b^{s+1}}{s+1} - \frac{a^{s+1}}{s+1}$.

En utilisant un argument de continuité, il semble naturel de poser
$$\int_0^b x^s\,dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^b x^s\,dx = \frac{b^{s+1}}{s+1}.$$

De la même manière, on peut poser
$$\int_a^{+\infty} x^s\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b x^s\,dx = -\frac{a^{s+1}}{s+1}.$$

Dans tous les cas, un intégrale du type $\int_0^{+\infty} x^s\,dx$ n'aura jamais de sens.

Lemme

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Définition

Si f est une fonction continue sur $[a, \beta[$, l'intégrale $\int_a^\beta f\,dx$ existe si $\int_a^b f\,dx$ converge vers un nombre fini lorsque b tend vers β, avec $[a, b] \subset [a, \beta[$,

i.e. si $\displaystyle\lim_{b \to \beta^-} \int_a^b f\,dx$ existe et est fini.

Cette limite est naturellement notée $\int_a^\beta f\,dx$.

Définition

Si f est une fonction continue sur $\left\{ \begin{array}{l} [a, \beta[\\ ]\alpha, b] \end{array} \right.$, l'intégrale $\left\{ \begin{array}{l} \int_a^\beta f\,dx \\ \int_\alpha^b f\,dx \end{array} \right.$

b tend vers β

Lemme

Si f est une fonction continue sur $]\alpha, \beta[$ et s'il existe $t \in]\alpha, \beta[$ tq les intégrales $\int_\alpha^t f\, dx$ et $\int_t^\beta f\, dx$ existent,
alors pour tout $t' \in]\alpha, \beta[$, les intégrales $\int_\alpha^{t'} f\, dx$ et $\int_{t'}^\beta f\, dx$ existent également et on a

$$\int_\alpha^t f\, dx + \int_t^\beta f\, dx = \int_\alpha^{t'} f\, dx + \int_{t'}^\beta f\, dx.$$

Définition

Si f est une fonction continue sur $]\alpha, \beta[$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f\, dx$ existe s'il existe $t_0 \in]\alpha, \beta[$ tq $\int_\alpha^{t_0} f\, dx$ et $\int_{t_0}^\beta f\, dx$ existent.
On pose alors $\int_\alpha^\beta f\, dx = \int_\alpha^{t_0} f\, dx + \int_{t_0}^\beta f\, dx$.

Notation : On pose $\int_\beta^\alpha f\,dx = -\int_\alpha^\beta f\,dx$.

Proposition

Soit f une fonction continue sur $]\alpha,\beta[$; s'il existe $t, t' \in]\alpha,\beta[$ tq $\int_\alpha^t f\,dx$ et $\int_{t'}^\beta f\,dx$ existent, alors $\int_\alpha^\beta f\,dx$ existe
et on a $\int_\alpha^\beta f\,dx = \int_\alpha^t f\,dx + \int_t^{t'} f\,dx + \int_{t'}^\beta f\,dx$.

Théorème

Si f est une fonction continue sur $[a, \beta[$, alors l'intégrale $\int_\alpha^\beta f\, dx$ existe ssi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c \in [a, \beta[$ tq $t_1, t_2 \in [c, \beta[$ implique $|\int_{t_1}^{t_2} f\, dx| < \epsilon$.

Idem sur $]\alpha, b]$...

Théorème

L'intégrale d'une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ existe ssi une primitive F de f possède des limites finies en α^+ et β^-.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \lim_{t \to \beta^-} F(t) - \lim_{t \to \alpha^+} F(t)$.

Exemple : $\int_0^{+\infty} e^{-cx}\, dx = 1/c$ pour tout $c > 0$.

Proposition (intégration par substitution)

Soit $\varphi :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et f une fonction continue sur $\varphi(]\alpha,\beta[)$.

L'intégrale $\int_{\varphi(\alpha^+)}^{\varphi(\beta^-)} f\,dx$ existe ssi l'intégrale $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi) D\varphi\,dx$ existe.

Auquel cas, on a $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha^+)}^{\varphi(\beta^-)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \big(f\big(\varphi(x)\big) D\varphi(x)\,dx.$

Proposition (théorème du changement de variable)

Soit φ un CVR entre un intervalle ouvert I et $]\alpha,\beta[= \varphi(I)$, f une fonction constinue sur $]\alpha,\beta[$ et posons

$$\gamma = \lim_{x\to\alpha^+} \varphi^{-1}(x) \qquad \text{et} \qquad \delta = \lim_{x\to\beta^-} \varphi^{-1}(x).$$

L'intégrale $\int_\alpha^\beta f\,dx$ existe ssi $\int_\gamma^\delta (f\circ\varphi) D\varphi\,dx$ existe.

Auquel cas, il vient $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta \big(f\big(\varphi(x)\big) D\varphi(x)\,dx.$

Proposition (intégration par parties)

Si f et g sont de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ et si deux des assertions suivantes sont vérifiées,

- fDg admet une intégrale sur $]\alpha, \beta[$,
- gDf admet une intégrale sur $]\alpha, \beta[$,
- fg admet des limites finies en α^+ et β^-,

alors la troisième assertion est vérifiée et on a

$$\int_\alpha^\beta fDg\, dx = [fg]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta gDf\, dx.$$

Théorème

L'intégrale d'une fonction f continue et positive sur $]\alpha, \beta[$ existe ssi l'ensemble des intégrales de f sur les intervalles compacts de $]\alpha, \beta[$ est majoré.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\,dx = \sup\{\int_a^b f\,dx : [a,b] \subset]\alpha,\beta[\}$.

Définition

Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est (Lebesgue-)intégrable ou absolument intégrable sur $]\alpha, \beta[$ si l'intégrale de $|f|$ existe sur $]\alpha, \beta[$.

Proposition

Toute fonction continue et de module majoré par une fonction absolument intégrable est absolument intégrable.

Théorème

Si la fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est absolument intégrable sur cet intervalle, alors l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ existe et on a

$$|\int_\alpha^\beta f\,dx| \leq \int_\alpha^\beta |f|\,dx.$$

Notation : Si l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ existe, on préfère souvent l'écrire sous la forme $\int_{\rightarrow\alpha}^{\rightarrow\beta} f\,dx$; on parle d'intégrale fléchée.
Si f est absolument intégrable sur $]\alpha, \beta[$, on a $\int_{\rightarrow\alpha}^{\rightarrow\beta} f\,dx = \int_\alpha^\beta f\,dx$.

Proposition

sI f est une fonction continue sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ et s'il existe deux nombres réels $a, b \in]\alpha, \beta[$, $a < b$, tq $f\chi_{]\alpha,a[}$ et $f\chi_{]b,\beta[}$ sont absolument intégrables, alors f est absolument intégrable sur $]\alpha, \beta[$.

Définition

Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est absolument intégrable en α^+ s'il existe $a \in]\alpha, \beta[$ tq f soit intégrable sur $]\alpha, a[$.

idem en β^-...

Lemme

Si r et θ sont deux nombres réels, les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{(x-r)^\theta} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{1}{(r-x)^\theta}$$

sont absolument intégrables respectivement en r^+ et r^- ssi $\theta < 1$.

Lemme

Si Θ sont un nombre réel, les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x^\Theta} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{1}{|x|^\Theta}$$

sont absolument intégrables respectivement en $+\infty$ et $-\infty$ ssi $\Theta > 1$.

Théorème (critères d'intégrabilité)

Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est absolument intégrable en α^+ si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- α est un nombre réel et f admet une limite finie en α^+,
- α est un nombre réel et il existe $\theta < 1$ tq $\lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^\theta |f(x)|$ existe et est fini,
- $\alpha = -\infty$ et il existe $\Theta > 1$ tq $\lim_{x \to -\infty} |x|^\Theta |f(x)|$ existe et est fini.

Théorème (critères d'intégrabilité)

Une fonction f continue sur $]\alpha, \beta[$ est absolument intégrable en β^- si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- β est un nombre réel et f admet une limite finie en β^-,
- β est un nombre réel et il existe $\theta < 1$ tq $\lim_{x \to \beta^-} (\beta - x)^\theta |f(x)|$ existe et est fini,
- $\beta = +\infty$ et il existe $\Theta > 1$ tq $\lim_{x \to +\infty} |x|^\Theta |f(x)|$ existe et est fini.

Exemple : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ n'est pas absolument intégrable en $+\infty$.

Théorème

Une fonction f continue sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ n'est pas absolument intégrable en α^+ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- α est un nombre réel et $\lim_{x\to\alpha^+}(x-\alpha)f(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir l'infini),
- $\alpha = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}|x|f(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir l'infini),

Théorème

Une fonction f continue sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ n'est pas absolument intégrable en β^- si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- β est un nombre réel et $\lim_{x\to\beta^-}(\beta-x)f(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir l'infini),
- $\beta = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}xf(x)$ existe et diffère de 0 (mais peut valoir l'infini),

Exemples :

- La fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$ est absolument intégrable sur $]0, +\infty[$,
- La fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ est absolument intégrable sur $]0, +\infty[$,

Exercice : montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}}$ est absolument intégrable sur $[1, +\infty[$ et que son intégrale vaut $\ln(\sqrt{2}+1)$.

La continuité est une hypothès importantes
(cf. $1/x^2$ sur $]-1, 1[$).

Proposition

Soit φ un CVR entre un intervalle ouvert I de la droite et $]\alpha,\beta[=\varphi(I)$, f une fonction continue sur $]\alpha,\beta[$ et posons

$$\gamma = \lim_{x\to\alpha^+} \varphi^{-1}(x) \qquad \text{et} \qquad \delta = \lim_{x\to\beta^-} \varphi^{-1}(x)$$

La fonction f est absolument intégrable sur $]\alpha,\beta[$ ssi $f\circ\varphi\, D\varphi$ est absolument intégrable sur l'intervalle d'extrémités γ et δ.

Auquel cas, il vient $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f\big(\varphi(x)\big)\,D\varphi(x)\,dx$.

Exercice : Étant donné deux nombres réels a et b, $a<b$, calculer, si possible, $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-a)}}$.

Exercice : Établir que pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}\ln(ab)$.

Exercice : Établir que pour tout $a>0$, la fonction $]0,+\infty[\to\mathbb{R} \quad x\mapsto \ln(1+\frac{a^2}{x^2})$ est absolument intégrable sur $]0,+\infty[$ et calculer son intégrale.

Théorème

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[n, +\infty$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tq $|f|$ décroît vers 0, alors la série $\sum_{j=n}^{\infty} f(j)$ est absolument convergente ssi f est absolument intégrable en $+\infty$.

Exemple : Si $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $|z_0| < 1$, la série géométrique $\sum_j z_0^j$ converge absolument.

Exemple : Pour $\alpha > 0$, la série de Riemann $\sum_j j^{-\alpha}$ converge absolument ssi $\alpha > 1$.

Exercice : Établir que la série de Bertrand $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j \ln^m(j)}$ diverge si $m = 1$ et converge si $m = 2$.

II. Intégrales et limites

Théorème (convergence majorée, Lebesgue)

Si $(f_j)_j$ est une suite de fonctions mesurables sur un intervalle I qui converge (presque partout) vers f et s'il existe une fonction g absolument intégrable sur I t.q. $|f_j| \leq g$ (presque partout) pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors f est absolument intégrable et la suite $\int_I |f - f_j| \, dx$ tend vers zéro. En particulier, on a

$$\lim_j \int_I f_j \, dx = \int_I f \, dx.$$

Théorème (convergence monotone, Levi)

Soit $(f_j)_j$ une suite de fonctions réelles (presque partout), absolument intégrables sur un intervalle I et croissante, i.e. qui vérifie $f_j \leq f_{j+1}$ (presque partout). Si la suite $(\int_I f_j \, dx)_j$ est majorée, alors la suite $(f_j)_j$ converge (presque partout) vers une fonction f intégrable sur I et la suite $\int_I |f - f_j| \, dx$ tend vers zéro. En particulier, on a

$$\lim_j \int_I f_j \, dx = \int_I f \, dx.$$

Exercice : Montrer que l'on a $\lim_{j \to +\infty} \int_1^{+\infty} j \, e^{-x^j} \, dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}/x \, dx$.

Théorème (interprétation de Cauchy-Riemann de l'intégrale)

Soit f une fonction continue et absolument intégrable sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ et, pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $(I_k^{(j)})_1^{n(j)}$ un découpage de I (avec $n(j) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) tel que $|I_k^{(j)}| < \epsilon_j$ pour tout k, où $(\epsilon_j)_j$ est une suite qui converge vers 0. Enfin, pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout kn soit $x_k^{(j)}$ un point de $\overline{I}_k^{(j)} \cap I$. On a

$$\int_I f\,dx = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{n(j)} f(x_k^{(j)})|I_k^{(j)}|.$$

Exercice : Calculer $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{j!/j^j}$.

Théorème (dérivation des intégrales paramétriques)

Si, pour tout nombre λ appartenant à un intervalle Λ de $\mathbb{R}$, f_λ est une fonction constinue sur $]\alpha, \beta[$ pour laquelle

- f_λ est absolument intégrable sur $]\alpha, \beta[$, pour tout $\lambda \in \Lambda$,
- pour (presque) tout $x \in]\alpha, \beta[$, la fonction $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$ appartient à $C^1(\Lambda)$,
- pour tout compact K de Λ, il existe une fonction g absolument intégrable sur $]\alpha, \beta[$ t.q.

  $$|D_\lambda f_\lambda(x)| \leq g(x),$$

  pour tout $\lambda \in K$ et (presque) tout $x \in]\alpha, \beta[$,

alors $\lambda \mapsto \int_\alpha^\beta f_\lambda \, dx$ est de classe C^1 sur Λ et on a

$$D_\lambda \int_\alpha^\beta f_\lambda \, dx = \int_\alpha^\beta D_\lambda f_\lambda \, dx.$$

Exercice : Établir que si a et b sont deux nombres strictement positifs, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \ln(b/a)$.

Théorème (intégrale d'Euler-Poisson)

Pour tout $a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Exercice : Établir que pour tous nombres réels a et b avec $a > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

L'intégrale de Dirichlet est l'intégrale

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

La fonction sinc : $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sin(x)/x$ peut être continûment prolongée sur $\mathbb{R}$ en posant $\operatorname{sinc}(0) = 1$.

Cette fonction est donc intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x_j = \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t + j\pi)|}{t + j\pi}\, dx \\ &\geq \frac{1}{(j+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin\, dx = \frac{2}{(j+1)\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},$$

pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ce qui montre que la fonction sinc n'est pas absolument intégrable.

Soit maintenant $b > 0$; on a

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \Big[\frac{1-\cos(x)}{x}\Big]_0^b + \int_0^b \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1-cos(b)}{b} + \int_0^b \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx,$$

ce qui prouve que l'intégrale de la fonction sinc existe sur $]0,+\infty[$, avec

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \big(\frac{\sin(t)}{t}\big)^2 dt.$$

Posons $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x} \sin(x)/x$, pour $\lambda > 0$.

Cette fonction est absolument intégrable en $+\infty$. Par le théorème de dérivation des intégrales paramétriques

$$D \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin(x)\, dx = -\Im \int_0^{+\infty} e^{(-\lambda+i)x}\, dx$$

$$= -\Im \Big[\frac{1}{i-\lambda} e^{(-\lambda+i)x}\Big]_0^{+\infty} = \Im \frac{1}{i-\lambda} = \frac{-1}{\lambda^2+1}.$$

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = -\arctan(\lambda) + C$, pour une constante réelle C.

Posons $g(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$, pour $\lambda > 0$.

Si $(\lambda_j)_j$ est une suite qui converge vers $+\infty$, posons $f_j(x) = e^{-\lambda_j x} \frac{\sin(x)}{x}$. On a $\|f_j\|_{[a,b]} \to 0$ pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et donc, par le théorème de la convergence majorée,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = 0 = \lim_{\lambda \to +\infty} -\arctan(\lambda) + C,$$

ce qui implique $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda)$.

On ne peut pas en déduire que $g(0) = \pi/2$, car g n'est défini que pour $\lambda > 0$.

Montrons que g peut être continûment prolongé en 0.
Soit $G(x) = \displaystyle\int_x^{\to +\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ et considérons

$$\int_0^{\to +\infty} f_\lambda - f_0 \, dx = \int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}(e^{-\lambda x} - 1)\, dx$$

$$= \int_0^{\to +\infty} -DG(x)(e^{-\lambda x} - 1)\, dx$$

$$= -[G(x)(e^{-\lambda x} - 1)]_0^{+\infty} - \int_0^{\to +\infty} G(x)\lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

On a $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$ et donc

$$\int_0^{\to +\infty} f_\lambda - f_0 \, dx = -\int_0^{\to +\infty} G(x) \lambda e^{-\lambda x} \, dx = -\int_0^{\to +\infty} G(\frac{t}{\lambda}) e^{-t} \, dt.$$

Posons $h_\lambda(x) = \begin{cases} G(x/\lambda) e^{-x} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$.
$\lambda \mapsto h_\lambda(x)$ est continu sur $]0, +\infty[$ pour tout $x \geq 0$; $\lambda \mapsto h_\lambda(x)$ est également continu à l'origine, car $\lim_{t \to +\infty} G(t) = 0$.

Pour tout $\lambda \geq 0$, h_λ est absolument intégrable sur $]0, +\infty[$ et le théorème de la convergence majorée donne

$$\lim_{\lambda \to 0^+} |g(\lambda) - \int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx| = \lim_{\lambda \to 0^+} | \int_0^{+\infty} h_\lambda(x) \, dx|$$

$$= | \int_0^{+\infty} \lim_{\lambda \to 0^+} h_\lambda(x) \, dx| = 0.$$

On final, on a obtenu

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{\lambda \to 0^+} g(\lambda) = \frac{\pi}{2}.$$