1 Algèbres, σ-algèbres et classes de Dynkin

Exercice 1.1. Soit X un ensemble. Déterminer si les systèmes suivants sont des algèbres ou des σ-algèbres :

(i) $\mathscr{A} := \{A \subseteq X \,|\, A \text{ est fini}\}$;

(ii) $\mathscr{B} := \{A \subseteq X \,|\, A \text{ est fini ou } A^c \text{ est fini}\}$;

(iii) $\mathscr{C} := \{A \subseteq X \,|\, A \text{ est dénombrable}\}$;

(iv) $\mathscr{D} := \{A \subseteq X \,|\, A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$;

(v) si $X = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{E} := \{A \in \mathbb{B}^d \,|\, A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$;

(vi) si $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} := \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ est un intervalle ou } A^c \text{ est un intervalle}\}$.

Exercice 1.2. Soit X un ensemble.

(i) Si $A_1, \ldots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des parties deux à deux disjointes de X. Décrire la σ-algèbre engendrée par ce système. Quel est son cardinal ?

(ii) Si $B_1, \ldots, B_n \subseteq X$, on pose, pour tout $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$,

$$A_J = \bigcap_{j \in J} B_j \cap \bigcap_{j \notin J} B_j^c.$$

Montrer que les A_J sont deux à deux disjoints et qu'ils engendrent la même σ-algèbre que $B_1, \ldots, B_n$.

(iii) En utilisant le point (i), décrire la σ-algèbre sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\{[0,2],[1,3]\}$.

Exercice 1.3. Soit X un ensemble. Décrire la σ-algèbre engendrée par

(i) les singletons de X ;

(ii) les paires d'éléments distincts de X ;

(iii) les parties finies de X.

Exercice 1.4. Soit $\mathscr{E} \subseteq \wp(X)$, montrer que

$$\sigma(\mathscr{E}) = \bigcup_{\substack{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E} \\ \mathscr{F} \text{ dénombrable}}} \sigma(\mathscr{F}).$$

Exercice 1.5. Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, μ et ν deux mesures de probabilité distinctes sur $(X, \mathscr{A})$. Montrer que $\mathscr{L} := \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$ est un λ-système mais, en général, pas une σ-algèbre.

Exercice 1.6. Soit $(X, \mathscr{B}(X,d), \mu)$ un espace mesuré. Montrer que la famille des ensembles dont la frontière est de mesure μ nulle est une algèbre mais pas nécessairement une σ-algèbre.

Exercice 1.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\omega_f(x) = \inf_{\eta>0} \sup_{\substack{t\in]x-\eta,x+\eta[\\ s\in]x-\eta,x+\eta[}} |f(t) - f(s)|.$$

(i) Montrer que f est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\omega_f(x) = 0$.

(ii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) < \varepsilon\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

(iii) En déduire que l'ensemble des points où f est continue est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercices proposés

Exercice 1.8. (Sous-σ-algèbre) Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable et A un sous-ensemble non vide de X. Démontrer que

$$\mathscr{A}_{|A} := \{A \cap B | B \in \mathscr{A}\}$$

est une σ-algèbre sur A.

Exercice 1.9.

(i) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'union de deux σ-algèbres n'est en général pas une σ-algèbre.

(ii) Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux σ-algèbres sur X. Démontrer que l'on a

$$\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \sigma(\{A \cup B | A \in \mathscr{A} \text{ et } B \in \mathscr{B}\}) = \sigma(\{A \cap B | A \in \mathscr{A} \text{ et } B \in \mathscr{B}\}).$$

Exercice 1.10.

(i) Soient X un espace, $(Y, \mathscr{B})$ un espace mesurable et $f : X \to Y$ une fonction, l'ensemble $\mathscr{A} := \{f^{-1}(B) | B \in \mathscr{B}\}$ est-il une σ-algèbre sur X ?

(ii) Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, Y un espace et $f : X \to Y$ une fonction, l'ensemble $\mathscr{B} := \{f(A) | A \in \mathscr{A}\}$ est-il une σ-algèbre sur Y ? Qu'en est-il si f est surjectif ?

Exercice 1.11. Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, μ et ν deux mesures de probabilité distinctes sur $(X, \mathscr{A})$. Montrer que si A est fixé dans $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}_A := \{B \in \mathscr{A} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)\}$ est un λ-système mais, en général, pas une σ-algèbre.

Exercice 1.12. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et $\mathscr{B}$ une algèbre telle que $\sigma(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $A \in \mathscr{A}$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.
Suggestion : montrer que $\mathscr{C} = \{A \in \mathscr{A} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in \mathscr{B} \text{ t.q. } \mu(A\Delta B) < \varepsilon\}$ *est une* σ*-algèbre.*

Exercice 1.13.

(i) Montrer que $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^* : |x - n| < 1/n\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \;\&\; x \notin \mathbb{Q}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.