2 Mesures

Exercice 2.1. **(Mesure de Dirac)** Soient $(X,\mathscr{A})$ un espace mesurable et $x_0 \in X$.

(i) Démontrer que la loi

$$\delta_{x_0} \,:\, \mathscr{A} \to \{0,1\} \,:\, A \mapsto \chi_A(x_0)$$

est une mesure sur $(X,\mathscr{A})$.

(ii) Démontrer que si μ est une mesure sur $(X,\mathscr{A})$ telle que $\mu(A)=0$ pour tout $A \in \mathscr{A}$ vérifiant $x_0 \notin A$, alors μ est un multiple (dans $[0,+\infty]$) de δ_{x_0}.

Exercice 2.2. On considère l'application μ définie sur $\wp(\mathbb{N}^*)$ par

$$\mu(A) := \sum_{j\in A} \frac{1}{j^2}.$$

S'agit-il d'une mesure sur $\wp(\mathbb{N}^*)$ (la somme sur un ensemble vide étant nulle par convention) ?

Exercice 2.3. Montrer qu'une mesure finiment additive est une mesure si et seulement si elle est continue à gauche.

Exercice 2.4.

(i) Soit $(X,\mathscr{A})$ un espace mesurable et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de mesures[1]. Démontrer que $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty] : A \mapsto \lim_{j\to+\infty} \mu_j(A)$ définit une mesure sur $(X,\mathscr{A})$.

(ii) Soit $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite arbitraire de mesures sur $(X,\mathscr{A})$. Déterminer si l'application $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty] : A \mapsto \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(A)$ définit une mesure sur $(X,\mathscr{A})$.

(iii) Sur l'espace mesurable $(\mathbb{N},\wp(\mathbb{N}))$, on définit pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\nu_j(A) = \#(A \cap [j,+\infty[)$. Montrer que $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de mesures sur $(\mathbb{N},\wp(\mathbb{N}))$.

(iv) Soit $\nu : \wp(\mathbb{N}) \to [0,+\infty] : A \mapsto \inf_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(A)$. S'agit-il d'une mesure sur $(\mathbb{N},\wp(\mathbb{N}))$? Pour répondre à cette question, déterminer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On demande de caractériser complètement ν.

Exercice 2.5. Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré fini.

(i) Montrer que si $A,B \in \mathscr{A}$ et $\mu(A\Delta B)=0$ alors $\mu(A)=\mu(B)$.

(ii) On définit sur $\mathscr{A}$ la relation

$$A \sim B \Leftrightarrow \mu(A\Delta B) = 0,$$

montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{A}$.

1. C'est-à-dire que pour tout $A \in \mathscr{A}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu_j(A) \le \mu_{j+1}(A)$.

(iii) On définit l'application

$$d : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to [0,+\infty[: (A,B) \mapsto d(A,B) = \mu(A\Delta B),$$

montrer que d permet de définir une distance sur $\mathscr{A}/\sim$.

Exercice 2.6. Montrer qu'il n'existe pas de mesure μ non nulle et finie sur $(\mathbb{Z}, \wp(\mathbb{Z}))$ qui soit invariante par translation, i.e. satisfaisant $\mu(m+A) = \mu(m)$ pour tous $m \in \mathbb{Z}$ et $A \in \wp(\mathbb{Z})$.

Exercice 2.7. Est-il correct d'affirmer qu'il existe des ouverts denses dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue non nulle aussi petite ou aussi grande que l'on veut ? Pourquoi ?

Exercice 2.8. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0,1]$, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Exercices proposés

Exercice 2.9. (Probabilité de Laplace) Soit X un ensemble fini non vide. Démontrer que la loi

$$\mu : \wp(X) \to [0,+\infty[: A \mapsto \frac{\#A}{\#X}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \wp(X))$.

Exercice 2.10. On dit que $\mathscr{F} \subseteq \wp(X)$ est un σ-idéal si
- $\emptyset \in \mathscr{F}$,
- $A \in \mathscr{F}$ et $B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathscr{F}$,
- $\mathscr{F}$ est stable par union dénombrable.

(i) Donner un exemple de σ-idéal.

(ii) Montrer que

$$\sigma(\mathscr{F}) = \{A \in \wp(X) : A \in \mathscr{F} \text{ ou } A^c \in \mathscr{F}\}$$

(iii) Si $X \notin \mathscr{F}$, montrer que l'application μ définie par

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \in \mathscr{F} \\ 1 & \text{si } A^c \in \mathscr{F} \end{cases}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \sigma(\mathscr{F}))$.

Exercice 2.11. Montrer qu'une mesure finie et finiment additive est une mesure si et seulement si elle est continue à droite.

Exercice 2.12. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathscr{B}$ une algèbre telle que $\sigma(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$. Montrer que si μ est une mesure σ-finie sur $\mathscr{B}$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $A \in \mathscr{A}$ de mesure finie, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $\mu(A\Delta B) < \varepsilon$.
Suggestion : considérer les mesures $\mu_j : \mathscr{A} \to [0,\infty] : A \mapsto \mu(A \cap X_j)$ et utiliser l'exercice 1.12 de la liste 1.

Exercice 2.13. * **(Théorème de Ulam)** Démontrer que toute mesure finie borélienne sur un espace métrique compact est régulière.
Suggestion : Montrer que

$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{B}(X) : \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \textit{ compact } K \subseteq A\} \textit{ et } \mu(A) = \inf\{\mu(\Omega) : \Omega \textit{ ouvert } A \subseteq \Omega\}\}$$

est une σ-algèbre qui contient les fermés de X et donc $\mathscr{B}(X)$.

Exercice 2.14. * Nous considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ et le système

$$\mathscr{A} := \{A \in \wp(\mathbb{R}^2) : A \,\text{ou}\, A^c \,\text{est inclus dans une union dénombrable de droites}\}.$$

(i) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \mathscr{A})$ est un espace mesurable.

(ii) Soit $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ défini par

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, A \,\text{est inclus dans une union dénombrable de droites,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application μ est-elle une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^2, \mathscr{A})$?

Suggestion : Pour le point (ii), montrer que

$$\mathscr{F} := \{A \in \wp(\mathbb{R}^2) : A \textit{ est inclus dans une union dénombrable de droites}\}$$

est un σ-idéal ne contenant pas $\mathbb{R}^2$ afin d'appliquer l'exercice 2.8. et utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ est un espace de Baire.