4 Fonctions mesurables et intégrables

Exercice 4.1. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$, montrer qu'une application $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement il existe D dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\{x \in A : f(x) < y\} \in \mathscr{A}$ pour tout $y \in D$.

Exercice 4.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

(i) si f est dérivable, est-ce que Df est mesurable ?

(ii) si $f = g \circ g$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction g est-elle mesurable ?

Exercice 4.3. Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$. Si $|f|$ est mesurable, est-ce que f l'est ?

Exercice 4.4. Soit $f : (X, \mathscr{A}) \to (X, \mathscr{A})$ une application bijective et mesurable, est-ce que f^{-1} est mesurable ?

Exercice 4.5. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints. On considère une suite numérique $(c_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$. Démontrer que

(i) $f := \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \chi_{A_j}$ est définie partout sur X.

(ii) f est intégrable si et seulement la série $\sum_{j=1}^{+\infty} |c_j| \mu(A_j)$ converge, auquel cas on a

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \mu(A_j) \quad \text{et} \quad \int |f| \, d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} |c_j| \mu(A_j).$$

(iii) Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \wp(\mathbb{N}^*), \mu)$, où μ est la mesure de comptage [1]. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est μ-intégrable si et seulement si la série $\sum_{j=1}^{+\infty} |f(j)|$ converge dans $\mathbb{R}$ et que, dans ce cas, on a

$$\int_{\mathbb{N}^*} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} f(j).$$

Exercice 4.6. On considère sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ les mesures

$$\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{j!} \delta_j \quad \text{et} \quad \nu = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{j} \delta_j.$$

(i) Si $y > 0$, calculer $\int y^x \, d\mu$.

(ii) Calculer $\int_{\mathbb{R}_0} \frac{1}{x} \, d\nu$.

1. C'est-à-dire que pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = \#A$.

Exercice 4.7. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Considérons une mesure μ sur l'espace mesurable $(X, \mathscr{B}(X))$. On définit le *support* (ou *spectre*) de μ par

$$\operatorname{supp}(\mu) := \{x \in X : \forall\, V \text{ voisinage ouvert de } x,\ \mu(V) > 0\}.$$

1. Démontrer que
   (i) tout ouvert non vide est de mesure μ strictement positive si et seulement si $\operatorname{supp}(\mu) = X$,
   (ii) le support de μ est un fermé de X,
   (iii) si X est un espace métrique séparable et si $A \in \mathscr{B}(X)$ vérifie $A \subseteq X \setminus \operatorname{supp}(\mu)$, alors $\mu(A) = 0$,
   (iv) si X est un espace métrique séparable, pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ μ-intégrable, on a
   $$\int f\, d\mu = \int_{\operatorname{supp}(\mu)} f\, d\mu,$$
2. Déterminer le support de la mesure de Lebesgue et de la mesure de Dirac.
3. Déterminer si la réciproque du point 1.(iii) est correcte ou non. Justifier.
4. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui sont δ_{x_0}-intégrables ($x_0 \in \mathbb{R}$) ainsi que les valeurs des intégrales.

Exercice 4.8. Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. On considère l'application

$$\mu(A) = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j \chi_A(j).$$

Calculer, si possible, $\mu([0,2])$, $\mu(\{2\})$, $\mu(]-\infty, 0])$, $\mu(\mathbb{N})$ et $\mu(\mathbb{R})$. L'application μ est-elle une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$? Calculer, si cela a un sens,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, d\mu.$$

Exercices proposés

Exercice 4.9. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient f et g deux éléments de $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. Démontrer que les applications $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ appartiennent encore à $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$.

Suggestion : Pour les trois exercices suivants, vérifier que c'est vrai pour les fonctions caractéristiques, puis les fonctions simples positives, puis les fonctions positives, puis les fonctions réelles et enfin les fonctions complexes.

Exercice 4.10. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ et $\rho = \mu + \nu$. Montrer qu'une application $\mathscr{A}$-mesurable f est ρ-intégrable si et seulement si elle est μ-intégrable et ν-intégrable et que, dans ce cas,

$$\int f\, d\rho = \int f\, d\mu + \int f\, d\nu.$$

Exercice 4.11. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ un espace mesuré et $T : X \to Y$ une application mesurable. Montrer que T préserve la mesure si et seulement si pour tout f dont l'intégrale existe, $\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\nu$.

Exercice 4.12. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathscr{A}$-mesurable. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a $\int_A f \, d\mu = 0$.