7 Calcul d'aires et de volumes

Exercice 7.1. Si $a > 0$, calculer l'aire de la surface plane délimitée par la cardioïde de représentation paramétrique

$$\gamma(u) = a(2\cos(u) - \cos(2u), 2\sin(u) - \sin(2u)), \quad u \in [0, 2\pi].$$

Exercice 7.2. Calculer l'aire de la portion de sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, intérieure au cylindre d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avec $a > b > 0$).

Exercice 7.3. Étant donné $R > 0$, calculer le volume de la surface cylindrique

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq z \leq R \text{ et } x^2 - Rx + y^2 = 0\}.$$

Exercice 7.4. Soient $a, b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipsoïde de révolution obtenue par la rotation de l'ellipse

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

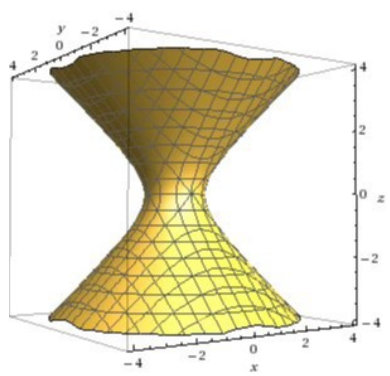
autour de l'axe des x.

Exercices proposés

Exercice 7.5. Calculer l'aire et le volume du corps délimité par l'hyperboloïde à une nappe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

et les plans $z = 0$ et $z = H$ (avec $a, b, H > 0$).



Suggestions : Pour l'aire, une couverture (φ, K) de la surface latérale du corps est donnée par $K = [0, 2\pi] \times [0, H]$ et

$$\varphi \,:\, K \to \mathbb{R}^3 \,:\, (\theta, z) \mapsto \left(\frac{a\sqrt{b^2 + z^2}}{b}\cos(\theta), \frac{a\sqrt{b^2 + z^2}}{b}\sin(\theta), z\right).$$

Pour le volume, un paramétrage du corps est donné sur $[0,1]\times K$ *par*

$$\psi : [0,1]\times K : (r,\theta,z) \mapsto (r\frac{a\sqrt{b^2+z^2}}{b}\cos(\theta), r\frac{a\sqrt{b^2+z^2}}{b}\sin(\theta), z).$$

Exercice 7.6. Montrer que le volume du corps Ω délimité par le plan $z=0$, le cylindre $x^2+y^2=1$ et la paraboloïde $z=x^2+2y^2$ est donné par $3\frac{\pi}{4}$.
Suggestion : utiliser les coordonnées cylindriques.

Exercice 7.7. Montrer que le volume du corps délimité par les deux cylindres d'équations $x^2+y^2=a^2$ et $y^2+z^2=a^2$ (avec $a>0$) est donné par $\frac{16}{3}a^3$.
Suggestion : le corps admet la représentation paramétrique

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in[-a,a] \text{ et } x,y\in[-\sqrt{a^2-z^2},\sqrt{a^2-z^2}]\}.$$

Exercice 7.8. Étant donné un cylindre doit à base circulaire de diamètre $R>0$ et de hauteur $H>2R$ et une sphère de rayon R dont le centre est sur le cylindre, à mi-hauteur, montrer que le volume de la portion commune au cylindre et à la sphère est donné par $\frac{4R^3}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$.
Suggestion : utiliser les coordonnées cylindriques.

Exercice 7.9. Montrer que le volume du corps intérieur à la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ et extérieur au cône $z^2=x^2+y^2$ est donné par $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.
Suggestion : par symétrie du problème, il suffit de calculer le volume du corps situé au-dessus du plan $z=0$, *le volume total sera alors le double de celui-ci. Le demi-corps peut être décrit par*

$$\{(r,\theta,z) : 0\le z\le\frac{\sqrt{2}}{2}a, z\le r\le\sqrt{a^2-z^2} \text{ et } 0\le\theta<2\pi\}.$$

Exercice 7.10.

(a) On considère un bol en forme de demi-sphère (de $\mathbb{R}^3$) de rayon R partiellement rempli d'eau jusqu'à une hauteur $h<R$. Montrer que le volume d'eau dans le bol en fonction de la hauteur h est donné par $\pi h^2(R-\frac{h}{3})$.

(b) Montrer que ce même volume est donné par $\pi R^2(h-\frac{h^2}{H}+\frac{h^3}{3H^2})$ si le bol est maintenant un cône droit de base circulaire de rayon R et hauteur H.

Suggestion : (a) le corps considéré peut être décrit par

$$\{(r,\theta,z) : \theta\in[0,2\pi[, z\in[0,h] \text{ et } r\in[0,\sqrt{R^2-(R-z)^2}]\}.$$

(b) le corps considéré peut être décrit par

$$\{(r,\theta,z) : \theta\in[0,2\pi[, z\in[0,h] \text{ et } r\in[0,R-\frac{R}{H}z]\}.$$