Examen de Calcul Intégral

Août 2021

Exercice 1. Soient X un espace et $\mathcal{C}$ un π-système sur X qui contient X. Soit également V un espace vectoriel réel de fonctions réelles définies sur X tel que

- pour tout $A \in \mathcal{C}$, $\chi_A \in V$,
- pour toute suite croissante $(f_j)_j$ de fonctions positives de V qui converge vers une fonction f, $f \in V$.

Montrer que $\mathcal{D} := \{A \in \wp(X) : \chi_A \in V\}$ est une classe de Dynkin et en déduire que l'ensemble des fonctions $\sigma(\mathcal{C})$-mesurables est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 2. Soit X un espace et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\sigma(f)$ la plus petite σ-algèbre pour laquelle f est $\mathcal{B}$-mesurable.

1. Décrire $\sigma(f)$.
2. Montrer qu'une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ est $\sigma(f)$-mesurable si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$-mesurable telle que $g = \varphi \circ f$.

Exercice 3. Calculer, si possible, la limite

$$\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[j]{1+x^j}}.$$

Exercice 4. On définit sur la sigma-algèbre $\mathcal{A}$ des ensembles Lebesgue-mesurables l'application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty] : A \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} \chi_A(2j+1).$$

Vérifier que $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et calculer, si cela a un sens,

$$\iint_{[0,+\infty[^2} ye^{-xy}\, d(\mu(x) \times \mathcal{L}(y)).$$

Exercice 5. Calculer, si cela a un sens, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x} e^{-y\sqrt{x^2+1}}\, dx \right) dy.$$

Exercice 6. Si $R > 0$, calculer le volume du cylindre oblique obtenu en reliant les disques de rayon R et de centres $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$ et situés, respectivement, dans le plan $z = 0$ et $z = 1$.