5 Théorèmes concernant la limite

Exercice 5.1. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$f_j(x) = \frac{j\sqrt{x}}{1+j^2x^2} \quad \text{et} \quad g_j(x) = \frac{j^{\frac{3}{2}} x \sin(x)}{1+j^2x^2}$$

sont intégrables sur $]0,1[$ et telles que

$$\lim_{j\to+\infty} \int f_j(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{j\to+\infty} \int g_j(x)\,dx = 0.$$

Exercice 5.2. Si cela a un sens, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_0^j x^n (1-j^{-1}x)^j\,dx.$$

Exercice 5.3. Calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{1+x^j}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^1 \frac{j}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{j}\right)dx.$

(iii) $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^1 \frac{je^{-x}}{jx+1}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-j\sin^2(x)}\,dx$, où f est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$.

(v) $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_j(x)\,dx$, où, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, f_j est la fonction définie par

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus[0,2j], \\ \frac{x}{j^2} & \text{si } x \in [0,j], \\ -\frac{x}{j^2}+\frac{2}{j} & \text{si } x \in]j,2j]. \end{cases}$$

(vi) $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{j}{jk^2+k+1}.$

Exercice 5.4. Si f est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \int_0^1 t^{jk} f(t)\,dt.$

(ii) $\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^1 t^j (1+\frac{t}{k})^k f(t)\,dt.$

(iii) $\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{2j+1}(2j+1)!} \int_0^1 t^{2j+1} f(t)\,dt\ .$

Exercice 5.5. Soient $a, b > 0$, calculer, si possible,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx.$$

Exercice 5.6. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2+1}.$$

Exercice 5.7. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction μ-intégrable.

(i) Montrer que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ \neq}} \int \frac{|1+tf|-1}{t}\,d\mu = \int \mathfrak{Re} f\,d\mu.$$

(ii) Si de plus μ est une mesure de probabilité, démontrer l'assertion suivante :

$$\int |1+zf|\,d\mu \geq 1\ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow \int f\,d\mu = 0.$$

Exercice 5.8. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathscr{A}$ de mesure finie. Montrer que si $(f_j)_j$ est une suite de fonctions mesurables qui converge uniformément vers une fonction f sur A, alors

$$\lim_{j\to+\infty} \int_A |f_j - f|\,d\mu = 0.$$

Ce résultat est-il toujours vrai si $\mu(A) = \infty$?

Exercice 5.9. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient également $(f_j)_j$, $(g_j)_j$ et $(h_j)_j$ trois suites d'applications $\mathscr{A}$-mesurables telles que

— $g_j \leq f_j \leq h_j$ pour tout j,
— $f = \lim_j f_j$, $g = \lim_j g_j$ et $h = \lim_j h_j$,
— g et h sont μ-intégrables,
— $\lim_j \int g_j\,d\mu = \int g\,d\mu$ et $\lim_j \int h_j\,d\mu = \int h\,d\mu$.

Montrer que f est μ-intégrable et que

$$\lim_j \int f_j\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Exercices proposés

Exercice 5.10. Montrer que :

(i) $\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(jx)}{(jx+1)(x^2+1)}\,dx = 0.$

(ii) $\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^j + e^x} = 1 - e^{-1}$.

(iii) $\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{j\ln(1+\frac{x}{j})}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}$.

(iv) $\lim_{j\to+\infty} \int_0^{j} \left(1 - \frac{x}{j}\right)^j dx = 1$.

(v) $\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(jx) e^{-x^j}\, dx = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, où f est une fonction bornée et dont la limite en $+\infty$ existe.

(vi) $\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^j)^{\frac{1}{j}}} = \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2})$.

Exercice 5.11. Si f est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, montrer que :

(i) $\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l \binom{k+1}{l} \int_0^1 t^{l+j} f(t)\, dt = 0$.

(ii) $\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{k^{2j+1}(2j+1)!} \int_0^1 t^{2j+1} f(t)\, dt = 0$.

(iii) $\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{k^{nj}} \int_0^1 t^{nj} f(t)\, dt = \int_0^1 f(t) dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(iv) $\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{k^j j!} \int_0^1 t^j f(t)\, dt = \int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 5.12. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable. Montrer l'assertion suivante :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \forall\, A \in \mathscr{A},\, \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Suggestion : Procéder par l'absurde ; supposer f à valeurs positives ; considérer la suite $(\delta_j)_j = (2^{-j})_j$ pour construire une suite d'ensembles $(A_j)_j$ vérifiant certaines conditions ; poser $B_j = \cup_{k\geq j} A_k$ puis $B = \cap_j B_j$; utiliser l'exercice 4.12 de la liste 4 et enfin obtenir une contradiction grâce au TCD.