6 Intégration sur une partie de $\mathbb{R}^d$

Exercice 6.1. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$. Représenter E puis calculer, si possible, l'intégrale

$$\iint_E \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

Exercice 6.2. Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\right\}$. Représenter E puis calculer, si possible, l'intégrale

$$\iint_E (x+y)\,dxdy.$$

Exercice 6.3. Calculer, si possible, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{2x}^{+\infty} x\,e^{-y} \frac{\sin(y)}{y^2}\,dy \right) dx.$$

Exercice 6.4. Si $a, p > 0$, calculer, si possible, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-px} \int_0^a \frac{e^{-xy}}{\sqrt{a^2-y^2}} dy \right) dx.$$

Exercice 6.5. Calculer, si possible, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin^2(x)e^{-x}\,dx$ en considérant la fonction $e^{-x}\sin(2xy)$ sur $]0,+\infty[\times[0,1]$.

Exercice 6.6. Calculer, si possible, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ en considérant la fonction $\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

Exercice 6.7. Calculer, si possible, pour tout $a, b > -1$,

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln(x)}\,dx.$$

Exercice 6.8.

(i) Etablir que

$$\begin{cases} x &= u(1-v) \\ y &= uv(1-w) \\ z &= uvw \end{cases}$$

est un changement de variable d'ordre infini entre l'ouvert

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$$

et un ouvert Ω' à déterminer.

(ii) Déterminer l'image du tétraèdre A de sommets $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ lors de ce changement de variable.

(iii) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\iiint_A x \, dxdydz.$$

Exercice 6.9. Calculer, si possible, l'intégrale

$$\iint_E x^4 - y^4 \, dxdy,$$

où $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 < xy < 2, 1 < x^2 - y^2 < 2\}$.

Exercice 6.10. Soit $a > 0$. En supposant que la fonction f est intégrable sur l'ensemble d'intégration considéré, permuter l'ordre d'intégration de l'intégrale

$$\int_0^a \left(\int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax}} f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Exercices proposés

Exercice 6.11. Montrer que :

(i) $\displaystyle\iint_E x^2 y e^{xy} \, dxdy = 2$, où $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 2\}$,

(ii) $\displaystyle\iint_E x^2 y \, dxdy = 0$, où $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 1,\ x - y \le 1,\ x \ge 0\}$,

(iii) $\displaystyle\iint_E \frac{e^{-x}}{\sqrt{xy}} \, dxdy = 2$, où $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0 \text{ et } x \ge y\}$,

(iv) $\displaystyle\iint_E \frac{\sqrt{y}}{x^2 y^2 + 1} \, dxdy = 2\pi\sqrt{a}$, où $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le a\}$ $(a > 0)$.

Exercice 6.12. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x} \int_0^3 \frac{e^{xy}}{\sqrt{3^2 - y^2}} \, dydx = \frac{1}{2} \arctan 2.$$

Exercice 6.13. Soit erfc la *fonction d'erreur complémentaire* définie par

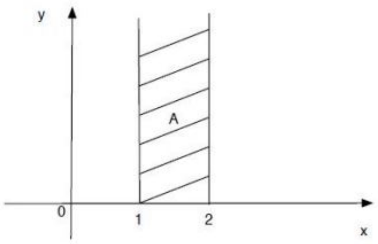
$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-y^2} \, dy.$$

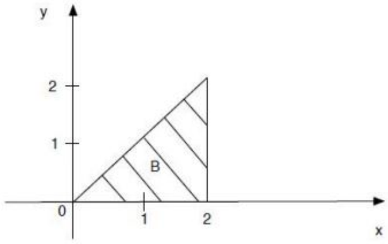
Montrer que cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 6.14. Si $R > 0$, calculer, si possible,

$$\int_0^{\frac{R}{2}} \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{R^2 - y^2}} x^2 y^2 \, dxdy.$$





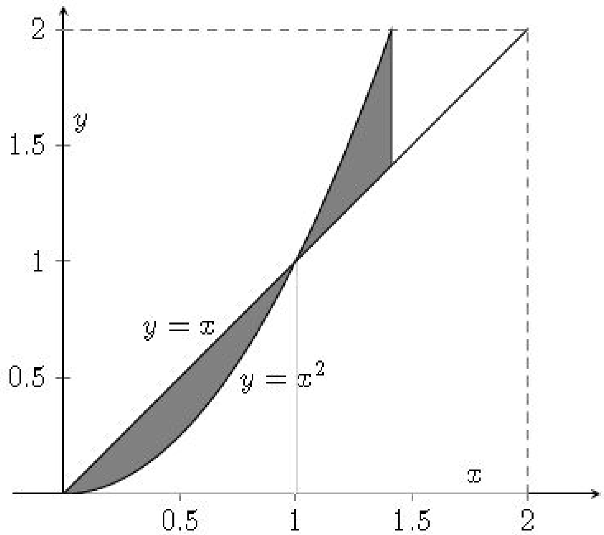
Exercice 6.15. Soient les ensembles A et B représentés ci-dessous. Calculer, si possible, les intégrales

$$\iint_A e^{-xy}\,dxdy \quad \text{et} \quad \iint_B x^2 e^{-xy}\,dxdy.$$

Exercice 6.16. Calculer, si possible, l'intégrale de la fonction f donnée explicitement par

$$f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sur l'ensemble représenté en gris sur la figure.



Exercice 6.17. Soit $R > 0$ et soit l'ensemble

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Calculer, si possible, l'intégrale

$$\iiint_E e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz.$$

Exercice 6.18. Montrer que

(i) $\displaystyle\iint_E \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \frac{R^3}{3}$, où

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}, R > 0,$$

(ii) $\iint_E xy^2\,dxdy = \frac{\pi}{4}$, où

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \le 0\},$$

(iii) $\iiint_E y\cos(\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz = \frac{12-3\pi^2}{\pi^3}$, où

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |(x,y,z)| \le 1 \text{ et } y \ge 0\},$$

(iv) $\iiint_E \sqrt{\frac{z}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz = 4\frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$, où

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 \text{ et } x^2+y^2 \le 1\},$$

(v) $\iint_E (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dxdy = \frac{\cosh(1)-1}{2}$, où

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0 \text{ et } x+y \le 1\}.$$

Suggestions : (i,ii) Coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$, (iii) Coordonnées polaires de $\mathbb{R}^3$, (iv) Coordonnées cylindriques, (v) Changement de variable $(u,v) = (x+y, x-y)$.

Exercice 6.19. En utilisant un changement de variable approprié, calculer l'intégrale

$$\iint_E x^3 + y^3\,dxdy$$

où on a

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x^2 \le y \le 2x^2, \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}\right\}.$$

Suggestions : Utiliser $\varphi : E \to [1,2]^2 : (x,y) \mapsto (y/x^2, xy)$.

Exercice 6.20.

(i) Établir que

$$\begin{cases} x &= r\cos(w) \\ y &= r^2\cos(w)\sin(w) \end{cases}$$

est un changement de variable d'ordre infini entre l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ et un ouvert Ω' à déterminer.

(ii) Montrer que

$$\iint_\Omega e^{-(x^4+y^2)/x^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Exercice 6.21. Soit $a > 0$ et $b \in]0; \frac{\pi}{2}[$. En supposant que la fonction f est intégrable sur l'ensemble d'intégration considéré, permuter l'ordre d'intégration de l'intégrale

$$\int_0^{a\cos(b)} \left(\int_{x\tan(b)}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$