Théorie de la mesure

S. Nicolay

Année académique 2024–2025

Table des matières

In	Introduction					
1	Mesures					
	1.1	Sigma-algèbres	1			
		Définitions et premières propriétés	1			
		Ensembles boréliens	3			
		Classes de Dynkin	6			
	1.2	Mesures	8			
		Définitions et propriétés de base	8			
		Mesures σ -finies et unicité	11			
		Ensembles négligeables et complétion de mesures	12			
		Mesures finiment additives	14			
	1.3	Mesures extérieures	15			
	1.0	Mesures extérieures et ensembles mesurables	15			
		Mesures extérieures métriques	$\frac{10}{20}$			
	1.4		$\frac{20}{22}$			
	1.4	La mesure de Lebesgue	$\frac{22}{22}$			
		Définition	29			
		Propriétés de la mesure de Lebesgue				
		Existence d'ensembles non-mesurables	35			
		Mesure de Lebesgue et complétude	43			
		La mesure de Lebesgue-Stieltjes	43			
2	Inté	grales	47			
	2.1	Applications mesurables	47			
		Applications à valeurs dans la droite complétée	47			
		L'équation fonctionnelle de Cauchy	51			
		Ensemble de Cantor et mesure de Lebesgue	53			
		Définition générale de la mesurabilité pour les applications	58			
		Image d'une mesure par une application	61			
	2.2	Propriétés vérifiées presque partout	61			
	2.3	Intégration	63			
		Intégrale de fonctions simples	63			
		Intégrale de fonctions à valeurs dans $[0, \infty]$	65			
		Définition générale de l'intégrale	66			
		Quelques propriétés de l'intégrale	68			
		Intégrale de fonctions à valeurs complexes	69			
		L'intégrale pour les mesures extérieures	70			
		2 mostrae pour les mesures exterioures	. 0			

	2.4	Théorèmes concernant la limite et applications						73	
		Théorèmes concernant la limite						73	
		Théorème de dérivation des intégrales paramétriques						77	
		Image d'une mesure par une application mesurable et intégration						78	
		Densités						78	
		Interprétation de Riemann de l'intégrale						80	
	2.5	L'intégrale de Riemann						81	
		Définition de l'intégrale de Riemann						81	
		L'intégrale de Darboux						82	
		Comparaison entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue						85	
3	Produit de mesures 89								
	3.1	Construction						89	
		Produit de σ -algèbres						89	
		Mesure produit						92	
	3.2	Intégrales itérées						94	
		Théorèmes de Fubini et Tonelli						94	
	3.3	Mesures extérieures produit						96	
4		apléments sur l'intégrale de Lebesgue						101	
	4.1	Théorème du changement de variables dans \mathbb{R}^d						101	
	4.2	Inégalité isodiamétrique						106	
		Inégalité isodiamétrique via la symétrisation de Steiner						106	
		Inégalité isodiamétrique via l'inégalité de Brunn-Minkowski						110	
	4.3	L'intégrale de Lebesgue en pratique						114	
		Rappels de quelques résultats théoriques						114	
		Matrices jacobiennes, jacobiens et changement de variable						116	
		Exemples basiques de calcul de mesure						117	
		Permutation de l'ordre d'intégration						119	
		Exemples de changement de variable						122	
	4.4	Longueur d'une courbe						126	
		Chemins et courbes						126	
		Chemin rectifiable						127	
		Courbes simples et de Jordan						131	
	4.5	Aire et volume						134	
		Couvertures et surfaces de \mathbb{R}^3						134	
		Aire d'une surface						135	
		Exemples de calcul d'aire						138	
		Volume d'un corps						141	
5	Con	vergence						145	
J	5.1	Notions de convergence						145	
	$5.1 \\ 5.2$	Les espaces \mathcal{L}^p et L^p						148	
	$\frac{5.2}{5.3}$	Propriétés des espaces \mathcal{L}^p et L^p						140 154	
	5.4	Espaces duaux						157	
	5.5	Applications						158	

6	Que	elques notions supplémentaires concernant les mesures	165
	6.1	Concernant les mesures extérieures et intérieures	165
		Mesures extérieures construites à partir de mesures	165
		Mesures extérieures régulières	167
		Mesures extérieures de Radon	170
		Mesures intérieures	173
		Mesure intérieure construite à partir d'une mesure extérieure	178
		La mesure intérieure de Lebesgue	182
	6.2	La mesure de Hausdorff	185
		Définition	185
		Premières propriétés	189
		Relation avec la mesure de Lebesgue	191
		Dimension de Hausdorff	194
7	Déc	omposition de mesures	199
	7.1	Mesures signées	199
	7.2	Mesures complexes	203
	7.3	Mesures absolument continues	207
	7.4	Singularités	212
	7.5	Mesures à variation finie	214
	7.6	Les espaces duaux des espaces L^p	218
	7.7	Autre définition de la notion de mesure	221
8	Моя	sures sur un espace localement compact	223
0	8.1	Mesures régulières	223
	0.1	Mesures régulières et propriétés dans l'espace euclidien	$\frac{223}{223}$
		Propriétés dans les espaces de Hausdorff	$\frac{223}{224}$
	8.2	Théorème de représentation de Riesz	224
	0.2	Démonstration du théorème	226
		Définition de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ à partir de la mesure de	220
		Riemann	229
	8.3	Régularité des mesures boréliennes signées finies et complexes	230
	0.0	Dualité	230
		Densité er régularité	234
	8.4	Complément sur les mesures régulières	236
	0.1	Mesurabilité et continuité	236
		Semi-continuité inférieure	238
	8.5	Dual de L^1	240
	0.0	Préliminaires	240
		Application à la dualité	240 242
		Le point de vue de Bourbaki	243
	8.6	Produit d'espaces localement compacts	$\frac{243}{244}$
	0.0	Mesure produit	244
		Intégration	244
		11100g1@01011	∠±0

9	Déri	vation	251
	9.1	Dérivation de mesures	251
		Dérivée de mesure et dérivée de Radon-Nikodym	251
		Points de densité et théorème de densité de Lebesgue	255
	9.2	Dérivation de fonctions	256
		Relations entre dérivée d'une fonction et dérivée d'une mesure	256
		Un critère d'absolue continuité	259
10	Mes	ure de Haar	263
	10.1	Groupes topologiques	263
	10.2	Existence et unicité de la mesure de Haar	274
	10.3	Propriétés de la mesure de Haar	284
\mathbf{A}	Quel	ques rappels	295
	A.1	Concernant l'analyse	295
		Limites supérieures et inférieures	295
		Semi-continuité	295
		Différentielles	296
	A.2	Concernant la topologie	296
		Généralités	296
		Espace normaux	299
		Espaces localement compacts	303
		Espaces dénombrablement compacts	305
	A.3	Concernant certains espaces fonctionnels	306
	A.4	Concernant l'algèbre	307
		La droite complétée	307
		Concernant l'algèbre linéaire	307
Bi	hlingr	anhie	311

Introduction

J'ai commencé à rédiger ces notes pour le cours de *Théorie de la mesure* que j'ai enseigné pour la première fois durant l'année acdémique 2011–2012, cela fait donc maintenant plus de dix ans. Déjà à l'époque, ces notes débordaient assez largement de la matière vue au cours. J'ai toujours eu pour objectif de donner la possibilité aux étudiants qui le désirent d'en apprendre d'avantage.

Maintenant, la théorie de la mesure est abordée dans trois cours, dont deux sont professés en master. Pourtant, même avec toutes ces heures d'enseignement réparties en ces trois cours, je n'aurai pas le temps d'aborder tous les sujets contenus dans les notes. Il faut dire que je les ai constamment modifiées durant ces années, notamment en y ajoutant de nouveaux concepts et résultats. Mon dernier ajout concerne les mesures de Haar. À mon avis, il manque à ces notes les bases concernant les espaces polonais.

Comme le lecteur l'aura compris, certaines parties de ces notes ont été scrutées par les yeux de nombreux liseurs. Ces dernières ne devraient par conséquent comporter qu'un nombre limité de coquilles. À l'inverse, certains passages n'ont que sommairement été relus. Je dois donc par avance m'excuser des fautes de frappes et autres coquilles qui ne manqueront pas de jalonner ces notes dont certains passages sont de première jeunesse.

La structure de ce cours est proche de celle adoptée dans [10], avec des compléments empruntés à [20] et [35] entre autres. J'ai aussi mis à profit les cours précédemment enseignés dans cette Université, en m'inspirant des idées présentées dans [22] et [33].

viii INTRODUCTION

Chapitre 1

Mesures

Les notions de longueur dans l'espace euclidien \mathbb{R} , d'aire dans l'espace \mathbb{R}^2 et de volume dans l'espace \mathbb{R}^3 peuvent être développées à partir de principes géométriques intuitifs. A priori, l'application « volume », par exemple, devrait être une application Vol définie sur $\wp(\mathbb{R}^3)$ à valeur dans $[0,\infty]$ jouissant des propriétés suivantes,

1. si $(X_k)_{k=1}^N$ est une suite finie d'ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\operatorname{Vol}(\bigcup_{k=1}^{N} X_k) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Vol}(X_k),$$

- 2. si X et X' sont isométriques, alors Vol(X) = Vol(X'),
- 3. si X désigne le cube de côté de longueur 1, alors Vol(X) = 1.

Ces trois conditions sont cependant inconsistantes (en dimension $d \ge 3$), comme l'ont montré Banach et Tarski 1 [2, 32]. Ce problème persiste (quel que soit la dimension d) si la condition 1 d'additivité finie est remplacée par la condition d'additivité dénombrable. Nous verrons qu'il est en fait possible de définir une telle application en restreignant le domaine de définition, de manière à ne pas prendre en compte les ensembles posant problème.

1.1 Sigma-algèbres

Les mesures seront définies sur les σ -algèbres.

Définitions et premières propriétés

Soit X un ensemble arbitraire. Rappelons qu'une collection $\mathscr A$ de sous-ensembles de X est une algèbre sur X si

- $-X \in \mathcal{A}$,
- si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$,
- pour chaque suite finie A_1, A_2, \dots, A_n $(n \in \mathbb{N})$ d'ensembles de \mathscr{A} , on a $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathscr{A}$.

^{1.} Le Paradoxe de Banach-Tarski (version forte) s'énonce comme suit : deux ensembles de \mathbb{R}^3 bornés et d'intérieurs non-vides sont equidécomposables. Ce théorème repose sur l'axiome du choix. Cependant, il existe des résultats « peu naturels » ne reposant pas sur cet axiome ; citons par exemple le Paradoxe de Dougherty-Foreman [11].

Ainsi, \mathscr{A} est stable pour le passage au complémentaire et l'union finie. Bien sûr, puisque $\bigcap_{k=1}^n A_k = (\bigcup_{k=1}^n A_k^c)^c$, \mathscr{A} est aussi stable pour l'intersection finie. Remarquons aussi que $\mathscr{A} \in \mathscr{A}$.

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble arbitraire. Une collection $\mathscr A$ de sous-ensembles de X est une σ -algèbre sur X si

- $-X \in \mathcal{A}$
- si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$,
- si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles de \mathscr{A} , alors $\cup_k A_k \in \mathscr{A}$.

Remarquons que si une σ -algèbre contient au moins un élément, A, alors elle contient $X = A \cup A^c$. On peut donc remplacer, dans la définition, la condition $X \in \mathscr{A}$ par \mathscr{A} non-vide.

La différence entre algèbre et σ -algèbre est soulignée par le résultat suivant (donnant un critère pour vérifier si une algèbre est une σ -algèbre). Rappelons qu'une suite $(A_k)_k$ d'ensemble est croissante si $A_k \subset A_{k+1}$ et décroissante si $A_k \supset A_{k+1}$ pour tout k.

Proposition 1.1.2. Soit X un ensemble quelconque et $\mathscr A$ une algèbre sur X; $\mathscr A$ est une σ -algèbre sur X si une des deux conditions est vérifiée.

- \mathscr{A} est stable pour l'union de suites d'ensembles croissants,
- A est stable pour l'intersection de suites d'ensembles décroissants.

Démonstration. Supposons que la première condition est vérifiée. Soit $(A_k)_k$ une suite d'ensembles de \mathscr{A} et soit $S_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$. Les ensembles S_k appartiennent à \mathscr{A} et la suite $(S_k)_k$ est croissante. De là, $\bigcup_k S_k \in \mathscr{A}$. Puisque $\bigcup_k A_k = \bigcup_k S_k$, \mathscr{A} est une σ -algèbre.

Montrons maintenant que si la seconde condition est vérifiée, la première l'est aussi. Si $(A_k)_k$ est une suite croissante de \mathscr{A} , $(A_k^c)_k$ est une suite décroissante de \mathscr{A} . La seconde condition implique que $\cap_k A_k^c$ appartient à \mathscr{A} et donc que $\cup_k A_k = (\cap_k A_k^c)^c$ appartient à \mathscr{A} , ce qui termine la preuve.

Donnons quelques exemples.

Exemples 1.1.3. Soit X un ensemble,

- $\wp(X)$ est une σ -algèbre,
- $\{\emptyset, X\}$ est une σ -algèbre,
- si $A \subset X$, $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ est une σ -algèbre,
- si X est infini, la collection des sous-ensembles finis de X n'est pas une algèbre,
- si X est infini, la collections des sous-ensembles A de X tels que soit A, soit A^c est fini est une algèbre mais pas une σ -algèbre,
- si X n'est pas dénombrable, la collection de tous les sous-ensembles dénombrables de X n'est pas une algèbre,
- la collection de tous les sous-ensembles de X tels que soit A, soit A^c est dénombrable est une σ -algèbre,
- la collection de tous les sous-ensembles de \mathbb{R} qui peuvent s'écrire comme une union finie d'intervalles de la forme $]a,b],]a,\infty[$ ou $]-\infty,b]$ $(a,b\in\mathbb{R})$ est une algèbre sur \mathbb{R} , mais pas une σ -algèbre, puisqu'elle ne contient pas les ensembles du type [a,b] $(a,b\in\mathbb{R})$, qui peuvent s'écrire comme une union d'éléments de la collection.

Le résultat suivant permet de construire des σ -algèbres.

Proposition 1.1.4. Soit X un ensemble quelconque. L'intersection d'une collection nonvide de σ -algèbres sur X est une σ -algèbre sur X.

Démonstration. Soit \mathscr{C} une collection non-vide de σ -algèbres sur X et \mathscr{A} l'intersection des éléments de \mathscr{C} . L'ensemble X appartient à tous les éléments de \mathscr{C} et donc à \mathscr{A} . Si $A \in \mathscr{A}$, A appartient à tous les éléments de \mathscr{C} , qui contiennent aussi A^c . Ainsi, $A^c \in \mathscr{A}$. Enfin, si $(A_k)_k$ est une suite appartenant à \mathscr{A} , elle appartient à tous les éléments de \mathscr{C} ; il en va donc de même pour $\cup_k A_k$, ce qui implique $\cup_k A_k \in \mathscr{A}$.

Remarquons que l'union d'une famille de σ -algèbres n'est pas nécessairement une σ -algèbre.

Corollaire 1.1.5. Soit X un ensemble quelconque et $\mathscr{F} \subset \wp(X)$ une famille de sousensembles de X. Il existe une plus petite σ -algèbre sur X qui contient \mathscr{F} : c'est l'intersection de toutes les σ -algèbres contenant \mathscr{F} .

Démonstration. Soit \mathscr{C} la collection de toutes les σ -algèbres sur X contenant \mathscr{F} . Cette collection n'est pas vide, puisque $\wp(X)$ est un élément de \mathscr{C} . Suivant la Proposition 1.1.4, l'intersection \mathscr{A} de tous les éléments de \mathscr{C} est une σ -algèbre sur X incluant \mathscr{F} . Qui plus est, \mathscr{A} est inclus dans toutes les σ -algèbre sur X contenant \mathscr{F} .

Définition 1.1.6. Soit X un ensemble quelconque et $\mathscr{F} \subset \wp(X)$ une famille de sousensembles de X. La plus petite σ -algèbre contenant \mathscr{F} est appelée la σ -algèbre engendrée par \mathscr{F} et est notée $\sigma(\mathscr{F})$.

Exemples 1.1.7. Soit X un ensemble non vide et A une partie de X. Si A est vide ou l'ensemble X tout entier, alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$. Dans les autres cas, on a $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

Ensembles boréliens

Les σ -algèbres de Borel sont de première importance; elles contiennent la plupart des ensembles d'un intérêt pratique.

Définition 1.1.8. Soit (X,Ω) un espace topologique; la σ -algèbre de Borel $\mathcal{B}(X,\Omega)$ de l'espace (X,Ω) (notée simplement $\mathcal{B}(X)$ lorsque la topologie est implicite) est définie comme suit,

$$\mathscr{B}(X,\Omega) = \sigma(\{A \in \Omega\}) = \sigma(\{A \subset X : A \text{ ouvert}\}).$$

Un ensemble de $B\in \mathscr{B}(X)$ est appelé un ensemble borélien. Si X est l'espace \mathbb{R}^d muni de la distance euclidienne, on note 2

$$\mathbb{B}^d = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$$

et $\mathbb{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.1.9. Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(X)$ est tel que tout ouvert de X est union dénombrable d'éléments de \mathscr{C} , alors $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(X)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'inclusion suivante, $\mathscr{B}(X) \subset \sigma(\mathscr{C})$. Par définition d'une sigma algèbre, $\sigma(\mathscr{C})$ contient les ouverts de X. Puisque $\mathscr{B}(X)$ est la plus petite σ -algèbre jouissant de cette propriété, l'inclusion est vérifiée.

^{2.} Cette notation, qui peut paraître abusive, sera justifiée dans la suite (Corollaire 3.1.7).

Proposition 1.1.10. Si (X, d) est un espace métrique séparable,

$$\mathscr{B}(X,d) = \sigma(\{B(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}),$$

où $B(x,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ε de X.

 $D\acute{e}monstration$. En vertu de la Proposition 1.1.8, il suffit de démontrer que tout ouvert U de X peut s'écrire comme une union dénombrable de boules. Soit $D \subset X$ un ensemble dénombrable tel que $X \subset \bar{D}$ et posons

$$C = \{(x, \varepsilon) \in D \times (\mathbb{Q} \cap]0, \infty[)\}.$$

On a

$$U = \bigcup_{\substack{(x,\varepsilon) \in C \\ B(x,\varepsilon) \subset U}} B(x,\varepsilon).$$

En effet, soit $a \in U$; puisque U est ouvert, il existe $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $B(a, 2\varepsilon) \subset U$. Par densité, il existe aussi un point $x \in D$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$. Maintenant, $x' \in B(x, \varepsilon)$ implique $d(a, x') \leq d(a, x) + d(x, x') < 2\varepsilon$ et donc $B(x, \varepsilon) \subset B(a, 2\varepsilon)$; ainsi, $a \in B(x, \varepsilon) \subset U$ et $(x, \varepsilon) \in C$.

Intéressons nous plus particulièrement à B.

Proposition 1.1.11. La σ -algèbre \mathbb{B} est engendrée par chacune des collections d'ensembles suivantes,

- la collection de tous les ensembles fermés de \mathbb{R} ,
- la collection des demi-droites de \mathbb{R} de la forme $]-\infty,b]$ $(b\in\mathbb{R}),$
- la collection des semi-intervalles de \mathbb{R} de la forme [a,b] $(a,b \in \mathbb{R})$.

 $D\acute{e}monstration$. Soient \mathscr{B}_1 , \mathscr{B}_2 et \mathscr{B}_3 les σ -algèbres engendrées par les trois collections d'ensembles de l'énoncé (dans l'ordre). Nous allons montrer que les inclusions suivantes sont vérifiées.

$$\mathscr{B}_3 \subset \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}_1 \subset \mathbb{B} \subset \mathscr{B}_3$$
.

Bien sûr, \mathbb{B} contient tous les ensembles ouverts de \mathbb{R} , donc aussi tous les ensembles fermés de \mathbb{R} et donc $\mathcal{B}_1 \subset \mathbb{B}$. Puisqu'un ensemble de la forme $]-\infty,b]$ est fermé, on a $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. De plus, on a

$$[a,b] =]-\infty,b]\cap]-\infty,a]^c,$$

et donc $\mathscr{B}_3 \subset \mathscr{B}_2$.

Intéressons-nous maintenant à la dernière inclusion. Soient \mathscr{C} la collection des intervalles [a,b] de \mathbb{R} tels que $a,b\in\mathbb{Q}$. Tout ensemble ouvert U de \mathbb{R} se décomposant comme suit,

$$U = \bigcup_{I \in \mathscr{C}} I,$$

la Proposition 1.1.8 implique $\sigma(\mathscr{C}) = \mathbb{B}$. Puisque, pour tout élément I de \mathscr{C} , $I \in \mathscr{B}_3$, on obtient $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}_3$.

Proposition 1.1.12. La σ -algèbre \mathbb{B}^d est engendrée par chacune des collections d'ensembles suivantes,

— la collection de tous les ensembles fermés de \mathbb{R}^d .

- la collection de tous les demi-espaces de la forme $\prod_{k=1}^d]-\infty, b_k]$ $(b_k \in \mathbb{R} \ \forall k),$
- la collection de tous les rectangles semi-ouverts de la forme $\prod_{k=1}^d [a_k, b_k]$ $(a_k, b_k \in \mathbb{R} \ \forall k)$.

Démonstration. Comme pour la proposition précédente, soient \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 les σ -algèbres engendrées par les trois collections d'ensembles de l'énoncé (dans l'ordre). Bien sûr, $\mathcal{B}_1 \subset \mathbb{B}^d$. Pour les mêmes raisons que précédemment, $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. Enfin, tout ensemble ouvert U est l'union de tous les rectangles semi-ouverts à sommets rationnels inclus dans U, $\prod_{k=1}^d]a_k, b_k]$ $(a_k, b_k \in \mathbb{Q} \ \forall k)$, ce qui permet de conclure comme dans la démonstration précédente.

Incidemment, nous avons aussi démontré le résultat suivant.

Corollaire 1.1.13. On $a \mathbb{B}^d = \sigma(\{R \subset \mathbb{R}^d : R \text{ est un rectangle fermé}\}).$

Démonstration. Soit \mathscr{A} la σ-algèbre engendrée par les rectangles fermés de \mathbb{R}^d . Puisque tout ensemble fermé appartient à \mathbb{B}^d , $\mathscr{A} \subset \mathbb{B}^d$. Dans la démonstration précédente, il a été montré que, si \mathscr{C} désigne la collection de tous les rectangles fermés de sommets rationnels, $\sigma(\mathscr{C}) = \mathbb{B}^d$. Par conséquent, $\mathbb{B}^d \subset \mathscr{A}$.

Regardons de plus près quelques ensembles de \mathbb{B}^d .

Définition 1.1.14. Soient $\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ la famille de tous les ensembles fermés de \mathbb{R}^d et $\mathscr{G}(\mathbb{R}^d)$ la famille de tous les ensembles ouverts de \mathbb{R}^d . Soient $\mathscr{F}_{\sigma}(\mathbb{R}^d)$ la collection des unions de suites d'éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{G}_{\delta}(\mathbb{R}^d)$ la collection des intersections de suites d'éléments de $\mathscr{G}(\mathbb{R}^d)$. Un ensemble de \mathscr{F}_{σ} est appelé un ensemble F_{σ} et un ensemble de \mathscr{G}_{δ} est appelé un ensemble G_{δ}^{3} .

Proposition 1.1.15. Tout ensemble fermé de \mathbb{R}^d est un ensemble G_{δ} ; tout ensemble ouvert de \mathbb{R}^d est un ensemble F_{σ} .

Démonstration. Soit F un ensemble fermé de \mathbb{R}^d et définissons la suite $(U_k)_k$ comme suit,

$$U_k = \{ x \in \mathbb{R}^d : d(x, y) < 1/k \text{ pour un } y \in F \}.$$

Si $F=\varnothing$, alors $U_k=\varnothing$. Qui plus est, U_k est ouvert et $F\subset \cap_k U_k$. Montrons que l'inclusion inverse est aussi vérifiée. Tout point de $\cap_k U_k$ est la limite d'une suite de points de F. Puisque F est fermé, cette limite appartient à F. Nous venons donc de montrer que F est un ensemble G_δ .

Si Ω est un ensemble ouvert, Ω^c est fermé et $\Omega^c = \cap_k U_k$. De là, $\Omega = \cup_k U_k^c$ et Ω est un ensemble F_{σ} .

Pour une collection $\mathscr C$ d'ensemble, soit $\mathscr C_\sigma$ la collection obtenue en prenant les unions de suites de $\mathscr C$ et $\mathscr C_\delta$ la collection obtenue en prenant les intersections de suites de $\mathscr C$. On peut itérer les opérations représentées par \cdot_σ et \cdot_δ pour obtenir, à partir de la classe $\mathscr F$, les classes $\mathscr F_\sigma$, $\mathscr F_{\sigma\delta}$, $\mathscr F_{\sigma\delta\sigma}$,... et, à partir de la classe $\mathscr G$, les classes $\mathscr G_\delta$, $\mathscr G_{\delta\sigma}$, $\mathscr G_{\delta\sigma\delta}$,... (remarquons que $\mathscr F_\delta = \mathscr F$, $\mathscr G_\sigma = \mathscr G$ et $\mathscr F_{\sigma\sigma} = \mathscr F_\sigma$, $\mathscr G_{\delta\delta} = \mathscr G_\delta$). Considérons l'ensemble M des mots m construits sur l'alphabet $\{\delta,\sigma\}$ dont aucune lettre ne se répète : $m=l_1\cdots l_N$

^{3.} Les lettres F et G ont vraissemblablement été choisies pour représenter les mots fermé et Gebiet, alors que les symboles σ et δ représentent les mots Summe et Durchschnitt.

avec $l_k \in \{\delta, \sigma\}$ pour $k \in \{1, ..., N\}$ et $l_k \neq l_{k+1}$ quel que soit $k \in \{1, ..., N-1\}^4$. Équipons cet ensemble de l'opération concaténation; par exemple, pour $m = \sigma_1 \cdots \sigma_N$, on a $\delta m = \delta \sigma_1 \cdots \sigma_N$

Proposition 1.1.16. Avec des notations évidentes, pour tout mot m de M, on a $\mathscr{G}_m \subset \mathscr{F}_{\sigma m}$ et $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{G}_{\delta m}$.

Démonstration. Il suffit de procéder par induction sur la longueur du mot m, le cas de base (concernant le mot m vide) étant déjà connu. Supposons avoir $\mathscr{F}_{m\delta} \subset \mathscr{G}_{\delta m\delta}$ et soit $m' = m\delta\sigma$. Si E appartient à $\mathscr{F}_{m'}$, alors $E = \bigcup_k A_k$, avec $A_k \in \mathscr{F}_{m\delta}$. Par induction, on a $A_k \in \mathscr{G}_{\delta m\delta}$, ce qui implique que $E = \bigcup_k A_k$ appartient à $\mathscr{G}_{\delta m\delta\sigma}$, c'est-à-dire $\mathscr{G}_{\delta m'}$. Le cas $\mathscr{F}_{m\sigma}$ et ceux concernant $\mathscr{G}_{m\delta}$ et $\mathscr{G}_{m\sigma}$ se démontrent de même.

Le diagramme suivant est donc valide :

Ces classes ne sont donc pas égales. Qui plus est, il existe des ensembles boréliens n'appartenant à aucune d'entre elles [10].

Exercice 1.1.17. Montrer que si B est un borélien de \mathbb{R}^d , alors, pour tout c > 0, cB est encore un ensemble borélien.

Suggestion : On vérifie sans peine que $\mathscr{A} = \{A : cA \in \mathbb{B}^d\}$ est une σ -algèbre contenant les ensembles ouverts.

Proposition 1.1.18. Si X est un espace topologique et $f: X \to X$ est un homéomorphisme, alors une partie B de X est un borélien si et seulement si f(B) est borélien.

Démonstration. On vérifie de suite que l'ensemble

$$\mathscr{A} = \{A : f(A) \in \mathscr{B}(X)\}$$

est une σ -algèbre. De plus, pour tout ouvert U de X, f(U) est ouvert, ce qui implique $U \in \mathscr{A}$. On a donc $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{A}$. Autrement dit, tout borélien B de X est tel que f(B) est borélien.

On peut raisonner de même avec

$$\{A: f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Ainsi, tout borélien B de X est tel que $f^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{B}(X)$. Dès lors, si f(B) est un borélien de X, B est également un borélien de X.

Classes de Dynkin

Les classes de Dynkin sont utiles pour vérifier l'égalité de mesures ou la mesurabilité de fonctions.

Définition 1.1.19. Soit X un ensemble quelconque. Une collection \mathscr{D} de sous-ensembles de X est une classe de Dynkin sur X si

^{4.} On constate sans peine qu'il s'agit d'un langage régulier

- $-X \in \mathcal{D}$,
- si $A, B \in \mathcal{D}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{D}$,
- si $(A_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles de \mathcal{D} , alors $\cup_k A_k \in \mathcal{D}$.

Le résultat suivant procure une définition alternative des classes de Dynkin.

Proposition 1.1.20. Soit X un ensemble quelconque. Une collection \mathcal{D} de sous-ensembles de X est une classe de Dynkin ou un système de Dynkin sur X si et seulement si

- $-X \in \mathcal{D}$.
- si $A \in \mathcal{D}$, alors $A^c \in \mathcal{D}$,
- $si(A_k)_k$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{D} , alors $\cup_k A_k \in \mathscr{D}$.

Démonstration. Supposons que \mathscr{D} est une classe de Dynkin. Si $A \in \mathscr{D}$, alors $A^c = X \setminus A \in \mathscr{D}$. Soit maintenant $(A_k)_k$ une suite d'ensembles disjoints deux à deux de \mathscr{D} et posons $S_k = \bigcup_{j=1}^k A_k$. La suite $(S_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles. On a $S_1 \in \mathscr{D}$ et par récurrence, $S_{k+1} = A_{k+1} \cup S_k = (A_{k+1}^c \setminus S_k)^c \in \mathscr{D}$, car, puisque les ensembles A_k sont disjoints, $S_k \subset A_{k+1}^c$. Ainsi, $\bigcup_k A_k = \bigcup_k S_k \in \mathscr{D}$.

Supposons maintenant que \mathscr{D} est une classe vérifiant les conditions de l'énoncé. Soient $A, B \in \mathscr{D}, A \subset B$. On a $B \setminus A = (B^c \cup A)^c \in \mathscr{D}$, puisque B^c et A sont disjoints. Soit maintenant $(A_k)_k$ une suite croissante d'ensembles de \mathscr{D} et posons $D_1 = A_1, D_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$. Les ensembles D_k sont disjoints deux à deux. Qui plus est, $D_1 \in \mathscr{D}$ et $D_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k \in \mathscr{D}$, puisque $A_k \subset A_{k+1}$. On obtient donc $\bigcup_k A_k = \bigcup_k D_k \in \mathscr{D}$.

Une collection de sous-ensembles \mathcal{D} vérifiant les conditions de l'énoncé est parfois appelée un λ -système.

Remarque 1.1.21. Afin de mettre en évidence la différence entre classe de Dynkin et σ -algèbre, remarquons que si une collection $\mathscr A$ de sous-ensembles de X vérifie

- $-X \in \mathscr{A}$
- si $A, B \in \mathcal{D}$, alors $B \setminus A \in \mathcal{A}$,
- si $(A_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles de \mathcal{D} , alors $\cup_k A_k \in \mathcal{A}$,

alors \mathscr{A} est une σ -algèbre sur X. Remarquons d'abord que si A et B sont deux éléments de \mathscr{A} , alors $A \cap B = A \setminus B^c$ également. Puisque \mathscr{A} est stable pour l'intersection finie et le complémentaire, il l'est également pour l'union finie. Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles de \mathscr{A} , soit $S_k = \bigcup_{j=1}^k A_k$; ces ensembles appartiennent à \mathscr{A} . La suite $(S_k)_k$ étant croissante, on obtient que $\bigcup_k A_k = \bigcup_k S_k$ appartient à \mathscr{A} .

Bien sûr, on obtient le même résultat avec les conditions

- $-X \in \mathcal{A}$
- si $A, B \in \mathcal{D}$, alors $B \setminus A \in \mathcal{A}$,
- si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{D} , alors $\cup_k A_k \in \mathscr{D}$. Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles de \mathscr{A} , soit $S_k = \cup_{j=1}^k A_k$, $D_1 = A_1$ et $D_{k+1} = A_{k+1} \setminus S_k$. Ces ensembles appartiennent à \mathscr{A} et donc $\cup_k A_k = \cup_k D_k$ appartient à \mathscr{A} .

Le résultat suivant est évident.

Proposition 1.1.22. L'intersection d'une famille non-vide de classes de Dynkin est encore une classe de Dynkin.

Définition 1.1.23. Soit X un ensemble arbitraire et $\mathscr C$ une collection de sous-ensembles de X. L'intersection de toutes les classes de Dynkin contenant $\mathscr C$ est la classe de Dynkin engendrée par $\mathscr C$. On la note $\lambda(\mathscr C)$.

Bien sûr, $\lambda(\mathscr{C})$ est la plus petite classe de Dynkin comprenant \mathscr{C} .

Nous allons maintenant faire la liaison entre les classes de Dynkin et les σ -algèbres.

Définition 1.1.24. Soit X un ensemble arbitraire. Une collection $\mathscr C$ de sous-ensembles de X est un π -système sur X si elle est stable pour l'intersection finie : $A, B \in \mathscr C$ entraı̂ne $A \cap B \in \mathscr C$.

Proposition 1.1.25. Une classe de Dynkin qui est un π -système est une σ -algèbre.

Démonstration. Soit \mathscr{D} un λ -système qui est aussi un π -système. Si $(A_k)_k$ est une suite de \mathscr{D} , il suffit de montrer que $\cup_k A_k \in \mathscr{D}$. Soient $S_k = \cup_{j=1}^k A_j$, $D_1 = A_1$ et $D_{k+1} = A_{k+1} \setminus S_k$. On a $S_k^c = \cap_{j=1}^k A_j^c \in \mathscr{D}$, $D_1 \in \mathscr{D}$ et $D_{k+1} = A_{k+1} \cap S_k^c \in \mathscr{D}$, puisque \mathscr{D} est stable pour le complément et l'intersection. Ainsi $(D_k)_k$ est une suite d'ensembles disjoints deux à deux de \mathscr{D} . Par conséquent, $\cup_k A_k = \cup_k D_k \in \mathscr{D}$.

Théorème 1.1.26 (Dynkin). Soit \mathscr{C} un π -système sur un ensemble arbitraire X. On a $\lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.

Démonstration. Puisqu'une σ-algèbre est une classe de Dynkin, $\sigma(\mathscr{C})$ est une classe de Dynkin contenant \mathscr{C} , donc $\lambda(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$.

Nous allons maintenant montrer que $\lambda(\mathscr{C})$ est une σ -algèbre. En vertu de la Proposition 1.1.24, il nous suffit de montrer que $\lambda(\mathscr{C})$ est un π -système. Pour $B \in \lambda(\mathscr{C})$, soit

$$\mathscr{D}_B = \{ A \in \lambda(\mathscr{C}) : A \cap B \in \lambda(\mathscr{C}) \}.$$

Montrons que \mathcal{D}_B est un λ -système. Seule la stabilité pour l'opération complément n'est pas immédiate. Si $A \in \mathcal{D}_B$,

$$A^c \cap B = (A \cap B)^c \cap B = ((A \cap B) \cup B^c)^c \in \lambda(\mathscr{C}),$$

et donc $A^c \in \mathcal{D}_B$.

Qui plus est, si $B \in \mathscr{C}$, on a $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_B$, puisque par hypothèse, $A \in \mathscr{C}$ implique $A \cap B \in \mathscr{C}$; ainsi, $\lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_B$ pour tout $B \in \mathscr{C}$. Si $B \in \lambda(\mathscr{C})$ et $A \in \mathscr{C}$, nous venons donc de montrer que $B \in \mathscr{D}_A$, c'est-à-dire $A \cap B \in \lambda(\mathscr{C})$. Autrement dit, $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_B$ et donc $\lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_B$ pour tout $B \in \lambda(\mathscr{C})$. Au final, nous avons donc $A, B \in \lambda(\mathscr{C})$ implique $A \cap B \in \lambda(\mathscr{C})$, ce qui devait être montré.

1.2 Mesures

Dans cette section, nous allons d'abord définir les mesures sur une σ -algèbre et donner ensuite les propriétés de bases de ces applications. Nous présenterons ensuite un résultat concernant l'unicité et terminerons avec les mesures complétées.

Définitions et propriétés de base

Maintenant que le concept de σ -algèbre a été introduit, nous pouvons définir la notion de mesure.

Définition 1.2.1. Soient X un ensemble quelconque et \mathscr{A} une σ -algèbre sur X. Une application μ définie sur \mathscr{A} et à valeurs sur la demi-droite étendue $[0,\infty]$,

$$\mu: \mathscr{A} \to [0, \infty] \quad A \mapsto \mu(A)$$

est une mesure sur \mathscr{A} si

1.2. MESURES 9

- $--\mu(\varnothing)=0,$
- si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles de \mathscr{A} disjoints deux à deux, alors

$$\mu(\bigcup_{k} A_k) = \sum_{k} \mu(A_k). \tag{1.1}$$

Une application vérifiant l'égalité (1.1) est qualifiée de dénombrablement additive ou σ -additive. Si cette égalité n'a lieu que pour les suites $(A_k)_k$ finies, l'application est dite finiment additive.

Si X est un ensemble quelconque, \mathscr{A} est une σ -algèbre sur X et μ une mesure sur \mathscr{A} , le triplet (X,\mathscr{A},μ) est appelé un espace mesuré; le couple (X,\mathscr{A}) est appelé un espace mesurable. Si (X,\mathscr{A},μ) est un espace mesuré, μ est une mesure sur (X,\mathscr{A}) , ou même une mesure sur X, si le contexte est clair. Les ensembles de \mathscr{A} sont parfois appelés ensembles \mathscr{A} -mesurables.

Si on considère une mesure μ sur une σ -algèbre de Borel, i.e. si l'espace mesuré est du type $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, on dit que μ est une mesure borélienne.

Remarque 1.2.2. Si μ est une application définie sur une σ -algèbre vérifiant (1.1), alors on a

$$\mu(\varnothing) = \sum_{k} \mu(\varnothing),$$

ce qui implique $\mu(\emptyset) = 0$ ou $\mu(\emptyset) = \infty$. Dans ce dernier cas, on a $\mu(A) = \infty$, pour tout ensemble A mesurable.

La théorie des probabilités repose sur ces définitions (voir également la remarque 1.2.21).

Définition 1.2.3. Un espace probabilisé ou espace de probabilité est un espace mesuré (Ω, \mathscr{A}, P) tel que $P(\Omega) = 1$. Dans ce cas, l'ensemble Ω est appelé l'univers, \mathscr{A} une tribu sur Ω et P une probabilité sur \mathscr{A} . Un élément de \mathscr{A} est appelé un évènement et P(A) est la probabilité de l'évènement $A \in \mathscr{A}$.

Donnons quelques exemples de mesure.

Exemples 1.2.4. Soient X un ensemble quelconque et \mathscr{A} une σ -algèbre sur X. Les application μ définies ci-après sont des mesures.

- L'application définie sur \mathscr{A} telle que $\mu(A) = \#A$ si $\#A < \aleph_0$ et $\mu(A) = \infty$ sinon est la mesure de dénombrement,
- Si X est un ensemble non-vide, soit $x \in X$. L'application δ_x telle que $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ et $\delta_x(A) = 0$ sinon est la mesure de Dirac en x,
- l'application μ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(A) = \infty$ si $A \neq \emptyset$ est une mesure dégénérée.

Les principales propriétés des mesures sont résumées dans le résultat suivant.

Théorème 1.2.5. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(A_k)_k$ une suite de \mathcal{A} . On a les relations suivantes.

— (monotonie) Si $A_1 \subset A_2$, alors

$$\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2),$$

 $- si A_1 \subset A_2 \ et \ \mu(A_1) < \infty, \ alors$

$$\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1),$$

— (sous-additivité dénombrable) on a toujours

$$\mu(\bigcup_{k} A_k) \leqslant \sum_{k} \mu(A_k),$$

— (continuité à gauche) si la suite $(A_k)_k$ est croissante,

$$\mu(\bigcup_{k} A_k) = \mu(\lim_{k} A_k) = \lim_{k} \mu(A_k),$$

— (continuité à droite) si la suite $(A_k)_k$ est décroissante et s'il existe un indice k_0 tel que $\mu(A_{k_0}) < \infty$,

$$\mu(\bigcap_{k} A_k) = \mu(\lim_{k} A_k) = \lim_{k} \mu(A_k),$$

— on a toujours

$$\mu(\underline{\lim}_{k} A_k) \leqslant \underline{\lim}_{k} \mu(A_k),$$

— s'il existe un indice k_0 tel que $\mu(\bigcup_{k \geqslant k_0} A_k) < \infty$,

$$\mu(\overline{\lim_{k}} A_k) \geqslant \overline{\lim_{k}} \mu(A_k).$$

Démonstration. Pour la monotonie, remarquons que si $A_1 \subset A_2$,

$$\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \geqslant \mu(A_1).$$

Si, qui plus est, $\mu(A_1) < \infty$, cette relation entraı̂ne $\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$. Pour la sous-additivité, considérons les ensembles $B_1 = A_1$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j$. Les ensembles B_k sont deux à deux disjoints et $B_k \subset A_k \ \forall k$. Par conséquent

$$\mu(\bigcup_{k} A_{k}) = \mu(\bigcup_{k} B_{k}) = \sum_{k} \mu(B_{k}) \leqslant \sum_{k} \mu(A_{k}).$$

Pour la continuité à gauche, remarquons d'abord que s'il existe un indice k_0 tel que $\mu(A_{k_0}) = \infty$, le résultat découle de la monotonie de la mesure. Sinon, soient les ensembles $B_1 = A_1$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$. Ces ensembles sont disjoints et donc

$$\mu(\lim_{k} A_{k}) = \mu(\bigcup_{k} A_{k}) = \sum_{k} \mu(B_{k}) = \mu(A_{1}) + \lim_{k} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_{j+1} \setminus A_{j})$$
$$= \mu(A_{1}) + \lim_{k} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_{j+1}) - \mu(A_{j})$$
$$= \lim_{k} \mu(A_{k}).$$

Pour la continuité à droite, nous pouvons supposer que $\mu(A_1) < \infty$. Puisque la suite est décroissante, la suite $(A_1 \setminus A_k)_k$ est croissante et nous venons de montrer que pour une telle suite,

$$\mu(\bigcup_{k} A_1 \setminus A_k) = \lim_{k} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1) - \lim_{k} \mu(A_k)$$

1.2. MESURES

Qui plus est,

$$\mu(\bigcup_{k} A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{k} A_k) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{k} A_k).$$

Ces deux dernières relations permettent d'écrire

$$\mu(\bigcap_k A_k) = \lim_k \mu(A_k).$$

Pour l'avant dernière assertion, posons $B_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$. La suite $(B_k)_k$ est croissante et $\lim_k B_k = \underline{\lim}_k A_k$. Vu ce qui a été montré précédemment, on a

$$\mu(\underline{\lim}_k A_k) = \lim_k \mu(B_k) \leqslant \underline{\lim}_k \mu(A_k),$$

puisque $B_k \subset A_k \ \forall k$.

Le dernier point se démontre de la même manière en posant $B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$.

Comme application, on obtient le résultat suivant, de grande importance en théorie des probabilités, notamment pour la démonstration, par Kolmogorov, de la loi forte des grands nombres.

Proposition 1.2.6 (Théorème de Borel-Cantelli). Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré; si $(A_k)_k$ est ue suite de \mathscr{A} telle que $\sum_k \mu(A_k) < \infty$, alors $\mu(\overline{\lim}_k A_k) = 0$.

Démonstration. Posons $B_k = \bigcup_{j \geqslant k} A_j$; cette suite est décroissante et on a $\mu(B_k) \leqslant \sum_{j \geqslant k} \mu(A_j) < \infty$ pour tout k. Vu ce qui précède, on a donc

$$\mu(\overline{\lim}_k A_k) = \mu(\cap_k B_k) = \lim_k \mu(B_k) \leqslant \lim_k \sum_{j \geqslant k} \mu(A_j) = 0,$$

le reste $\sum_{i\geqslant k}\mu(A_j)$ étant celui d'une série convergente.

Mesures σ -finies et unicité

Nous présentons ici deux résultats concernant l'unicité. Remarquons que les hypothèses font intervenir un π -système.

Lemme 1.2.7. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et \mathscr{C} un π -système sur X tel que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$. Si μ et ν sont deux mesures finies sur \mathscr{A} telles que $\mu(X) = \nu(X)$ et $\mu(C) = \nu(C)$ quelque soit $C \in \mathscr{C}$, alors $\mu = \nu$.

Démonstration. Soit $\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$. On vérifie directement qu'il s'agit d'un λ -système. Par hypothèse, $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ et donc $\lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$. Le Théorème 1.1.25 implique alors $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$, ce qui suffit.

Pour le second résultat nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1.2.8. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$. La mesure μ est dite σ -finie sur \mathscr{C} s'il existe une suite croissante $(X_k)_k$ d'ensembles de \mathscr{C} telle que $\cup_k X_k = X$ et $\mu(X_k) < \infty \ \forall k$. Si $\mathscr{C} = \mathscr{A}$, on dit simplement que la mesure est σ -finie. Si μ est une mesure σ -finie, l'espace (X, \mathscr{A}, μ) est appelé un espace mesuré σ -fini. Un ensemble $A \in \mathscr{A}$ est σ -fini pour μ s'il existe une suite croissante $(A_k)_k$ de \mathscr{A} telle que $\cup_k A_k = A$ et $\mu(A_k) < \infty \ \forall k$.

Bien sûr, si μ est une mesure finie, elle est σ -finie sur toute collection $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ contenant une suite croissante vers X et sur tout ensemble $A \in \mathscr{A}$.

Proposition 1.2.9. L'espace mesuré (X, \mathscr{A}, μ) est σ -fini si et seulement s'il existe une suite $(A_k)_k$ de \mathscr{A} recouvrant X telle que $\mu(A_k) < \infty \ \forall k$. La suite peut être choisie telle que les ensembles soient deux à deux disjoints.

Démonstration. Si (X, \mathscr{A}, μ) est un espace mesuré σ -fini, soit $(X_k)_k$ une suite croissante de \mathscr{A} telle que $\bigcup_k X_k = X$ et $\mu(X_k) < \infty \ \forall k$. La suite $(A_k)_k$ définie comme suit, $A_1 = X_1$ et $A_{k+1} = X_{k+1} \setminus X_k \ \forall k \geqslant 1$ est la suite recherchée.

Maintenant, si $(A_k)_k$ est une suite de \mathscr{A} recouvrant X telle que $\mu(A_k) < \infty \ \forall k$, il suffit de poser $A_1' = A_1$ et $A_{k+1}' = A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j$ pour $k \geqslant 1$ afin d'obtenir une suite d'ensembles deux à deux disjoints avec les mêmes propriétés que la suite $(A_k)_k$. La suite $(X_k)_k$ définie par $X_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$ pour $k \geqslant 1$ montre que μ est une mesure σ -finie. \square

Théorème 1.2.10. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et \mathscr{C} un π -système sur X tel que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$. Si μ et ν sont deux mesures sur \mathscr{A} σ -finies sur \mathscr{C} et si $\mu(C) = \nu(C)$ quel que soit $C \in \mathscr{C}$, alors $\mu = \nu$.

Démonstration. Soit $(C_k)_k$ une suite croissante de $\mathscr C$ telle que $\cup_k C_k = X$ et $\mu(C_k) < \infty$ $\forall k$. Définissons, pour tout k, les mesures μ_k et ν_k sur $\mathscr A$ comme suit, $\mu_k(A) = \mu(A \cap C_k)$, $\nu_k(A) = \nu(A \cap C_k)$. Le résultat précédent implique que $\mu_k = \nu_k \ \forall k$. Dès lors, on a

$$\mu(A) = \lim_{k} \mu(A \cap C_k) = \lim_{k} \nu(A \cap C_k) = \nu(A),$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, ce qui suffit.

Ensembles négligeables et complétion de mesures

Les mesures complètes possèdent des propriétés, notamment reliées aux fonctions mesurables, très intéressantes, comme nous le verrons plus tard.

Définition 1.2.11. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. Un sous-ensemble B de X est un ensemble μ -négligeable (ou simplement négligeable si le contexte est clair) s'il existe un ensemble $A \in \mathscr{A}$ tel que $B \subset A$ et $\mu(A) = 0$. La mesure μ est une mesure complète si tout ensemble μ -négligeable est un élément de \mathscr{A} ; autrement dit, si $\mu(A) = 0$ (donc $A \in \mathscr{A}$) et $B \subset A$ impliquent $B \in \mathscr{A}$.

Définition 1.2.12. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable. Une mesure μ sur (X, \mathscr{A}) est diffuse si les singletons de X (c'est-à-dire les ensembles $\{x\}$, avec $x \in X$) sont négligeables. En particulier, si les singletons sont μ -mesurables (c'est toujours le cas si la mesure est complète), alors la mesure μ est diffuse si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.13. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Un élément x de X est un atome de μ si $\{x\} \in \mathcal{A}$ et $\mu(\{x\}) > 0$.

Bien évidemment, si une mesure possède un atome alors elle n'est pas diffuse : une mesure diffuse est une mesure sans atome.

Définition 1.2.14. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. La mesure μ est atomique si elle est non-nulle et s'il existe un ensemble dénombrable $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ tel que $\{x_j\} \in \mathscr{A}$ pour tout j (ce qui implique $D \in \mathscr{A}$) et $\mu(A) = \mu(A \cap D)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$.

1.2. MESURES

Bien sûr, l'ensemble D de la définition précédente est nécessairement non vide, sinon la mesure μ serait nulle. On a $\mu(D^c)=0$ et qui plus est, quitte à retirer les éléments inutiles, on peut supposer avoir $\mu(\{x_j\})>0$ pour tout j. Ainsi, les éléments de D sont les atomes de μ et ce sont les seuls éléments qui contribuent à la valeur d'un ensemble :

$$\mu(A) = \sum_{x_j \in A} \mu(\{x_j\}).$$

En particulier, on peut étendre μ à $\wp(X)$ grâce à l'égalité précédente. Dans ce cas, on a donc affaire à une mesure complète.

Remarque 1.2.15. Si (X, \mathscr{A}) est un espace mesurable et μ une mesure atomique sur cet espace, notons D l'ensemble des atomes x_j de μ . Si on pose $c_j = \mu(\{x_j\})$, on a $\mu(A) = \sum_j c_j \delta_{x_j}$, où δ_{x_j} est la mesure de Dirac en x_j . La mesure $\sum_j \delta_{x_j}$ est appelée un peigne de Dirac.

Une mesure peut être étendue en une mesure complète. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. Appelons la complétion de \mathscr{A} la collection \mathscr{A}_{μ} des sous-ensembles A de X pour lesquels il existe deux ensembles $A_I, A_S \in \mathscr{A}$ tels que $A_I \subset A \subset A_S$ et $\mu(A_S \setminus A_I) = 0$. On obtient immédiatement $\mu(A_I) = \mu(A_S)$ et, pour tout sous-ensemble $B \in \mathscr{A}$ de $A, \mu(B) \leq \mu(A_S) = \mu(A_I)$. La valeur $\sup\{\mu(B) : B \in \mathscr{A}, B \subset A\}$ ainsi définie ne dépend que de l'ensemble A (et pas des ensembles A_I et A_S choisis).

Définition 1.2.16. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. La complétion de μ , notée $\bar{\mu}$ est l'application

$$\bar{\mu}: \mathscr{A}_{\mu} \to [0, \infty] \quad A \mapsto \bar{\mu}(A)$$

telle que $\bar{\mu}(A) = \mu(A_I)$, où A_I est un ensemble tel que défini plus haut.

L'application $\bar{\mu}$ est la mesure voulue.

Proposition 1.2.17. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. La complétion $\bar{\mu}$ de μ est une mesure complète définie sur une σ -algèbre qui inclus \mathcal{A} telle que $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. Soit \mathscr{A}_{μ} la complétion de \mathscr{A} , définie plus haut. Il est clair que $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_{\mu}$ et donc $X \in \mathscr{A}_{\mu}$. Soit $A \in \mathscr{A}_{\mu}$. Il existe $A_{I}, A_{S} \in \mathscr{A}$ tels que $A_{I} \subset A \subset A_{S}$ et $\mu(A_{S} \setminus A_{I}) = 0$. On a $A_{S}^{c} \subset A^{c} \subset A_{I}^{c}$ et $\mu(A_{I}^{c} \setminus A_{S}^{c}) = \mu(A_{S} \setminus A_{I}) = 0$. Ainsi $A \in \mathscr{A}_{\mu}$ implique $A^{c} \in \mathscr{A}_{\mu}$. Soit maintenant $(A_{k})_{k}$ une suite de \mathscr{A}_{μ} . Pour chaque ensemble A_{k} , il existe $A_{I,k}, A_{S,k} \in \mathscr{A}$ tels que $A_{I,k} \subset A_{k} \subset A_{S,k}$ et $\mu(A_{S,k} \setminus A_{I,k}) = 0$. On a $\cup_{k} A_{I,k}, \cup_{k} A_{S,k} \in \mathscr{A}$ et $\cup_{k} A_{I,k} \subset \cup_{k} A_{S,k}$. De plus

$$\mu(\bigcup_{k} A_{S,k} \setminus \bigcup_{k} A_{I,k}) \leqslant \mu(\bigcup_{k} A_{S,k} \setminus A_{I,k}) \leqslant \sum_{k} \mu(A_{S,k} \setminus A_{I,k}) = 0$$

et $\bigcup_k A_k \in \mathscr{A}_{\mu}$. Nous venons donc de montrer que \mathscr{A}_{μ} est une σ -algèbre.

Soit $\bar{\mu}$ l'application définie plus haut à partir de μ . Bien sûr, $\bar{\mu}$ est à valeurs positives, si $A \in \mathscr{A}$, $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ et $\bar{\mu}(\varnothing) = 0$. Soit $(A_k)_k$ une suite d'ensembles de \mathscr{A}_{μ} deux à deux disjoints. Ici encore, pour chaque k, il existe $A_{I,k}, A_{S,k} \in \mathscr{A}$ tels que $A_{I,k} \subset A_k \subset A_{S,k}$ et $\mu(A_{S,k} \setminus A_{I,k}) = 0$. Bien sûr, les ensembles $A_{I,k}$ sont deux à deux disjoints et

$$\bar{\mu}(\bigcup_k A_k) = \mu(\bigcup_k A_{I,k}) = \sum_k \mu(A_{I,k}) = \sum_k \bar{\mu}(A_k),$$

ce qui montre que $\bar{\mu}$ est une mesure. Par construction, cette mesure est complète.

Remarquons que si le recours à la complétion peut parfois faciliter la tâche, la nouvelle σ -algèbre ainsi définie peut se révéler beaucoup plus compliquée que l'originale. Qui plus est, rien n'assure que deux mesures définies sur la même σ -algèbre possèdent la même σ -algèbre complétée.

Mesures finiment additives

La définition d'une mesure finiment additive peut sembler plus naturelle que la définition d'une mesure. Toutefois, la théorie relative aux mesures est bien plus puissante.

Définition 1.2.18. Soient X un ensemble quelconque et \mathscr{A} une algèbre sur X. Une application μ définie sur \mathscr{A} et à valeurs sur la demi-droite étendue $[0, \infty]$,

$$\mu: \mathscr{A} \to [0, \infty] \quad A \mapsto \mu(A)$$

est une mesure finiment additive sur \mathscr{A} si $\mu(\varnothing) = 0$ et si, pour toute suite finie d'ensembles deux à deux disjoints A_1, \ldots, A_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ de \mathscr{A} , on a

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Une mesure finiment additive n'est donc pas une mesure. Pour bien différencier ces notions, on parle parfois de *mesure dénombrablement additive* plutôt que de mesure. Bien sûr une mesure (dénombrablement additive) est une mesure finiment additive. L'inverse n'est cependant pas vrai.

Exemple 1.2.19. Soit X l'ensemble des nombres entiers strictement positifs et \mathscr{A} la collection des sous-ensembles A de X tels que soit A, soit A^c soit fini. Nous savons (exemples 1.1.3) que \mathscr{A} est une algèbre mais pas une σ -algèbre. L'application μ définie sur \mathscr{A} telle que $\mu(A)$ vaut ∞ si A est infini et 0 sinon est une mesure finiment additive. Il est impossible de l'étendre à une mesure sur la σ -algèbre engendrée par \mathscr{A} . En effet, soit $A_k = \{k\} \ (k \in X)$; on a $\mu(\cup_k A_k) = \mu(X) = \infty$ et $\sum_k \mu(A_k) = 0$.

Le résultat suivant, utile pour vérifier qu'une mesure finiment additive est une mesure, peut être vu comme une réciproque partielle des propriétés de continuité d'une mesure (Théorème 1.2.5).

Proposition 1.2.20. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure finiment additive sur (X, \mathscr{A}) . Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,

— pour toute suite croissante $(A_k)_k$ de \mathscr{A} , on a

$$\lim_{k} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{k} A_k),$$

— pour toute suite décroissante $(A_k)_k$ de $\mathscr A$ telle que $\cap_k A_k = \mathscr O$, on a

$$\lim_{k} \mu(A_k) = 0,$$

alors μ est une mesure sur (X, \mathscr{A}) .

Démonstration. Soit $(B_j)_j$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{A} et montrons que si l'une des deux conditions est vérifiée, alors on a $\mu(\cup_j B_j) = \sum_j \mu(B_j)$. Si la première condition est vérifiée, soit $A_k = \cup_{j=1}^k B_j$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Par définition, on a $\mu(A_k) = \sum_{j=1}^k \mu(B_j)$, tandis que, par hypothèse, $\mu(\cup_k A_k) = \lim_k \mu(A_k)$. Puisque $\cup_j B_j = \cup_k A_k$, on obtient $\mu(\cup_j B_j) = \sum_j \mu(B_j)$.

Supposons maintenant que la seconde hypothèse est vérifiée et posons $A_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} B_j$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Par définition, on a $\mu(\bigcup_j B_j) = \sum_{j=1}^k \mu(B_j) + \mu(A_{k+1})$. Puisque, par hypothèse, $\lim_k \mu(A_{k+1}) = 0$, on a $\mu(\bigcup_j B_j) = \sum_j \mu(B_j)$.

Les axiomes des probabilités découlent des propriétés des mesures finies.

Remarque 1.2.21. Étant donné un ensemble Ω non vide dont les éléments sont appelés les éventualités, Kolmogorov propose dans [15] de définir la théorie des probabilités à partir de six axiomes. Les cinq premiers sont les suivants :

- \mathscr{F} est une famille d'ensembles de Ω , dont les éléments sont appelés les événements aléatoires,
- Ω appartient à \mathscr{F} ,
- à tout $A \in \mathcal{F}$, on assigne un nombre positif P(A), qui est la probabilité de A,
- $-P(\Omega)=1$,
- si A et B sont deux éléments disjoints de \mathscr{F} , alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Sur une σ -algèbre \mathscr{F} , l'application P satisfaisant ces propriétés est une mesure finie, puisqu'on a $1 = P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing)$, ce qui implique $P(\varnothing) = 0$. Cette approche est suffisante pour le cas fini. Pour le cas général, il faut utiliser le dernier axiome, dit de de continuité :

— Si $(A_k)_k$ est une suite d'événements décroissants de \mathscr{F} pour lesquels on a $\cap_k A_k = \varnothing$, alors $\lim_k P(A_k) = 0$.

Vu la proposition 1.2.20, l'application P définie sur la σ -algèbre $\mathscr F$ est une mesure de probabilité.

1.3 Mesures extérieures

Nombre de mesures sont construites à partir d'applications appelées mesures extérieures. Nous montrons d'abord comment on peut définir une meure à partir d'une mesure extérieure. Nous montrons ensuite que, sous certaines conditions, ces mesures sont définies sur des σ -algèbres « suffisamment grandes ». Enfin, nous montrons comment construire des mesures extérieures à partir de mesures.

Mesures extérieures et ensembles mesurables

Les définitions et résultats basiques concernant les mesures extérieures sont ici donnés.

Définition 1.3.1. Soit X un ensemble quelconque. Une application μ^* définie sur $\wp(X)$ et à valeurs sur la demi-droite complétée $[0,\infty]$,

$$\mu^*: \wp(X) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \mu^*(A)$$

est appelée mesure extérieure sur X si

$$-\mu^*(\varnothing) = 0,$$

$$-A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B),$$

— pour toute suite dénombrable de sous-ensemble $(A_k)_k$ de X,

$$\mu^*(\bigcup_k A_k) \leqslant \sum_k \mu^*(A_k). \tag{1.2}$$

Une mesure extérieure est donc monotone et dénombrablement sous-additive (cf. relation (1.2)). Cette dernière condition n'est pas suffisante pour construire une théorie de la mesure efficace (une mesure doit être dénombrablement additive), mais permet de définir une mesure sur une sous-collection de $\wp(X)$.

Exemples 1.3.2. Soit X un ensemble et $A \subset X$; les applications définies explicitement suivantes sont des mesures extérieures sur X:

- $-\mu_1^*(A) = 1 \text{ si } A \neq \emptyset \text{ et } \mu^*(\emptyset) = 0,$
- $-\mu_2^*(A) = 0 \text{ si } \#A \leq \aleph_0 \text{ et } \mu^*(A) = 1 \text{ sinon,}$
- si X est un espace métrique, soit $\varepsilon > 0$; l'application μ_{ε}^* qui à A associe le plus petit nombre de boules de diamètre ε au plus nécessaire pour recouvrir A est une mesure extérieure.

Nous allons maintenant aborder une catégorie particulière d'ensembles pour une mesure extérieure : les ensembles mesurables.

Définition 1.3.3. Soit μ^* une mesure extérieure sur X. Un ensemble $M \subset X$ est mesurable pour la mesure extérieure μ^* ou μ^* -mesurable (ou même simplement mesurable si le contexte est clair) si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c),$$

pour tout sous-ensemble A de X.

Autrement dit, un ensemble mesurable décompose un ensemble arbitraire en deux parties pour lesquelles la mesure extérieure est additive. Bien entendu, un ensemble M est mesurable si et seulement si M^c est mesurable. Vu la définition d'une mesure extérieure, la condition précédente est équivalente à la condition suivante,

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c).$$
 (1.3)

Le résultat qui suit est peut être plus intuitif.

Proposition 1.3.4. Un ensemble $M \subset X$ est μ^* -mesurable si et seulement si

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

quelque soit $A \subset M$ et $B \subset M^c$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Soient A et B tels que $A \subset M$ et $B \subset M^c$. On a

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap M) + \mu^*((A \cup B) \cap M^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

La condition est suffisante. Soit $C \subset X$ et posons $A = C \cap M$, $B = C \cap M^c$. Par hypothèse,

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap M) + \mu^*(C \cap M^c),$$

ce qui suffit.

Exemples 1.3.5. En reprenant les mesures extérieures données en 1.3.2, on remarque sans peine que seuls l'ensemble vide et X sont mesurables pour μ_1^* , alors que seuls les ensembles de mesure nulle sont mesurables pour μ_2^* .

Les propriétés de base des ensembles mesurables sont données par le résultat qui suit.

Proposition 1.3.6. Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X; on a les propriétés suivantes :

- $si \mu^*(A) = 0$, alors A est mesurable,
- les ensembles \varnothing et X sont mesurables,
- $si\ A\ et\ B\ sont\ mesurables,\ alors\ A\setminus B\ l'est\ aussi,$
- si $(A_k)_k$ est une suite dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, alors $\cup_k A_k$ est mesurable et

$$\mu^*(\bigcup_k A_k) = \sum_k \mu^*(A_k).$$

Plus généralement, si $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \sum_k \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \setminus \bigcup_k A_k).$$

Démonstration. Supposons que $A \subset X$ vérifie $\mu^*(A) = 0$. Tout ensemble $B \subset X$ vérifie $\mu^*(A \cap B) = 0$ et donc

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leqslant \mu^*(B).$$

L'ensemble A est donc mesurable.

Les ensembles \emptyset et X sont bien entendu mesurables.

Soient A et B deux sous-ensemble mesurables de X; nous allons montrer que $A \setminus B$ est mesurable en utilisant la Proposition 1.3.4. Soient C et D deux ensembles tels que $C \subset A \setminus B$ et $D \subset (A \setminus B)^c = A^c \cup B$. La mesurabilité de B implique

$$\mu^*(C) + \mu^*(D) = \mu^*(C) + \mu^*(D \cap B) + \mu^*(D \cap B^c).$$

Comme $C \subset A$ et $D \cap B^c \subset A^c$, la mesurabilité de A permet d'écrire

$$\mu^*(C) + \mu^*(D \cap B^c) + \mu^*(D \cap B) = \mu^*(C \cup (D \cap B^c)) + \mu^*(D \cap B).$$

Dès lors, comme $D \cap B \subset B$ et $C \cup (D \cap B^c) \subset B^c$, on a

$$\mu^*(C \cup (D \cap B^c)) + \mu^*(D \cap B) = \mu^*(C \cup D).$$

On a donc montré que l'égalité $\mu^*(C) + \mu^*(D) = \mu^*(C \cup D)$ est satisfaite, ce qui suffit.

Soit $S_N = \bigcup_{k=1}^N A_k$. Pour montrer la dernière propriété, nous allons procéder par induction finie sur N, le résultat étant trivialement vrai si N = 1. Supposons donc que $N \ge 1$, que S_N est mesurable et que

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^N \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \cap S_N^c),$$
 (1.4)

pour tout sous-ensemble A de X. Puisque A_{N+1} et S_N sont mesurables,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap A_{N+1}) + \mu^*(A \cap A_{N+1}^c \cap S_N) + \mu^*(A \cap A_{N+1}^c \cap S_N^c).$$

Comme, par hypothèse, $S_N \subset A_{N+1}^c$, cette égalité peut se ré-écrire

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap A_{N+1}) + \mu^*(A \cap S_N) + \mu^*(A \cap S_{N+1}^c).$$

En utilisant la relation (1.4) avec $A \cap S_N$ à la place de A, on obtient finalement

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{N+1} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \cap S_{N+1}^c).$$

En utilisant la propriété de sous-additivité dénombrable, l'inégalité précédente entraîne

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap S_{N+1}) + \mu^*(A \cap S_{N+1}^c),$$

ce qui implique que S_{N+1} est mesurable.

Puisque la relation (1.4) est vraie pour tout N et que $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c \subset S_N^c \ \forall N$, on a

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \cap (\bigcup_k A_k)^c)$$

$$\geqslant \mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) + \mu^*(A \cap (\bigcup_k A_k)^c),$$
(1.5)

ce qui implique que $\cup_k A_k$ est mesurable.

Enfin, par définition d'une mesure extérieure, l'inégalité (1.5) est une égalité, ce qui termine la preuve.

Le résultat précédent implique que les ensembles mesurables forment une classe de Dynkin. En fait, un résultat plus fort peut être montré.

Corollaire 1.3.7. Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. La classe des ensembles μ^* -mesurables forme une σ -alqèbre.

Démonstration. Cela résulte directement de la remarque 1.1.20.

On peut aussi démontrer ce résultat explicitement. De fait, il ne reste qu'à montrer qu'une union dénombrable d'ensembles mesurables est encore un ensemble mesurable. Soit donc $(A_k)_k$ une suite d'ensemble mesurables et posons $S_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$. Par hypothèse, S_1 est mesurable et donc $S_{k+1} = A_{k+1} \cup (S_k \setminus A_{k+1})$ est mesurable, par la Proposition 1.3.6. Posons alors $B_1 = A_1$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus S_k$. Ces ensembles sont mesurables, deux à deux disjoints et $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k$, ce qui permet de conclure.

Remarque 1.3.8. On peut aussi modifier la démonstration du troisième point du théorème 1.3.6 pour directement obtenir que si A et B sont mesurables, alors $A \cap B$ l'est également. Puisque le passage au complémentaire préserve la mesurabilité, montrer que la mesurabilité est stable pour l'intersection finie ou la différence sont deux choses équivalentes.

Les propriétés d'additivité et de continuité des mesures extérieures restreintes aux ensembles mesurables sont résumées par le résultat suivant.

Théorème 1.3.9. Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X et $(A_k)_k$ une suite dénombrable d'ensembles μ^* -mesurables.

— Si $A_1 \subset A_2$ et $\mu^*(A_1) < \infty$, alors

$$\mu^*(A_2 \setminus A_1) = \mu^*(A_2) - \mu^*(A_1),$$

— (additivité dénombrable) si les ensembles A_k sont deux à deux disjoints,

$$\mu^*(\cup_k A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k),$$

— (continuité à gauche) si la suite $(A_k)_k$ est croissante, alors

$$\mu^*(\cup_k A_k) = \mu^*(\lim_k A_k) = \lim_k \mu^*(A_k),$$

— (continuité à droite) si la suite $(A_k)_k$ est décroissante et s'il existe un indice k_0 tel que $\mu^*(A_{k_0}) < \infty$, alors

$$\mu^*(\cap_k A_k) = \mu^*(\lim_k A_k) = \lim_k \mu^*(A_k),$$

— on a toujours

$$\mu^*(\underline{\lim}_k A_k) \leqslant \underline{\lim}_k \mu^*(A_k),$$

— s'il existe un indice k_0 tel que $\mu^*(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} A_k) < \infty$, alors

$$\mu^*(\overline{\lim}_k A_k) \geqslant \overline{\lim}_k \mu^*(A_k).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que tous les ensembles intervenant dans la thèse sont μ^* -mesurables. Les deux premières assertions ont déjà été démontrées.

S'il existe k_0 tel que $\mu^*(A_{k_0}) = \infty$, la troisième assertion résulte de la monotonie des mesures extérieures. Sinon, soient $B_1 = A_1$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$. Ces ensembles sont mesurables, disjoints deux à deux et $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k$, avec $B_k \subset A_k \ \forall k$. Dès lors, la Proposition 1.3.6 implique

$$\mu^*(\lim_k A_k) = \sum_k \mu^*(B_k)$$

De plus, puisque A_k est μ^* -mesurable, $\mu^*(A_{k+1}) = \mu^*(A_{k+1} \setminus A_k) + \mu^*(A_k) \ \forall k$, et donc

$$\mu^*(\lim_k A_k) = \mu^*(A_1) + \sum_k \mu^*(A_{k+1}) - \mu^*(A_k) = \lim_k \mu^*(A_k).$$

Pour la quatrième assertion, nous pouvons supposer que $\mu^*(A_1) < \infty$. Puisque la suite $(A_k)_k$ est décroissante, la suite $(A_1 \setminus A_k)_k$ est croissante et nous venons de montrer que pour une telle suite,

$$\mu^*(\bigcup_k A_1 \setminus A_k) = \lim_k \mu^*(A_1 \setminus A_k) = \mu^*(A_1) - \lim_k \mu^*(A_k). \tag{1.6}$$

Qui plus est,

$$\mu^*(\bigcup_k A_1 \setminus A_k) = \mu^*(A_1 \setminus \bigcap_k A_k) = \mu^*(A_1) - \mu^*(\bigcap_k A_k),$$

ce qui permet décrire, en utilisant la relation (1.6),

$$\mu^*(A_1) - \mu^*(\bigcap_k A_k) = \mu^*(A_1) - \lim_k \mu^*(A_k),$$

d'où la conclusion.

Pour la cinquième assertion, posons $B_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$. La suite $(B_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles μ^* -mesurables et $\lim_k B_k = \underline{\lim}_k A_k$. La troisième assertion implique alors,

$$\mu^*(\underline{\lim}_k A_k) = \lim_k \mu^*(B_k) \leqslant \underline{\lim}_k \mu^*(A_k),$$

puisque $B_k \subset A_k \ \forall k$.

Le dernier point se démontre de la même manière, en posant $B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$.

Le résultat suivant est fondamental pour la construction de mesures

Corollaire 1.3.10. La restriction d'une mesure extérieure μ^* à la σ -algèbre des ensembles μ^* -mesurables définit une mesure complète.

La distinction entre mes ure et mesure extérieure est souvent artificielle et il est usuel de noter ces deux applications de la même manière. Ainsi μ peut en général designer une mesure ou une mesure extérieure. Nous tenterons cependant de faire la distinction lorsque cela s'avère intéressant du point de vue pédagogique.

Mesures extérieures métriques

Nous venons de voir que la restriction d'une mesure extérieure à ses ensembles mesurables fournit une mesure. Il se peut cependant que la collection des ensembles mesurables soit bien trop restreinte pour définir une mesure avec une portée pratique. Nous allons ici imposer des conditions supplémentaires afin d'assurer que la mesure obtenue soit définie sur un domaine suffisamment important.

La condition supplémentaire que nous allons imposer est de nature additive.

Définition 1.3.11. Une mesure extérieure μ^* définie sur un espace métrique (X, d) est une mesure extérieure métrique (on dit aussi mesure extérieure de Carathéodory) si

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

pour tous les ensembles $A, B \subset X$ tels que d(A, B) > 0.

Définition 1.3.12. Une mesure extérieure μ^* sur un espace topologique est une mesure extérieure borélienne si tout ensemble borélien de cet espace est μ^* -mesurable.

Théorème 1.3.13 (Carathéodory). Soit (X, d) un espace métrique. Si μ^* est une mesure extérieure métrique sur (X, d), alors les ensembles fermés sont mesurables.

Démonstration. Soit F un ensemble fermé (dans (X,d)). Nous devons montrer que

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F)$$

pour tout ensemble $A \subset X$. Nous pouvons bien sûr supposer que $\mu^*(A) < \infty$, $A \cap F \neq \emptyset$ et $A \cap F^c \neq \emptyset$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit

$$F_{1/k} = \{x : d(x, F) \le 1/k\}.$$

On a $d(A \setminus F_{1/k}, A \cap F) \ge 1/k > 0$. Puisque $(A \setminus F_{1/k}) \cup (A \cap F) \subset A$, les hypothèses impliquent

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*((A \setminus F_{1/k}) \cup (A \cap F)) = \mu^*(A \setminus F_{1/k}) + \mu^*(A \cap F)$$

pour tout k. La thèse est démontrée si l'égalité

$$\lim_{k} \mu^*(A \setminus F_{1/k}) = \mu^*(A \setminus F)$$

est vérifiée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit

$$B_{1/k} = A \cap \{x : \frac{1}{k+1} < d(x,F) \leqslant \frac{1}{k}\}.$$

Puisque F est fermé, $x \notin F$ si et seulement si d(x,F) > 0 et donc

$$A \setminus F = (A \setminus F_{1/k}) \cup \bigcup_{j=k}^{\infty} B_{1/j}$$

pour tout k. Dès lors,

$$\mu^*(A \setminus F) \leqslant \mu^*(A \setminus F_{1/k}) + \sum_{j=k}^{\infty} \mu^*(B_{1/j}).$$

S'il est montré que

$$\sum_{k} \mu^*(B_{1/k}) < \infty, \tag{1.7}$$

alors $\lim_k \sum_{j=k}^{\infty} \mu^*(B_{1/j}) = 0$, ce qui suffit pour terminer la démonstration. On a $d(B_{1/k}, B_{1/j}) > 0$ si $|k-j| \ge 2$. Les hypothèses impliquent donc

$$\sum_{k=1}^{N} \mu^*(B_{1/2k}) = \mu^*(\bigcup_{k=1}^{N} B_{1/2k}) \leqslant \mu^*(A) < \infty,$$

pour tout $N \in \mathbb{N}_0$. De même,

$$\sum_{k=1}^{N} \mu^*(B_{1/2k+1}) = \mu^*(\bigcup_{k=1}^{N} B_{1/2k+1}) \leqslant \mu^*(A) < \infty,$$

ce qui implique (1.7).

Ce résultat implique que la mesure obtenue à partir d'une mesure extérieure (en restreignant le domaine de définition aux ensembles mesurables) est notamment définie sur les ensembles boréliens.

Corollaire 1.3.14. Soit (X, d) un espace métrique. Si μ^* est une mesure extérieure métrique sur X, alors elle est borélienne.

Remarque 1.3.15. Remarquons que le théorème de Carathéodory admet une réciproque : les mesures extérieures métriques sont les mesures extérieures boréliennes (pour les espaces métriques). De fait, supposons que les fermés soient mesurables pour μ^* ; si d(A, B) > 0, il existe un ouvert U pour lequel on a $A \subset U$ et $B \cap U = \emptyset$. Dès lors, il vient

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap U) + \mu^*((A \cup B) \cap U^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

puisque les ouverts sont mesurables.

1.4 La mesure de Lebesgue

La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d est peut être la plus importante des mesures. Nous allons d'abord la définir à partir d'une mesure extérieure avant de démontrer quelques propriétés.

Définition

Nous allons construire la mesure extérieure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d à partir des intervalles compacts de \mathbb{R}^d . Si I est un intervalle borné de \mathbb{R} d'extrémités a et b ($a \leq b$), le volume de I est sa longueur :

$$Vol(I) = b - a$$
.

Si I est un intervalle borné de \mathbb{R}^d , alors I s'écrit

$$I = \prod_{k=1}^{d} I_k,$$

où I_k $(k \in \{1, ..., d\})$ est un intervalle de \mathbb{R} . On définit le volume de I comme suit,

$$\operatorname{Vol}(I) = \prod_{k=1}^{d} \operatorname{Vol}(I_k).$$

Lemme 1.4.1. Si I, I_1, \ldots, I_n sont des intervalles compacts de \mathbb{R}^d tels que $I \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$, alors $\operatorname{Vol}(I) \leqslant \sum_{k=1}^n \operatorname{Vol}(I_k)$.

 $D\acute{e}monstration$. Puisqu'il s'agit de cubes parallèles aux axes, l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle et la différence de deux intervalles est une union finie d'intervalles. De là, $\cup_k I_k \setminus I$ est une union finie d'intervalles J_1, \ldots, J_m deux à deux disjoints, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Vol}(I_k) = \operatorname{Vol}(I) + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Vol}(J_k) \geqslant \operatorname{Vol}(I).$$

Notation 1.4.2. Étant donné un sous-ensemble A de \mathbb{R}^d , soit \mathscr{C}_A la collection de toutes les suites $(R_k)_k$ d'intervalles compacts de \mathbb{R}^d telles que $A \subset \bigcup_k R_k$.

Considérons l'application \mathcal{L}^* suivante :

$$\mathcal{L}^*: \wp(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}(R_k): (R_k)_k \in \mathscr{C}_A\}.$$

Il nous faut avant tout démontrer qu'il s'agit d'une mesure extérieure.

Proposition 1.4.3. L'application \mathcal{L}^* est une mesure extérieure.

Démonstration. Puisque l'ensemble vide peut être recouvert par des intervalles de volume arbitrairement petit, $\mathcal{L}^*(\varnothing) = 0$. Si $A \subset B$, toute suite d'intervalles recouvrant B recouvre aussi A et donc $\mathcal{L}^*(A) \leq \mathcal{L}^*(B)$. Soit maintenant $(A_k)_k$ une suite d'ensembles de \mathbb{R}^d . Montrons que $\mathcal{L}^*(\cup_k A_k) \leq \sum_k \mathcal{L}^*(A_k)$. Si $\sum_k \mathcal{L}^*(A_k) = \infty$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, soit $\varepsilon > 0$ et pour tout k, soit $(R_{k,j})_j$ une suite d'intervalles compacts de \mathbb{R}^d telle que $A_k \subset \cup_j R_{k,j}$ et

$$\sum_{j} \operatorname{Vol}(R_{k,j}) < \mathcal{L}^*(A_k) + \varepsilon/2^k.$$

On a bien sûr $\bigcup_k A_k \subset \bigcup_{k,i} R_{k,i}$ et

$$\sum_{k,j} \operatorname{Vol}(R_{k,j}) < \sum_{k} \mathcal{L}^*(A_k) + \varepsilon/2^k = \sum_{k} \mathcal{L}^*(A_k) + \varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, cette relation implique $\mathcal{L}^*(\cup_k A_k) \leqslant \sum_k \mathcal{L}^*(A_k)$.

Définition 1.4.4. L'application \mathcal{L}^* est appelée la mesure extérieure de Lebesgue.

Il va de soit que tout ensemble borné possède une mesure extérieure de Lebesgue finie.

Lemme 1.4.5. Si K est un ensemble compact, on peut remplacer les suites d'intervalles compacts définissant \mathcal{C}_K par les suites finies d'intervalles compacts recouvrant K pour définir l'application \mathcal{L}^* .

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $(R_k)_k$ une suite de \mathscr{C}_K telle que

$$\sum_{k} \operatorname{Vol}(R_k) < \mathcal{L}^*(K) + \varepsilon/2.$$

Pour un indice k fixé, soit Q_k un intervalle compact dont l'intérieur contient R_k et tel que $\operatorname{Vol}(Q_k) \leqslant \operatorname{Vol}(R_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. La famille formée des Q_k° constitue un recouvrement ouvert de K; on peut donc en extraire un recouvrement fini. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^N Q_k^{\circ}$ et

$$\mathcal{L}^*(K) \leqslant \sum_{k=1}^N \operatorname{Vol}(Q_k) \leqslant \sum_k \operatorname{Vol}(R_k) + \varepsilon/2 < \mathcal{L}^*(K) + \varepsilon, \tag{1.8}$$

ce qui permet de conclure.

Théorème 1.4.6. Pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{L}^*(I) = \text{Vol}(I)$.

Démonstration. Puisque $I \in \mathscr{C}_I$, $\mathcal{L}^*(I) \leqslant \operatorname{Vol}(I)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $(R_k)_k$ une suite d'intervalles compacts tels que $I \subset \bigcup_k R_k$ et

$$\sum_{k} \operatorname{Vol}(R_k) < \mathcal{L}^*(I) + \varepsilon.$$

Puisque I est compact, on peut supposer que la suite $(R_k)_k$ est finie. On a donc

$$\operatorname{Vol}(I) \leqslant \sum_{k} \operatorname{Vol}(R_k) < \mathcal{L}^*(I) + \varepsilon.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout ε , ceci termine la démonstration.

Corollaire 1.4.7. Pour tout intervalle borné I de \mathbb{R}^d , on a $\mathcal{L}^*(I) = \operatorname{Vol}(I)$.

 \Box

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux intervalles compacts I_1 et I_2 tels que $I_1 \subset I \subset I_2$, $\operatorname{Vol}(I) < \operatorname{Vol}(I_1) + \varepsilon$ et $\operatorname{Vol}(I_2) < \operatorname{Vol}(I) + \varepsilon$. Puisque \mathcal{L}^* est une mesure extérieure, on a $\mathcal{L}^*(I_1) \leq \mathcal{L}^*(I) \leq \mathcal{L}^*(I_2)$ et donc, par le résultat qui précède,

$$\operatorname{Vol}(I) - \varepsilon < \operatorname{Vol}(I_1) \leqslant \mathcal{L}^*(I) \leqslant \operatorname{Vol}(I_2) < \operatorname{Vol}(I) + \varepsilon,$$

ce qui permet d'affirmer que l'on a $\mathcal{L}^*(I) = \text{Vol}(I)$.

Dans \mathbb{R} , si I est un intervalle non borné, on a $\mathcal{L}^*(I) = \infty$. Par exemple, si a est un nombre réel, on peut écrire $\mathcal{L}^*([a,\infty[) \geqslant \mathcal{L}^*([a,k+a]) = k$ pour tout nombre naturel k, ce qui suffit pour conclure dans ce cas. Dans \mathbb{R}^d , pour un intervalle $I = \prod_{k=1}^d I_k$, s'il existe un indice $k_0 \in \{1,\ldots,d\}$ tel que $\operatorname{Vol}(I_{k_0}) = 0$ (ce qui correspond à un singleton ou au vide), alors $\mathcal{L}^*(I) = 0$ par définition. Si ce n'est pas le cas et s'il existe $k_0 \in \{1,\ldots,d\}$ tel que I_{k_0} n'est pas borné, alors $\mathcal{L}^*(I) = \infty$.

Le résultat suivant montre que la mesure extérieure de Lebesgue est invariante par translation, i.e. $\mathcal{L}^*(A+x) = \mathcal{L}^*(A)$.

Proposition 1.4.8. La mesure extérieure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d est invariante par translation. De plus, un ensemble $B \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable si et seulement si B + x est mesurable.

 $D\acute{e}monstration$. Puisque le volume dans \mathbb{R}^d est invariant par translation, l'invariance par translation de la mesure extérieure de Lebesgue découle de la définition.

Pour la seconde assertion, si B est mesurable et x est un point de \mathbb{R}^d , on a

$$\mathcal{L}^*(A \cap (B+x)) + \mathcal{L}^*(A \setminus (B+x)) = \mathcal{L}^*(((A-x) \cap B) + x) + \mathcal{L}^*(((A-x) \setminus B) + x)$$
$$= \mathcal{L}^*((A-x) \cap B) + \mathcal{L}^*((A-x) \setminus B)$$
$$= \mathcal{L}^*(A-x) = \mathcal{L}^*(A).$$

De même, si B + x est mesurable,

$$\mathcal{L}^*(A \cap B) + \mathcal{L}^*(A \setminus B) = \mathcal{L}^*((A \cap B) + x) + \mathcal{L}^*((A \setminus B) + x)$$
$$= \mathcal{L}^*((A+x) \cap (B+x)) + \mathcal{L}^*((A+x) \setminus (B+x))$$
$$= \mathcal{L}^*(A+x) = \mathcal{L}^*(A),$$

ce qui suffit.

Il n'est pas nécessaire de prendre des intervalles compacts pour recouvrir l'ensemble dont on veut calculer la mesure extérieure.

Proposition 1.4.9. Dans la définition de la mesure de Lebesgue extérieure (1.8) on peut remplacer les intervalles compacts recouvrant A par des intervalles bornés ouverts ou semi-ouverts.

Démonstration. Soit μ^* l'application définie par

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}(R_k) : (R_k) \in \mathscr{C}_A'\},\,$$

pour $A \subset \mathbb{R}^d$, où \mathscr{C}'_A est la collection des suites d'intervalles ouverts (ou semi-ouverts) bornés $(R_k)_k$ telles que $A \subset \bigcup_k R_k$.

Si $(R_k)_k$ est une suite de \mathscr{C}'_A , considérons la suite $(\bar{R}_k)_k$ de \mathscr{C}_A . Il vient directement

$$\mathcal{L}^*(A) \leqslant \sum_k \operatorname{Vol}(\bar{R}_k) = \sum_k \operatorname{Vol}(R_k),$$

ce qui implique $\mathcal{L}^* \leqslant \mu^*$.

Soit $\varepsilon > 0$; si $(R_k)_k$ est une suite de \mathscr{C}_A , soit $(Q_k)_k$ une suite de \mathscr{C}'_A telle que pour tout indice k, l'intérieur de Q_k contient R_k et $\operatorname{Vol}(Q_k) < \operatorname{Vol}(R_k) + \varepsilon/2^k$. On a

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_k \operatorname{Vol}(Q_k) < \sum_k \operatorname{Vol}(R_k) + \varepsilon,$$

ce qui implique $\mu^* \leqslant \mathcal{L}^*$.

Nous allons maintenant montrer que la mesure extérieure de Lebesgue est une mesure extérieure métrique. Nous considérons bien entendu l'espace métrique (\mathbb{R}^d, d) , où d est la distance euclidienne.

Théorème 1.4.10. La mesure extérieure de Lebesgue est une mesure extérieure métrique.

Démonstration. Soient A et B deux sous-ensembles de \mathbb{R}^d tels que d(A,B) > 0. On a $\mathcal{L}^*(A \cup B) \leq \mathcal{L}^*(A) + \mathcal{L}^*(B)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $(R_k)_k$ une suite d'intervalles compacts tels que $A \cup B \subset \bigcup_k R_k$ et

$$\sum_{k} \operatorname{Vol}(R_k) < \mathcal{L}^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Quitte à subdiviser les intervalles trop grands, nous pouvons supposer que diam (R_k) $< d(A, B) \, \forall k$. Dès lors, la suite $(R_k)_k$ peut être décomposée en deux sous-suites $(A_k)_k$ et $(B_k)_k$ telles que $A \cap B_k = \emptyset$ et $B \cap A_k = \emptyset \, \forall k$. Donc,

$$\mathcal{L}^*(A) + \mathcal{L}^*(B) \leqslant \sum_k \operatorname{Vol}(A_k) + \sum_k \operatorname{Vol}(B_k) = \sum_k \operatorname{Vol}(R_k) < \mathcal{L}^*(A \cup B) + \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure, puisque ε est arbitraire.

Proposition 1.4.11. La mesure extérieure de Lebesgue est Borel-régulière : tout borélien est mesurable et pour tout ensemble A, il existe un ensemble G_{δ} (donc borélien) B contenant A tel que $\mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}^*(B)$.

Démonstration. Si la mesure extérieure de A n'est pas finie, il suffit de prendre l'espace tout entier pour B. Sinon, étant donné $j \in \mathbb{N}_0$, soit $(U_k^{(j)})_k$ un recouvrement d'intervalles ouverts bornés de A tel que $\sum_k \operatorname{Vol}(U_k^{(j)}) < \mathcal{L}^*(A) + 1/j$. L'ensemble ouvert $U_j = \bigcup_k U_k^{(j)}$ contient A et est tel que

$$\mathcal{L}^*(U_j) \leqslant \sum_k \mathcal{L}^*(U_k^{(j)}) = \sum_k \text{Vol}(U_k^{(j)}) < \mathcal{L}^*(A) + 1/j.$$

L'ensemble $B = \bigcap_j U_j$ est un ensemble G_δ tel que

$$\mathcal{L}^*(A) \leqslant \mathcal{L}^*(B) \leqslant \mathcal{L}^*(U_i) < \mathcal{L}^*(A) + 1/j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, ce qui suffit pour conclure.

Nous pouvons maintenant définir la mesure de Lebesgue.

Définition 1.4.12. La restriction de la mesure extérieure de Lebesgue \mathcal{L}^* aux ensembles \mathcal{L}^* -mesurables est appelée la *mesure de Lebesgue* et est notée \mathcal{L} . Un ensemble \mathcal{L}^* -mesurable est appelé un ensemble Lebesgue-mesurable (ou un ensemble \mathcal{L} -mesurable).

Corollaire 1.4.13. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d est une mesure complète définie notamment sur les ensembles boréliens \mathbb{B}^d .

Proposition 1.4.14. Si $T = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_d)$ est une matrice diagonale de dimension d telle que $c_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, alors on a $\mathcal{L}^*(TE) = \det(T)\mathcal{L}^*(E)$ pour tout ensemble E de \mathbb{R}^d .

En particulier, pour tout ensemble B borélien, on a $\mathcal{L}^*(TB) = \det(T)\mathcal{L}^*(B)$.

Démonstration. Avec les notations relatives à la mesure extérieure de Lebesgue, on vérifie directement que l'on a $(I_k)_k \in \mathscr{C}_E$ si et seulement si $(TI_k)_k \in \mathscr{C}_{TE}$. De là, il vient

$$\mathcal{L}^*(TE) = \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}(I_k') : (I_k')_k \in \mathscr{C}_{TE}\} = \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}(TI_k) : (TI_k)_k \in \mathscr{C}_{TE}\}$$
$$= \inf\{\det(T)\sum_k \operatorname{Vol}(I_k) : (I_k)_k \in \mathscr{C}_E\} = \det(T)\mathcal{L}^*(E).$$

Vu la Proposition 1.1.17, si B est un borélien, alors TB également.

Ainsi, pour tout borélien E et toute constante c > 0, on a $\mathcal{L}(cE) = c^d \mathcal{L}(E)$.

Exercice 1.4.15. Montrer que tout ensemble dénombrable est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Suggestion: Un singleton est un ensemble négligeable pour cette mesure.

Exercice 1.4.16. Montrer que tout ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue est d'intérieur vide, mais que l'inverse n'est pas vrai : il existe des ensembles d'intérieur vide qui ne sont pas négligeables.

Suggestion: Si E est négligeable et d'intérieur non vide, il existe une boule incluse dans E, ce qui est absurde. L'ensemble des irrationnels est d'intérieur vide et son complémentaire dans $\mathbb R$ est négligeable.

Exercice 1.4.17. Montrer que si un ensemble est Lebesgue-mesurable, sa mesure n'est pas nécessairement égale à celle de son adhérence.

Suggestion: Considérer l'ensemble des nombres rationnels.

Exercice 1.4.18. Montrer qu'une droite du plan est négligeable.

Suggestion: C'est évident si la droite est parallèle à un des axes, c'est-à-dire si elle admet une équation de la forme y=c ou x=c pour une constante c. Si ce n'est pas le cas, elle admet une équation de la forme y=ax+b avec a non nul. Il suffit de montrer qu'un segment est de mesure nulle. Traitons le cas a>0, le cas a<0 se traitant de même. Quitte à opérer un translation, il suffit de montrer que le segment \mathcal{S} d'extrémités (0,0) (1,a) est de mesure nulle. Bien entendu $I_0=[0,1]\times[0,a]$ appartient à $\mathscr{C}_{\mathcal{S}}$. De là, les intervalles $I_{1,1}=[0,1/2]\times[0,a/2]$ et $I_{1,2}=[1/2,1]\times[a/2,a]$ forment un recouvrement de \mathcal{S} . Chacun de ces intervalles peut être découpé en deux intervalles de même volume pour former un recouvrement de \mathcal{S} . Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on peut ainsi construire 2^k intervalles $I_{k,1},\ldots I_{k,2^k}$ tels que $\operatorname{Vol}(I_{k,j})=a/2^{2k}$ et la suite finie $(I_{k,j})_j$ forme un recouvrement de \mathcal{S} . On a donc $\mathcal{L}(\mathcal{S})\leqslant a/2^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, ce qui suffit.

Exercice 1.4.19. Montrer qu'un cercle du plan est négligeable.

Suggestion: Il suffit de montrer que le quart de cercle d'équation $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (r > 0) est de mesure nulle. Considérons des intervalles deux à deux disjoints de la forme $I_{k,n} = I_1 \times I_2$, avec

$$I_1 = [2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]$$

et $\operatorname{Vol}(I_2) = \operatorname{Vol}(I_1)$ $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$. Estimons le nombre d'intervalles de la forme $I_{k,n}$ qui intersectent le quart de cercle. L'équation implique qu'il en existe au plus

$$N_k(n) = 2^k \lceil \sqrt{r^2 - 2^{-2k}n^2} - \sqrt{r^2 - 2^{-2k}(n+1)^2} \rceil + 1,$$

pour autant que les radicands aient un sens (sinon ce nombre est zéro), avec $\lceil x \rceil = \inf\{n \in \mathbb{N} : x \leq n\}$. Pour k assez grand, $N_k(n)$ est majoré par 2. Ainsi pour k fixé, en faisant varier n entre 0 et $\lceil r \rceil 2^k - 1$, il faut au plus $N_k(n) \lceil r \rceil 2^k \leq \lceil r \rceil 2^{k+1}$ de ces cubes pour recouvrir le quart de cercle pour k suffisamment grand. Puisque $\operatorname{Vol}(I_{k,n}) = 2^{-2k}$, on peut conclure.

Exercice 1.4.20. Montrer que si \mathcal{T} est un triangle rectangle de sommets (x, y), (x + b, y) et (x, y + h) (b, h > 0), alors $\mathcal{L}(\mathcal{T}) = bh/2$.

Suggestion : Bien entendu, un triangle peut être considéré comme un compact de \mathbb{R}^2 . Par translation et dilatation, on peut se ramener au triangle de sommets (0,0), (1,0) et (0,1). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, n-1\}$, posons

$$I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[0, 1 - \frac{k}{n}\right].$$

On a $(I_k)_{k=0}^n \in \mathscr{C}_{\mathcal{T}}$ et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Vol}(I_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{n}) = \frac{1}{n} (n - \frac{1}{n} \frac{n(n-1)}{2}) = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n},$$

ce qui implique $\mathcal{L}(\mathcal{T}) \leq 1/2$.

Maintenant, considérons les intervalles

$$I'_{k} = \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} [\times [0, 1 - \frac{k}{n}],$$

pour $k \in \{1, ..., n\}$. On a $\bigcup_k I'_k \subset \mathcal{T}$ et, comme précdemment,

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Vol}(I'_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{k}{n}) = \frac{1}{2} \frac{n-1}{n}.$$

On doit donc avoir $\mathcal{L}(\mathcal{T}) \geqslant 1/2$.

Exercice 1.4.21. Montrer que dans la Notation 1.4.2, on peut remplacer les intervalles par des intervalles cubiques.

Suggestion : Par densité, on peut supposer que les extrémités des intervalles intervenant dans le recouvrement sont des nombres rationnels. De là on peut conclure, puisqu'un tel intervalle peut être découpé en un nombre fini de cubes.

Exercice 1.4.22. Montrer que si $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application lipschitizienne, l'image par f de tout ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue est encore négligeable. Suggestion: Il existe une constante c_f telle que $\operatorname{diam}(f(C)) \leqslant c_f \operatorname{diam}(C)$, pour tout intervalle cubique C de \mathbb{R}^d . Dès lors f(C) peut être recouvert par un translaté de c_0C , avec $c_0 = \sqrt{d} \, c_f$. Si N est une partie négligeable de \mathbb{R}^d (donc Lebesgue-mesurable), pour $\varepsilon > 0$, soit $(C_k)_k$ un recouvrement de N par des intervalles cubiques de \mathbb{R}^d tel que $\sum_k \operatorname{Vol}(C_k) < \varepsilon/c_0^d$. Nous savons que f(N) peut être recouvert par des cubes $(C_k')_k$ tels que $\sum_k \operatorname{Vol}(C_k') = c_0^d \sum_k \operatorname{Vol}(C_k) < \varepsilon$, ce qui suffit.

Le résultat précédent sera généralisé par la proposition 6.2.19.

Exercice 1.4.23. Montrer l'image d'un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue par une une application de classe C^1 est encore négligeable.

Suggestion : Une application de classe C^1 est localement lipschitzienne. Qui plus est, \mathbb{R}^d est union dénombrable de compacts.

Exercice 1.4.24. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

 $\{x \in [0,1] : \text{il existe un nombre infini de } p/q \text{ (avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux)} \}$

tels que
$$|x - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

est Lebesgue-négligeable.

Suggestion: Considérons les ensembles

$$A_q = [0,1] \cap \bigcup_{p=0}^{q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \right],$$

pour $q \in \mathbb{N}_0$. On a $\mathcal{L}(A_q) = 2(q+1)/q^{2+\varepsilon}$ et par conséquent $\sum_q \mathcal{L}(A_q) < \infty$. Par le théorème de Borel-Cantelli (théorème 1.2.6), on a $\mathcal{L}(\overline{\lim}_q A_q) = 0$, ce qui suffit.

Pour considérer le cas $\varepsilon = 0$, nous aurons besoin d'une forme simple du théorème d'approximation de Dirichlet.

Proposition 1.4.25 (Dirichlet). Si x est un nombre réel, pour tout nombre entier $n \ge 2$, il existe deux entiers p et q (non nécessairement premiers entre eux) avec $1 \le q < N$ tels que |qx - p| < 1/n.

Démonstration. On peut supposer x strictement positif. Soit $[x] = \sup\{m \in \mathbb{N} : m \leq x\}$ la partie entière de x et $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire. Posons $x_k = \{kx\}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, x_n = 1$ et considérons les intervalles]k/n, (k+1)/n] pour $0 \leq k < n$. Par construction, il existe deux nombres x_k et x_j qui appartiennent au même intervalle.

Si
$$x_i = 1$$
, il vient

$$|kx - ([kx] + 1)| = |x_k - x_j| < 1/n$$

et l'énoncé est vérifié pour q = k et p = [kx] + 1.

Sinon, on peut supposer avoir $j < k \le n-1$. Il vient alors

$$|(k-j)x - ([kx] - [jx])| = |x_k - x_j| < 1/n,$$

ce qui indique que les nombres q = k - j et p = [kx] - [jx] conviennent.

Exercice 1.4.26. Si x est irrationnel, montrer qu'il existe un nombre infini d'entiers p et q premiers entre eux tels que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.\tag{1.9}$$

Suggestion: Par le théorème de Dirichlet, il existe deux entiers p et q tels que

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn} < \frac{1}{q^2}.$$

Dès lors, il existe une infinité de nombres entiers p et q tels que l'inégalité (1.9) est vérifiée. En effet, si |qx-p| est égal à $\varepsilon>0$, on obtient un nouveau couple d'entiers en choisissant $n\in\mathbb{N}$ tel que $1/n<\varepsilon$ dans l'énoncé dut théorème de Dirichlet. Supposons que p/q ne prenne qu'un nombre fini de valeurs sous forme irréductible. Il existe donc deux suites d'entiers $(p_k)_k$ et $(q_k)_k$ tels que $p_k/q_k=p/q$ pour tout k avec $q_k\to\infty$ et

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q_k^2}.$$

En passant à la limite, on obtient x = p/q, ce qui est absurde.

Exercice 1.4.27. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

 $\{x \in [0,1] : \text{il existe un nombre infini de } p/q \text{ (avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux)}$

tels que
$$|x - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$$

est de mesure de Lebesgue pleine, c'est-à-dire de mesure égale à la mesure de [0,1]. Suggestion: L'ensemble des nombre rationnels étant dénombrable, il est négligeable pour la mesure de Lebesgue. On conclut aussitôt grâce à l'exercice précédent.

Propriétés de la mesure de Lebesgue

Nous allons essentiellement nous intéresser à l'unicité de la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.4.28. La mesure de Lebesgue est régulière 5 : pour tout sous-ensemble A de \mathbb{R}^d ,

- on a $\mathcal{L}^*(A) = \inf \{ \mathcal{L}(U) : U \text{ est ouvert, } A \subset U \},$
- si de plus A est mesurable, on a $\mathcal{L}(A) = \sup \{ \mathcal{L}(K) : K \text{ est compact, } K \subset A \}.$

Démonstration. La propriété de monotonie implique $\mathcal{L}^*(A) \leq \inf\{\mathcal{L}(U) : U \text{ est ouvert, } A \subset U\}$ et $\mathcal{L}(A) \geq \sup\{\mathcal{L}(K) : K \text{ est compact, } K \subset A\}$.

Démontrons la première assertion, c'est-à-dire

$$\inf\{\mathcal{L}(U): U \text{ est ouvert, } A \subset U\} \leqslant \mathcal{L}^*(A).$$

Si $\mathcal{L}^*(A) = \infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $\varepsilon > 0$ et $(R_k)_k$ une suite d'intervalles ouverts tels que $A \subset \bigcup_k R_k$ et $\sum_k \operatorname{Vol}(R_k) < \mathcal{L}^*(A) + \varepsilon$. On a

$$\mathcal{L}(\bigcup_{k} R_{k}) \leqslant \sum_{k} \mathcal{L}(R_{k}) = \sum_{k} \operatorname{Vol}(R_{k}) < \mathcal{L}^{*}(A) + \varepsilon,$$

^{5.} Voir Définition 8.1.2.

ce qui prouve le première égalité, puisque $\cup_k R_k$ est ouvert.

Passons maintenant à la seconde inégalité :

$$\mathcal{L}(A) \leq \sup \{\mathcal{L}(K) : K \text{ est compact}, K \subset A\}.$$

Supposons d'abord que A est borné. Soit C un ensemble compact comprenant A et $\varepsilon > 0$. Comme précédemment il existe une suite d'intervalles ouverts $(R_k)_k$ telle que $C \setminus A \subset \bigcup_k R_k$ et

$$\mathcal{L}(\bigcup_{k} R_{k}) < \mathcal{L}(C \setminus A) + \varepsilon.$$

Posons $U = \bigcup_k R_k$ et $K = C \setminus U$; ce dernier ensemble est un ensemble compact inclus dans A. On a $C \subset K \cup U$, où l'union est disjointe, et donc

$$\mathcal{L}(C) \leqslant \mathcal{L}(K) + \mathcal{L}(U).$$

Sachant que $\mathcal{L}(C \setminus A) = \mathcal{L}(C) - \mathcal{L}(A)$, les deux dernières inégalités impliquent

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(C) - \mathcal{L}(C \setminus A) \leqslant \mathcal{L}(K) + \mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(C \setminus A) < \mathcal{L}(K) + \varepsilon,$$

ce qui prouve la seconde inégalité lorsque A est borné.

Supposons maintenant que A n'est pas borné. Si $\mathcal{L}(A) = 0$, on conclut aussitôt; sinon, soit c > 0 tel que $\mathcal{L}(A) > c$. Nous allons montrer qu'il existe un sous-ensemble compact K de A tel que $\mathcal{L}(K) > c$. Soit $(A_k)_k$ une suite croissante bornée et mesurable convergeant vers A (on peut par exemple prendre $A_k = A \cap \{x : |x| \le k\}$). Vu la propriété de continuité des mesures, $\mathcal{L}(A) = \lim_k \mathcal{L}(A_k)$ Soit k_0 le premier indice tel que $\mathcal{L}(A_{k_0}) > c$. Puisque A_{k_0} est borné, il existe un ensemble compact $K \subset A_{k_0}$ tel que $\mathcal{L}(K) > c$. Puisque $K \subset A$ et que $K \subset$

Remarque 1.4.29. Tout compact étant fermé, on a bien sûr

$$\sup\{\mathcal{L}(K): K \text{ est compact}, K \subset A\} \leq \sup\{\mathcal{L}(F): F \text{ est fermé}, F \subset A\}.$$

Cela étant, si A est un ensemble mesurable, la monotonie des mesures implique

$$\sup\{\mathcal{L}(F): F \text{ est ferm\'e}, F \subset A\} \leqslant \mathcal{L}(A).$$

Nous venons donc de montrer que l'on a

$$\mathcal{L}(A) = \sup \{ \mathcal{L}(F) : F \text{ est fermé, } F \subset A \}.$$

Remarque 1.4.30. Dans \mathbb{R} , on peut procéder d'une manière légèrement différente pour définir \mathcal{L}^* en étendant l'application Vol aux ouverts U de \mathbb{R} comme suit :

$$\operatorname{Vol}(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_k),$$

où $(I_k)_k$ est une suite d'intervalles deux à deux disjoints dont l'union est U, l'existence de cette suite étant fournie par la Proposition A.2.2. On peut alors définir la mesure extérieure de Lebesgue par régularité :

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf\{ \text{Vol}(U) : A \subset U, \ U \text{ ouvert} \}.$$

Vu la Proposition A.2.2, cette approche est équivalente à celle proposée ici.

Exercice 1.4.31. Montrer que pour une partie A de \mathbb{R} , on peut remplacer les suites d'intervalles compacts définissant \mathscr{C}_A par des intervalles ouverts deux à deux disjoints. Suggestion: Soit \mathscr{C}'_A la collection des suites d'intervalles ouverts deux à deux disjoints recouvrant A. Pour tout $\varepsilon > 0$, vu la régularité de \mathcal{L}^* , il existe un ensemble ouvert U contenant A tel que $\mathcal{L}(U) < \mathcal{L}^*(A) + \varepsilon$. Par la Proposition A.2.2, il existe une suite $(I_k)_k$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints tels que $\mathcal{L}(U) = \sum_k \mathcal{L}(I_k)$. On a donc

$$\sum_{k} \mathcal{L}(I_k) < \mathcal{L}^*(A) + \varepsilon.$$

Bien entendu, cette suite d'intervalles appartient à \mathscr{C}'_A et il vient

$$\inf\{\sum_{k} \operatorname{Vol}(I_k) : (I_k)_k \in \mathscr{C}'_A\} \leqslant \mathcal{L}^*(A).$$

L'autre inégalité étant triviale, on peut conclure.

Proposition 1.4.32. Si μ et ν sont deux mesures sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ qui sont égales sur les ouverts de \mathbb{R}^d et si μ est une mesure régulière (au sens de la Proposition 1.4.28), alors ces mesures sont égales : on a $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathbb{B}^d$.

Démonstration. Pour tout ensemble A de \mathbb{B}^d , si U est un ouvert de \mathbb{R}^d comprenant A, alors

$$\nu(A) \leqslant \nu(U) = \mu(U).$$

Ainsi, puisque μ est une mesure régulière, il vient $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

Maintenant, étant donné un fermé F de \mathbb{R}^d , soit $(U_k)_k$ une suite d'ouverts décroissante de \mathbb{R}^d telle que $\cap_k U_k = F$ (voir Proposition 1.1.14). On a

$$\mu(F) = \lim_{k} \mu(U_k) = \lim_{k} \nu(U_k) = \nu(F).$$

De là, pour tout borélien A de \mathbb{R}^d , si K est un compact inclus dans A, il vient

$$\mu(K) = \nu(K) \leqslant \nu(A),$$

ce qui implique $\mu(A) \leq \nu(A)$.

Remarque 1.4.33. De la même manière, si, dans la proposition précédente, on n'a pas l'égalité sur les ouverts, mais sur les fermés, en considérant une suite croissante de fermés dont l'union est un ouvert, on obtient l'égalité de ces mesures pour les ouverts et donc pour tous les boréliens.

Un cube dyadique semi-ouvert de \mathbb{R}^d est un ensemble de la forme

$$C_{k,n} = [n2^{-k}, (n+1)2^{-k}] = \prod_{j=1}^{d} [n_j 2^{-k}, (n_j+1)2^{-k}]$$

avec $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. Si \mathscr{C}_k désigne la collection des cubes de la forme $C_{k,n}$, il est aisé de montrer que quel que soit k, \mathscr{C}_k est une partition dénombrable de \mathbb{R}^d .

Lemme 1.4.34. Tout ensemble ouvert de \mathbb{R}^d est l'union dénombrable de cubes dyadiques semi-ouverts deux à deux disjoints.

Démonstration. Soit U un ensemble ouvert de \mathbb{R}^d . La famille \mathscr{F} de cubes constituant U peut être construite comme suit. On commence avec l'ensemble vide et on ajoute à l'étape k ($k \in \mathbb{N}_0$) les cubes de \mathscr{C}_k inclus dans U, disjoints de ceux déjà placés dans \mathscr{F} . Il est clair que \mathscr{F} est une famille dénombrable de cubes dyadiques semi-ouverts disjoints dont l'union est incluse dans U. Montrons que l'ensemble U est inclus dans l'union. Soit $x \in U$ et pour k fixé, soit C_k le cube de la forme $C_{k,n}$ contenant x. Puisque U est ouvert, les cubes C_k sont inclus dans U pour k suffisamment grand. Soit k_0 le plus petit de ces indices. On a $C_{k_0} \in \mathscr{F}$ et donc x appartient à l'union des cubes de \mathscr{F} .

Proposition 1.4.35. La mesure de Lebesgue est la seule mesure définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ qui associe à chaque cube dyadique semi-ouvert son volume.

Démonstration. Nous savons déjà que la mesure de Lebesgue associe à un cube dyadique semi-ouvert son volume. Supposons que μ est une mesure définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ qui associe à un cube dyadique semi-ouvert son volume et montrons que $\mu = \mathcal{L}$. Supposons d'abord que U est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^d . Le Lemme 1.4.34 implique l'existence d'une suite de cubes dyadiques semi-ouverts deux à deux disjoints $(C_k)_k$ telle que $U = \bigcup_k C_k$ et donc

$$\mu(U) = \sum_{k} \mu(C_k) = \sum_{k} \mathcal{L}(C_k) = \mathcal{L}(U),$$

ce qui montre que μ et \mathcal{L} sont égaux sur les ensembles ouverts de \mathbb{R}^d .

Soit A un ensemble borélien de \mathbb{R}^d . Si U est un ensemble ouvert comprenant A, alors $\mu(A) \leq \mu(U) = \mathcal{L}(U)$, ce qui implique

$$\mu(A) \leq \inf \{ \mathcal{L}(U) : U \text{ est ouvert, } A \subset U \}.$$

La Proposition 1.4.28 implique

$$\mu(A) \leqslant \mathcal{L}(A). \tag{1.10}$$

Supposons que A est un ensemble borné et soit V un ensemble borné ouvert contenant A. L'inégalité (1.10) implique

$$\mu(V) = \mu(A) + \mu(V \setminus A) \leqslant \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(V \setminus A) = \mathcal{L}(V) = \mu(V).$$

Puisque $\mu(A) \leq \mathcal{L}(A)$ et $\mu(V \setminus A) \leq \mathcal{L}(V \setminus A)$, ces quantités étant finies, on a $\mu(A) = \mathcal{L}(A)$. Si A n'est pas borné, soit $A_k = A \cap B(0, k)$; les ensembles A_k sont des ensembles boréliens bornés et la suite $(A_k)_k$ est croissante vers A, donc

$$\mu(A) = \lim_{k} \mu(A_k) = \lim_{k} \mathcal{L}(A_k) = \mathcal{L}(A),$$

comme attendu. \Box

On peut aussi directement utiliser la Proposition 1.4.32.

Démonstration. Si μ est une autre mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ qui associe à un cube dyadique semi-ouvert son volume, tout comme dans la démonstration précécente, on montre que $\mu(U) = \mathcal{L}(U)$, pour tout ouvert U de \mathbb{R}^d . On a ainsi $\mu(A) = \mathcal{L}(A)$ pour tout $A \in \mathbb{B}^d$, vu la Proposition 1.4.32.

Proposition 1.4.36. Si μ est une mesure non-nulle sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$, invariante par translation et finie sur les ensembles boréliens bornés, alors il existe une constante c telle que $\mu(A) = c\mathcal{L}(A)$, $\forall A \in \mathbb{B}^d$.

Démonstration. Soit $C=[0,1[^d$ et posons $c=\mu(C)$. Par hypothèse, $c<\infty$ et c>0, sinon, en exprimant \mathbb{R}^d comme une union de translatés de C, on aurait $\mu(\mathbb{R}^d)=0$. Soit ν la mesure sur $(\mathbb{R}^d,\mathbb{B}^d)$ définie par l'égalité $\nu(A)=\mu(A)/c$. Cette mesure est invariante par translation et associe à C sa mesure de Lebesgue, c'est-à-dire 1. Si C_k est un cube dyadique semi-ouvert dont les côtés sont de longueur 2^{-k} , alors C est l'union de 2^{dk} translatés de C_k . De là,

$$2^{dk}\nu(C_k) = \nu(C) = \mathcal{L}(C) = 2^{dk}\mathcal{L}(C_k),$$

ce qui implique que les mesures ν et \mathcal{L} sont égales sur tous les cubes de type C_k . La Proposition 1.4.35 implique alors $\nu = \mathcal{L}$, ce qui suffit.

Lemme 1.4.37. Si T est une matrice inversible, soit $C = [0, 1]^d$ et

$$\rho = \frac{\mathcal{L}(TC)}{\mathcal{L}(C)}.$$

Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d , on a $\mathcal{L}^*(TA) = \rho \mathcal{L}^*(A)$ et si cet ensemble est borélien, $\mathcal{L}(TA) = \mathcal{L}(A)$.

Démonstration. Pour $C_k = [0, 1 - 1/k]^d$, on a $C = \bigcup_k C_k$ et $TC = \bigcup_k TC_k$. Puisque TC_k est compact pour tout indice k, TC est un ensemble F_{σ} , donc borélien.

Si U est un ouvert de \mathbb{R}^d , montrons que l'on a $\mathcal{L}(TU) = \rho \mathcal{L}(U)$. Nous savons que U est union dénombrable de cubes dyadiques deux à deux disjoints $C_k : U = \bigcup_k C_k$. Puisqu'un tel cube C_k est un translaté-dilaté du cube C, on peut supposer avoir $C_k = x_k + 2^{-j_k}C$, avec $j_k \in \mathbb{N}$, pour tout k. Par conséquent, on a

$$\mathcal{L}(TC_k) = \mathcal{L}(Tx_k + 2^{-j_k}TC) = \mathcal{L}(2^{-j_k}TC) = 2^{-dj_k}\mathcal{L}(TC) = \rho 2^{-dj_k}\mathcal{L}(C)$$
$$= \rho \mathcal{L}(2^{-j_k}C) = \rho \mathcal{L}(C_k).$$

On a donc

$$\mathcal{L}(TU) = \mathcal{L}(\cup_k TC_k) = \sum_k \mathcal{L}(TC_k) = \rho \sum_k \mathcal{L}(C_k) = \rho \mathcal{L}(\cup_k C_k) = \rho \mathcal{L}(U).$$

Maintenant, si A est une partie de \mathbb{R}^d , on a

$$\mathcal{L}^*(TA) = \inf\{\mathcal{L}(U) : U \text{ ouvert, } TA \subset U\} = \inf\{\mathcal{L}(TV) : V \text{ ouvert, } A \subset V\}$$
$$= \rho \inf\{\mathcal{L}(V) : V \text{ ouvert, } A \subset V\} = \rho \mathcal{L}^*(A),$$

où on a posé $V = T^{-1}U$.

On peut conclure, puisque, vu la Proposition 1.1.17, A est borélien si et seulement si TA l'est.

Si on ne s'intéresse qu'à la mesure, on peut simplifier la démonstration.

Remarque 1.4.38. Pour l'énoncé précédent, il est en clair que la mesure $A \mapsto \mathcal{L}(TA)$ définie pour tout A borélien est invariante par translation, vu la linéarité de T. Par conséquent, on doit avoir $\mathcal{L}(TA) = \rho \mathcal{L}(A)$.

Proposition 1.4.39. Pour tout $T \in GL_d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{L}^*(TA + x) = |\det(T)|\mathcal{L}^*(A),$$

pour toute partie A de \mathbb{R}^d . En particulier, pour tout $A \in \mathbb{B}^d$, on a $\mathcal{L}(TA+x) = |\det(T)|\mathcal{L}(A)$.

Démonstration. Vu l'invariance par translation et le lemme précédent, nous devons prouver que l'on a $\rho = |\det(T)|$.

Si T est une matrice orthogonale, soit B la boule compacte unité centrée à l'origine : $B = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| \leq 1\}$. Puisque T préserve la norme, on a TB = B et donc

$$\mathcal{L}(TB) = \mathcal{L}(B) > 0.$$

Si T est une matrice symétrique définie positive, soit R une matrice orthogonale telle que $R^tTR = D$, où D est une matrice diagonale dont les éléments sont strictements positifs. Pour $C = [0, 1]^d$, on a

$$\mathcal{L}(TC) = \mathcal{L}(RDR^tC) = \mathcal{L}(DR^tC) = \det(D)\mathcal{L}(R^tC) = |\det(T)|\mathcal{L}(C).$$

Pour le cas général, par le théorème de décomposition polaire, on a T=RS, où R est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive et

$$\mathcal{L}^*(TA) = \mathcal{L}^*(RSA) = \mathcal{L}^*(SA) = \det(S)\mathcal{L}^*(A) = |\det(T)|\mathcal{L}^*(A),$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 1.4.40. Montrer qu'un hyperplan de \mathbb{R}^d est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Suggestion: Utiliser la Proposition 1.4.39 pour se ramener à un hyperplan de la forme

$$\mathcal{H}_k = \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_k = 0\},\$$

avec $k \in \{1, ..., d\}$.

Proposition 1.4.41. Si T est une matrice de dimension d qui n'admet pas d'inverse, alors $T\mathbb{R}^d$ est négligeable et donc $\mathcal{L}(TE) = |\det(T)|\mathcal{L}^*(E)$ pour tout ensemble E de \mathbb{R}^d .

 $D\acute{e}monstration$. Si T n'est pas inversible, $T\mathbb{R}^d$ est inclus dans un hyperplan de \mathbb{R}^d et donc négligeable. Puisque la mesure de Lebesgue est complète, on peut conclure.

Exercice 1.4.42. Montrer que dans la définition de la mesure de Lebesgue, on peut remplacer les intervalles compacts recouvrant l'ensemble par des cubes dyadiques semi-ouverts deux à deux disjoints.

Suggestion : Si A est un ensemble mesurable de mesure de Lebesgue finie, pour $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant A tel que $\mathcal{L}(U) < \mathcal{L}(A) + \varepsilon$. Cela suffit, puisque U est l'union dénombrable d'une suite de cubes dyadiques semi-ouverts deux à deux disjoints. Si A est de mesure infinie, tout ensemble ouvert contenant A est de mesure infinie et on peut conclure pareillement.

Existence d'ensembles non-mesurables

Tous les sous-ensembles de \mathbb{R}^d ne sont pas \mathcal{L}^* -mesurables. Le premiers exemples semblent avoir été obtenus dans [4, 24, 29, 30]. Remarquons que cette assertion repose sur l'axiome du choix. Il n'est pas possible d'éviter son recours, comme l'a montré Solovay [25].

Donnons la construction dûe à Vitali ⁶.

Théorème 1.4.43. Il existe un sous-ensemble de]0,1[qui n'est pas un ensemble \mathcal{L}^* -mesurable

Démonstration. Considérons le groupe quotient \mathbb{R}/\mathbb{Q} : sur \mathbb{R} , définissons la relation $\cdot \sim \cdot$ par $x \sim y$ si et seulement si $x-y \in \mathbb{Q}$; il s'agit bien entendu d'une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence pour la relation $x \sim y$ est de la forme $\mathbb{Q} + x$ pour un $x \in \mathbb{R}$ et est donc dense dans \mathbb{R} . L'ensemble \mathbb{Q} est lui-même une classe d'équivalence; de plus, comme chaque classe d'équivalence est dénombrable, l'ensemble des classes d'équivalence (qui peut être assimilé à un sous-ensemble de \mathbb{R}) n'est pas dénombrable. Puisque les classes sont disjointes et intersectent toutes l'ensemble]0,1[, l'axiome du choix entraîne l'existence d'un ensemble $N \subset]0,1[$ qui contient un et un seul représentant de chaque classe d'équivalence. Montrons que N n'est pas \mathcal{L}^* -mesurable.

Soit $(r_k)_k$ l'ensemble des rationnels de]-1, 1[et posons, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $N_k = N + r_k$. Les ensembles N_k sont disjoints. De fait, si $x \in N_k \cap N_j$, il existe $n, m \in N$ tels que $n + r_k = m + r_j$. Dès lors $n \sim m$, ce qui entraı̂ne, puisque chaque représentant est unique dans N, n = m et donc k = j. Puisque $N \subset]0, 1[$ et $r_k \in]-1, 1[\forall k, \cup_k N_k \subset]-1, 2[$. Enfin, montrons que $]0, 1[\subset \cup_k N_k$. Soit $x \in]0, 1[$ et n l'élément de N tel que $x \sim n$. Puisque $x, n \in]0, 1[$, x - n est un nombre rationnel de]-1, 1[et il existe donc un indice k_0 tel que $r_{k_0} = x - n$. De là, $x \in N_{k_0}$.

Supposons que N est un ensemble \mathcal{L}^* -mesurable. Les translatés N_k sont alors aussi mesurables et puisque ces ensembles sont disjoints, $\mathcal{L}(\cup_k N_k) = \sum_k \mathcal{L}(N_k)$. De plus, puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation, $\mathcal{L}(N_k) = \mathcal{L}(N) \ \forall k$. Ainsi, si $\mathcal{L}(N) = 0$, alors $\mathcal{L}(\cup_k N_k) = 0$, ce qui est impossible, puisque $\mathcal{L}(]0,1[) \leqslant \mathcal{L}(\cup_k N_k)$. Si $\mathcal{L}(N) \neq 0$, on a $\mathcal{L}(\cup_k N_k) = \infty$, ce qui est également impossible, puisque $\mathcal{L}(\cup_k N_k) \leqslant \mathcal{L}(]-1,2[)$. Au final, si on suppose que N est mesurable, on obtient une contradiction.

Si un ensemble Lebesgue-mesurable est inclus dans l'ensemble non-mesurable dont l'existence est affirmée par le théorème 1.4.43, alors il est nécessairement de mesure nulle.

Remarque 1.4.44. Soit E un ensemble Lebesgue-mesurable inclus dans l'ensemble nonmesurable relatif au théorème 1.4.43. Avec les notations de la démonstration du théorème, soit $E_k = E + r_k$ pour $k \in \mathbb{N}_0$. Puisque E est mesurable, E_k également et $\mathcal{L}(E_k) = \mathcal{L}(E)$. De plus, on a $E_j \cap E_k = \emptyset$ pour $j \neq k$, puisque E_k est une partie de N_k . Il vient alors $\mathcal{L}(]-1,2[) \geqslant \mathcal{L}(\cup_k E_k) = \sum_k \mathcal{L}(E_k)$, ce qui permet d'affirmer que l'on a $\mathcal{L}(E) = 0$.

On peut montrer sans difficulté que tout ensemble Lebesgue-mesurable de mesure non nulle contient un ensemble non-mesurable.

Remarque 1.4.45. Soit E est un ensemble mesurable tel que $\mathcal{L}(E) > 0$. Puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation, quitte à prendre une sous-ensemble de E, on peut supposer avoir $E \subset]0,1[$. Pour tout indice naturel non nul k, soit $E_k = E \cap N_k$, où N_k est défini dans la démonstration du théorème 1.4.43. Grâce à la remarque 1.4.44, nous

^{6.} L'ensemble construit dans la démonstration du théorème 1.4.43 est appelé un ensemble de Vitali.

savons que si E_k est mesurable, alors $\mathcal{L}(E_k) = 0$, puisque E_k est une partie de N_k , qui est lui-même un translaté de N. Ces ensembles sont deux à deux disjoints et la relation $]0,1[\subset \cup_k N_k$ implique $\cup_k E_k = E$. Si chaque E_k est mesurable, il vient

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(\cup_k E_k) = \sum_k \mathcal{L}(E_k) = 0,$$

ce qui est absurde.

Passons à la seconde construction. Le résultat suivant s'avérera utile.

Proposition 1.4.46 (Steinhaus). Si E est un sous-ensemble \mathcal{L}^* -mesurable de \mathbb{R}^d tel que $\mathcal{L}(E) > 0$, alors E - E contient une boule ouverte centrée à l'origine.

Démonstration. Puisque la mesure de Lebesgue est régulière (proposition 1.4.28), il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que $\mathcal{L}(K) > 0$. Puisque $K - K \subset E - E$, il suffit de démontrer la proposition pour l'ensemble K.

Maintenant, puisque $x \in K - K$ si et seulement si K intersecte x + K, il suffit de prouver que, pour |x| suffisamment petit, K intersecte x + K.

Par la proposition 1.4.28, il existe un ensemble ouvert U tel que $K \subset U$ et $\mathcal{L}(U) < 2\mathcal{L}(K)$. La distance entre un compact non-vide et un fermé non-vide (ici U^c) étant réalisée, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| < \varepsilon$ implique $K + x \subset U$. Soit un tel point x; si K + x est disjoint de K, le fait que \mathcal{L} soit invariant par translation et la relation $K + x \subset U$ impliquent

$$2\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}(K) + \mathcal{L}(K+x) = \mathcal{L}(K \cup (K+x)) \leqslant \mathcal{L}(U).$$

Ces ensembles ne peuvent donc être disjoints et $x \in K - K$, ce qui suffit.

Cette proposition peut être utilisée pour obtenir un résultat relativement fort.

Proposition 1.4.47. Il existe un sous-ensemble E de \mathbb{R} tel que tout ensemble \mathcal{L}^* -mesurable inclus dans E ou E^c soit de mesure de Lebesgue nulle.

 $D\acute{e}monstration$. Définissons d'abord les sous-ensembles $G,\,G_p$ et G_i de \mathbb{R} comme suit,

$$G = \{r + n\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$G_p = \{r + 2n\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$G_i = \{r + (2n+1)\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

On constate immédiatement que G et G_p sont des sous-groupes de $\mathbb R$ pour l'addition, que G_p et G_i sont disjoints, avec $G_i = G_p + \sqrt{2}$ et $G = G_p \cup G_i$. Soit alors la classe d'équivalence $\cdot \sim \cdot$ sur $\mathbb R$ définie par $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in G$. Grâce à l'axiome du choix, on peut construire un sous-ensemble R de $\mathbb R$ qui contient exactement un représentant de chaque classe d'équivalence pour la relation $\cdot \sim \cdot$ et posons $E = R + G_p$.

Soit A un sous-ensemble \mathcal{L}^* -mesurable de E tel que $\mathcal{L}(A) > 0$. La proposition 1.4.46 implique l'existence d'un intervalle $]-\varepsilon,\varepsilon[$ inclus dans A-A et donc dans E-E. Puisque G_i est dense dans \mathbb{R} , il est d'intersection non-vide avec l'intervalle $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et donc aussi avec E-E. Un point de cette intersection s'écrit $e-e'+g_p=g_i$, avec $e,e'\in R,\,g_p\in G_p$ et $g_i\in G_i$. Cette égalité ne peut avoir lieu puisque, par définition de $R,\,e-e'\notin G$. Ainsi, il n'existe pas de tel ensemble A et chaque sous-ensemble \mathcal{L}^* -mesurable de E est de mesure de Lebesgue nulle.

Maintenant, en remarquant que $E^c = R + G_i$, on a $E^c = E + \sqrt{2}$. Ainsi, tout sousensemble \mathcal{L}^* -mesurable de E^c est de la forme $A + \sqrt{2}$, pour un sous-ensemble \mathcal{L}^* -mesurable A de E. Il s'ensuit que E^c ne contient pas d'ensemble \mathcal{L}^* -mesurable de mesure de Lebesgue non-nulle, ce qui termine la preuve.

Il va de soi que l'ensemble E présenté dans la proposition est précédente n'est pas \mathcal{L}^* -mesurable.

Remarque 1.4.48. L'ensemble E de la proposition 1.4.47 ne peut être \mathcal{L}^* -mesurable, sinon E et E^c seraient chacun de mesure nulle, ce qui est absurde. Ainsi cette proposition implique un résultat du type 1.4.43. La proposition 1.4.47 peut aussi être reformulée en termes de mesure intérieure : il existe un sous-ensemble E de \mathbb{R} tel que $\mathcal{L}_*(E) = \mathcal{L}_*(E^c) = 0$

Donnons un troisième exemple, dû à Sierpiński; cette méthode utilise les filtres. Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 1.4.49. Si $E \subset \mathbb{R}$ est un ensemble \mathcal{L} -mesurable tel que $\mathcal{L}(E) \in]0, \infty[$, alors pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe un intervalle I tel que $\mathcal{L}(E \cap I) > \theta \mathcal{L}(I)$.

Démonstration. Vu la régularité de la mesure de Lebesgue, on peut supposer que E est compact (quitte à choisir un compact K inclus dans E). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie d'intervalles compacts $(I_k)_k$ recouvrant E telle que $\mathcal{L}(\bigcup_k I_k) < \mathcal{L}(E)(1+\varepsilon)$. On peut supposer ces intervalles deux à deux disjoints. On a donc

$$\mathcal{L}(E) \leqslant \sum_{k} \mathcal{L}(E \cap I_{k}) \leqslant \sum_{k} \mathcal{L}(I_{k}).$$

Puisque $\sum_k \mathcal{L}(I_k) < \mathcal{L}(E)(1+\varepsilon)$, il existe un indice k_0 tel que $\mathcal{L}(I_{k_0}) < \mathcal{L}(E \cap I_{k_0})(1+\varepsilon)$, sinon on aurait

$$\sum_{k} \mathcal{L}(I_{k}) \geqslant (1+\varepsilon) \sum_{k} \mathcal{L}(E \cap I_{k}) \geqslant (1+\varepsilon) \mathcal{L}(E).$$

En d'autres termes, on a

$$\mathcal{L}(E \cap I_{k_0}) > \frac{1}{1+\varepsilon} \mathcal{L}(I_{k_0}),$$

ce qui suffit, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Soit maintenant \mathcal{U} un ultrafiltre ⁷ libre ⁸ sur \mathbb{N}_0 et considérons l'application

$$\nu: \wp(\mathbb{N}_0) \to \{0,1\} \quad E \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } E \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Lemme 1.4.50. L'application ν est finiment additive : si A et B sont deux parties disjointes de \mathbb{N}_0 , alors $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

^{7.} L'existence d'un ultrafiltre repose sur l'axiome du choix.

^{8.} Rappelons qu'un ultrafiltre principal ou trivial est un filtre possédant un minimum M; il est donc de la forme $\{E: M \subset E\}$. Un ultrafiltre libre est un ultrafiltre qui n'est pas principal.

Démonstration. On sait que A et B ne peuvent tous les deux appartenir à \mathcal{U} et donc $\nu(A) + \nu(B) \in \{0,1\}$. Si A ou B appartient à \mathcal{U} , $A \cup B$ également (car il contient A et B); on a donc

$$\nu(A) + \nu(B) = 1 = \nu(A \cup B).$$

Si ni A ni B n'appartiennent à \mathcal{U} , alors A^c et B^c appartiennent à \mathcal{U} et donc $A^c \cap B^c$ également. En conséquence, $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ n'appartient pas à \mathcal{U} et on a

$$\nu(A) + \nu(B) = 0 = \nu(A \cup B).$$

On peut conclure, toute les possibilités ayant été explorées.

Remarque 1.4.51. Cette application ne peut être dénombrablement additive, puisque $\nu(\{k\}) = 0$ pour tout k (les ensembles finis ne peuvent appartenir à \mathcal{U}).

Étant donné un nombre réel x, considérons les représentation improre de sa partie fractionnaire en base 2. Si x n'est pas entier, on considère la suite binaire $(x_k)_k$ telle que

$$x - \lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k},$$

pour laquelle $x_k = 1$ pour un nombre infini d'indices k. Si x est un nombre entier, on prend la suite constante $(x_k)_k$ telle que $x_k = 1$ pour tout k, de manière à avoir

$$x = (x - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Soit alors

$$D_x = \{k \in \mathbb{N}_0 : x_k = 1\}$$

et définissons

$$f: \mathbb{R} \to \{0,1\} \quad x \mapsto \nu(D_x).$$

Enfin, considérons l'ensemble

$$S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}.$$

Lemme 1.4.52. Si S est \mathcal{L} -mesurable, alors S et S^c sont de mesures de Lebesgue non nulles et égales.

Démonstration. Un de ces ensembles doit être de mesure non nulle, puisque $S \cup S^c = \mathbb{R}$. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, considérons le symétrique x_* de $x: x_* = 1 - x$. Si x n'est pas un nombre dyadique rationnel (c'est-à-dire si x n'est pas un élément de $\mathbb{Z}[1/2]$), x_* non plus. Plus précisément, si $(x_k)_k$ est la suite binaire définissant la représentation improre de x, la suite binaire $(y_k)_k$ associée à la représentation impropre de x_* est définie par $y_k = 1 - x_k$. Ainsi, D_x^c est infini si et seulement si x n'est pas un dyadique rationnel. Pour un tel x, on a $D_{x_*} = D_x^c$ et donc $f(x_*) = \nu(D_x^c)$. Cela étant, puisque

$$1 = \nu(\mathbb{N}_0) = \nu(D_x) + \nu(D_x^c),$$

on a
$$\nu(D_x^c) = 1 - \nu(D_x)$$
 et donc $f(x_*) = 1 - \nu(D_x) = 1 - f(x)$.

Puisque

$$S^c = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\},\$$

à tout $x \in S$ n'appartenant pas à $\mathbb{Z}[1/2]$, on peut faire corresondre un élément x_* de S^c et inversement. De ce point de vue, S et S^c sont symétriques par rapport à 1/2, à l'exception des éléments de $\mathbb{Z}[1/2]$, qui sont dénombrables. Ainsi, S et S^c doivent être tous les deux de mesure non nulle et égale.

Montrons que S est invariant pour les translations dyadiques.

Lemme 1.4.53. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout rationnel dydadique r, on a f(x+r) = f(x).

Démonstration. Si on considère la représentation impropre de x et la représentation propre (donc finie) de r, on constate que D_{x+r} est obtenu à partir de D_x en ne modifiant qu'un nombre fini d'éléments. Autrement dit,

$$D_x \Delta D_{x+r} = (D_x \cup D_{x+r}) \setminus (D_x \cap D_{x+r})$$

est fini et donc

$$f(x) = \nu(D_x) = \nu(D_x \setminus (D_x \Delta D_{x+r}))$$

= $\nu(D_{x+r} \setminus (D_x \Delta D_{x+r})) = \nu(D_{x+r}) = f(x+r),$

comme annoncé (rappelons qu'un filtre non-principal ne contient pas d'ensemble fini).

Soit enfin $N = S \cap [0,1]$ et montrons que cet ensemble ne peut être mesurable.

Lemme 1.4.54. Si N est \mathcal{L} -mesurable, alors $\mathcal{L}(N \cap [k2^{-l}, (k+1)2^{-l}]) = \mathcal{L}(N)/2^l$, pour tout $k \in \{0, \ldots, 2^l - 1\}$ et tout $l \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration. Fixons $l \in \mathbb{N}_0$. Puisque S est invariant pour les translations dyadiques, on a

$$\mathcal{L}(N\cap [k2^{-l},(k+1)2^{-l}]) = \mathcal{L}(N\cap [k'2^{-l},(k'+1)2^{-l}]),$$

pour tous $k, k' \in \{0, ..., 2^l - 1\}$. La densité de Lebesgue de N est donc uniformément répartie sur les intervalles de la forme $[k2^{-l}, (k+1)2^{-l}]$.

Corollaire 1.4.55. Si N est \mathcal{L} -mesurable, alors pour tout intervalle [a,b] de [0,1], on a

$$\mathcal{L}(N \cap [a, b]) = (b - a)\mathcal{L}(N).$$

Démonstration. Soit $(r_k)_k$ et $(r'_k)_k$ deux suites de nombres dyadiques de [a, b] telles que r_k converge vers a et r'_k vers b (rappelons que les dyadiques sont denses dans \mathbb{R}). Vu le lemme qui précède, on a, si $r_k < r'_k$ (il suffit de prendre k assez grand),

$$\mathcal{L}(N \cap [r_k, r'_k]) = (r'_k - r_k)\mathcal{L}(N).$$

La continuité de la mesure permet de conclure.

Proposition 1.4.56. L'ensemble N n'est pas \mathcal{L} -mesurable.

Démonstration. Supposons que N soit mesurable pour obtenir une contradiction. Vu le lemme 1.4.49, étant donné $\theta \in]0,1[$, nous savons qu'il existe un intervalle [a,b] de [0,1] tel que

$$\mathcal{L}(N \cap [a, b]) > \theta(b - a).$$

Vu le corollaire 1.4.55, on a

$$(b-a)\mathcal{L}(N) > \theta(b-a),$$

c'est-à-dire $\mathcal{L}(N) > \theta$. Puisque θ est arbitraire, on doit avoir $\mathcal{L}(N) = 1$. Cependant, vu ce qui précède, on doit avoir

$$1 = \mathcal{L}([0,1]) = \mathcal{L}(N \cup ([0,1] \setminus N)) = \mathcal{L}(N) + \mathcal{L}([0,1] \setminus N)) = 2\mathcal{L}(N),$$

ce qui suffit.

Donnons un dernier exemple dû à Van Vleck.

Définition 1.4.57. Un ensemble E de [0,1] est homogène si, pour tout intervalle non vide [a,b] de [0,1] et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle [c,d] inclus dans [a,b] tel que $\mathcal{L}([a,b] \setminus [c,d]) < \varepsilon$ et

$$E = \{ \frac{x - c}{d - c} : x \in E \cap]c, d[\}.$$

Proposition 1.4.58. Si E est un ensemble Lebesgue-mesurable et homogène de [0,1], alors soit $\mathcal{L}(E) = 0$, soit $\mathcal{L}(E) = 1$

Démonstration. Montrons que $\mathcal{L}(E) < 1$ implique $\mathcal{L}(E) = 0$. Supposons avoir $\mathcal{L}(E) = c$, avec $c \in]0,1[$. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $(]a_k,b_k[)_k$ une suite d'intervalles deux à deux disjoints revouvrant E et tels que $\mathcal{L}(\bigcup_k]a_k,b_k[) < c + \varepsilon$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un intervalle $]c_k,d_k[$ de $]a_k,b_k[$ tel que $\mathcal{L}(]a_k,b_k[)]c_k,d_k[) < \varepsilon(b_k-a_k)$ et

$$E = \{ \frac{x - c_k}{d_k - c_k} : x \in E \cap]c_k, d_k[\}.$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{L}(E \cap]a_k, b_k[) = \mathcal{L}(E \cap (]c_k, d_k[\cup (]a_k, b_k[\setminus]c_k, d_k[)))$$

$$= \mathcal{L}(E \cap (]c_k, d_k[) + \mathcal{L}(E \cap (]a_k, b_k[\setminus]c_k, d_k[))$$

$$< \mathcal{L}(E \cap (]c_k, d_k[) + \varepsilon(b_k - a_k).$$

Cela étant, on a

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(\{\frac{x - c_k}{d_k - c_k} : x \in E \cap]c_k, d_k[\}) = \frac{1}{d_k - c_k} \mathcal{L}(\{x - c_k : x \in E \cap]c_k, d_k[\})$$

$$= \frac{1}{d_k - c_k} \mathcal{L}(E \cap]c_k, d_k[),$$

vu l'invariance par translation. On peut donc écrire

$$\mathcal{L}(E \cap [a_k, b_k]) < (b_k - a_k)(\mathcal{L}(E) + \varepsilon).$$

Au total, il vient

$$\begin{split} c &= \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E \cap (\cup_k] a_k, b_k[)) = \sum_k \mathcal{L}(E \cap]a_k, b_k[) \\ &< (c + \varepsilon) \sum_k \mathcal{L}(]a_k, b_k[) = (c + \varepsilon) \mathcal{L}(\cup_k] a_k, b_k[) < (c + \varepsilon)^2, \end{split}$$

pout tout $\varepsilon > 0$, d'où la conclusion.

Pour tout nombre x irrationnel de [0,1], posons

$$B_x = \{rx + s : r, s \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$
 et $C_x = \{rx + s : r, s \in \mathbb{Q}, r < 0\}$

pour finalement définir $J_x = B_x \cup C_x$. Remarquons que pour un tel x, tout J_x est inclus dans l'ensemble des irrationnels. Établissons quelques propriétés de ces ensembles.

Lemme 1.4.59. Si x et y sont deux nombres irrationnels de [0,1], alors

- $B_x \cap C_x = \varnothing,$
- $-y \in J_x \text{ implique } J_x = J_y,$
- on a $y \in B_x$ si et seulement si $1 y \in C_x$.

Démonstration. Supposons avoir $z \in B_x \cap C_x$; il existe alors des nombres rationnels r, r', s, s' avec r > 0 et r' < 0 tels que

$$z = rx + s = r'x + s',$$

ce qui implique $x = \frac{s'-s}{r-r'}$. Ceci étant absurde, le premier point est démontré.

Pour le deuxième point, si y appartient à J_x , il appartient à B_x ou C_x . Dans le premier cas, il existe des nombres rationnels r, s, avec r > 0 tels que y = rx + s. On a alors

$$B_y = \{r'y + s' : r'', s' \in \mathbb{Q}, r' > 0\} = \{rr'x + (r's + s') : r'', s' \in \mathbb{Q}, r' > 0\} = B_x.$$

De la même manière, on obtient $C_x = C_y$ et donc $J_x = J_y$. Le cas $y \in C_x$ mène quant à lui aux identités $B_x = C_y$ et $C_x = B_y$.

Si y est un point de B_x , il existe deux nombres rationnels r, s, avec r > 0 tels que y = rx + s. On a donc $1 - y = -rx + (1 - s) \in C_x$. On montre de la même manière que $y \in C_x$ implique $1 - y \in B_x$.

Pour tout ensemble de la forme J_x , soit $f(J_x)$ un point de J_x (ainsi, f est une fonction de choix) et posons

$$B = \bigcup_{x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}} (B_{f(J_x)} \cap [0,1]), \qquad C = [0,1] \setminus (\mathbb{Q} \cup B).$$

Lemme 1.4.60. Avec les notations qui précèdent, on a $J_x = J_{f(J_x)}$.

Démonstration. De fait, on a $f(J_x) \in J_x$ et vu le Lemme 1.4.59, on doit avoir l'identité $J_{f(J_x)} = J_x$.

Montrons que B et C sont symétriques par rapport à 1/2.

Proposition 1.4.61. On a $x \in B$ si et seulement si $1 - x \in C$.

Démonstration. Supposons avoir $y \in B$; si 1-y n'appartient pas à C, il appartient à B. Soit alors x et x' tels que $y \in B_{f(J_x)}$ et $1-y \in B_{f(J_{x'})}$. Vu le Lemme 1.4.59, on a $1-y \in C_{f(J_x)}$. On peut donc écrire

$$1 - y \in J_{f(J_x)} \cap J_{f(J_{-t})} = J_x \cap J_{x'},$$

ce qui implique $J_x = J_{x'}$, vu le Lemme 1.4.59. On a donc $f(J_x) = f(J_{x'})$ et en particulier $B_{f(J_{x'})} = B_{f(J_x)}$. Il vient ainsi

$$1 - y \in B_{f(J_{x'})} \cap C_{f(J_x)} = B_{f(J_x)} \cap C_{f(J_x)} = \emptyset.$$

Supposons maintenant avoir $y \in C$. Bien sûr, on a trivialement $y \in B_y$. De plus, puisque y n'appartient à aucun ensemble de la forme $B_{f(J_x)}$, il n'existe pas de nombre irrationnel x tel que $y = f(J_x)$. Considérons $z = f(J_y)$; on a donc $y \neq z$ et $J_z = J_y$. En particulier, y appartient à $B_z \cup C_z$; il s'ensuit que l'on doit avoir $y \in C_z$. Par conséquent, on a $1 - y \in B_z \subset B$.

Corollaire 1.4.62. Si les ensembles B et C sont Lebesgue-mesurables, alors on a $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(C) = 1/2$.

 $D\acute{e}monstration$. Vu la Proposition 1.4.61, si les ensembles B et C sont mesurables pour la mesure de Lebesgue, il ont la même mesure. Dès lors, on a

$$1 = \mathcal{L}([0,1]) = \mathcal{L}(B \cup C) = \mathcal{L}(B) + \mathcal{L}(C) = 2\mathcal{L}(B),$$

ce qui suffit. \Box

Proposition 1.4.63. L'ensemble B est homogène.

Démonstration. Soit]a,b[un intervalle de [0,1], fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons deux nombres rationnels c et d tels que $a \le c < d \le b$ et $\mathcal{L}(]a,b[\setminus]c,d[) < \varepsilon$. Posons

$$B' = \{ \frac{x-c}{d-c} : x \in B \cap]c, d[\}.$$

Soit y un point de B'; il existe $x \in B \cap]c, d[$ tel que $y = \frac{x-c}{d-c}$. Soit $f(J_{x'})$ tel que x appartienne à $B_{f(J_{x'})} \cap [0,1]$. Il existe deux nombres rationnels r et s avec r > 0 tels que $x = rf(J_{x'}) + s$. On a donc

$$y = \frac{x-c}{d-c} = \frac{r}{d-c}f(J_{x'}) + \frac{s-c}{d-c}.$$

ce qui implique $y \in B_{f(J_{x'})}$. De plus, puisque, par définition, on a 0 < y < 1, il vient $y \in B$.

Soit maintenant y un point de B. Il existe un nombre irrationnel x' tel que y appartient à $B_{f(J_{x'})} \cap [0,1]$. Soit deux nombres rationnels r et s avec r > 0 tel que $y = rf(J_{x'}) + s$. Posons x = (d-c)y + c; on a

$$x = (d - c)y + c = r(d - c)f(J_{x'}) + (ds - cs + c) \in B_{f(J_{x'})}.$$

De plus, x appartient à]c,d[si et seulement si y appartient à]0,1[. Dès lors, on a $y=\frac{x-c}{d-c},$ avec $x\in B\cap]0,1[$, ce qui implique $y\in B'$.

Corollaire 1.4.64. L'ensemble B n'est pas Lebesque-mesurable.

Démonstration. De fait, si B était mesurable pour la mesure de Lebesgue, se mesure devrait à la fois être entière et égale à 1/2.

Mesure de Lebesgue et complétude

Nous allons ici montrer que la mesure de Lebesgue définie sur la σ -algèbre des ensembles \mathcal{L}^* -mesurables est la complétion de la mesure de Lebesgue définie sur la σ -algèbre de Borel.

Nous commencerons par un lemme.

Lemme 1.4.65. Si A est un ensemble \mathcal{L}^* -mesurable de \mathbb{R}^d , alors il existe des ensembles boréliens B_I et B_S de \mathbb{R}^d tels que $B_I \subset A \subset B_S$ et $\mathcal{L}(B_S \setminus B_I) = 0$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathcal{L}(A) < \infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, la Proposition 1.4.28 implique l'existence d'un ensemble compact K_k tel que $K_k \subset A$ et $\mathcal{L}(A) < \mathcal{L}(K_k) + 1/2k$. La même Proposition implique également l'existence d'un ensemble ouvert U_k tel que $A \subset U_k$ et $\mathcal{L}(U_k) < \mathcal{L}(A) + 1/2k$. Soient $B_I = \bigcup_k K_k$ et $B_S = \bigcap_k U_k$. On a $B_I, B_S \in \mathbb{B}^d$ et $B_I \subset A \subset B_S$. De plus,

$$\mathcal{L}(B_S \setminus B_I) \leqslant \mathcal{L}(U_k \setminus K_k) = \mathcal{L}(U_k \setminus A) + \mathcal{L}(A \setminus K_k) < 1/k$$

pour tout k, ce qui implique $\mathcal{L}(B_S \setminus B_I) = 0$.

Maintenant, si A est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d \mathcal{L}^* -mesurable arbitraire, il peut être écrit comme l'union d'ensembles \mathcal{L}^* -mesurables, $A = \bigcup_k A_k$ tels que $\mathcal{L}(A_k) < \infty$. Pour chaque k, il existe des ensembles $B_{I,k}, B_{S,k} \in \mathbb{B}^d$ tels que $B_{I,k} \subset A_k \subset B_{S,k}$ et $\mathcal{L}(B_{S,k} \setminus B_{I,k}) = 0$. Les ensembles $B_I = \bigcup_k B_{I,k}$ et $B_S = \bigcup_k B_{S,k}$ sont des ensembles boréliens satisfaisant $B_I \subset A \subset B_S$ et $\mathcal{L}(B_S \setminus B_I) \leq \mathcal{L}(\bigcup_k B_{S,k} \setminus B_{I,k}) = 0$, ce qui termine la preuve. \square

Nous pouvons maintenant aborder le résultat voulu.

Proposition 1.4.66. Si \mathscr{A} désigne la collection des ensembles \mathscr{L}^* -mesurables, la mesure de Lebesque sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{A})$ est la complétion de la mesure de Lebesque sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$.

Démonstration. Soient \mathcal{L} la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{A})$, $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ et $\bar{\mathcal{L}}$ la complétion de $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$, définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{A}_{\mathcal{L}})$. Le Lemme 1.4.65 implique $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_{\mathcal{L}}$ et que \mathcal{L} est la restriction de $\bar{\mathcal{L}}$ sur \mathscr{A} . Il nous reste donc à vérifier que $\mathscr{A}_{\mathcal{L}} \subset \mathscr{A}$. Soit donc $A \in \mathscr{A}_{\mathcal{L}}$; il existe deux ensembles $B_I, B_S \in \mathbb{B}^d$ tels que $B_I \subset A \subset B_S$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}(B_S \setminus B_I) = 0$. Puisque $A \setminus B_I \subset B_S \setminus B_I$ et $\mathcal{L}(B_S \setminus B_I) = \mathcal{L}_{\mathbb{B}}(B_S \setminus B_I) = 0$, le fait que \mathcal{L} soit complet sur \mathscr{A} implique $A \setminus B_I \in \mathscr{A}$. Ainsi, $A = (A \setminus B_I) \cup B_I \in \mathscr{A}$.

La mesure de Lebesgue-Stieltjes

La mesure de Lebesgue a été définie à partir d'une notion primitive de volume sur \mathbb{R}^d . Il peut paraître naturel de remplacer l'application Vol, utilisée précédemment, par une application plus générale. Par soucis de simplicité, nous allons restreindre notre étude sur \mathbb{R} (dans \mathbb{R}^d , les choses se compliquent légèrement [21])

Soit F une fonction croissante définie sur \mathbb{R} et définissons la longueur de l'intervalle [a,b] comme suit,

$$Vol_F([a,b]) = F(b) - F(a).$$

Remarquons que nous définissons ici la longueur des intervalles semi-ouverts seulement.

Définition 1.4.67. Étant donné un sous-ensemble A de \mathbb{R} , soit \mathscr{C}_A la collection de toutes les suites $(]a_k, b_k]_k$ de \mathbb{R} telles que $A \subset \cup_k]a_k, b_k]$. La mesure extérieure de Lebesgue-Stieltjes est l'application \mathcal{L}_F^* suivante

$$\mathcal{L}_F^*: \wp(\mathbb{R}) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}_F(]a_k, b_k]): (]a_k, b_k])_k \in \mathscr{C}_A\}.$$

Nous devons d'abord montrer qu'il s'agit d'une mesure extérieure.

Proposition 1.4.68. La mesure extérieure de Lebesgue-Stieltjes est une mesure extérieure.

 $D\acute{e}monstration$. S'il existe un intervalle]a,b] tel que $Vol_F(]a,b])=0$, alors on a bien sûr $\mathcal{L}_F^*(\varnothing)=0$. Sinon, soit I_1 un intervalle du type]a,b]. Puisque $Vol_F(]a,b])=Vol_F(]a,c])+Vol_F(]c,b])$ pour tout $c\in]a,b[$, en découpant I_1 en deux intervalles de même longueur de Lebesgue (]a,(a+b)/2] et](a+b)/2,b]), on obtient l'existence d'un sous intervalle I_2 de I_1 de longueur $Vol_F(I_2)$ inférieure ou égale à $Vol_F(I_1)/2$. En procédant de la sorte, on construit une suite $(I_k)_k$ de semi-intervalles telle que $I_{k+1} \subset I_k$ et $Vol_F(I_{k+1}) \leq Vol_F(I_k)/2$. Il existe donc des semi-intervalles de longueur arbitrairement petite, ce qui implique $\mathcal{L}_F^*(\varnothing)=0$.

Si $A \subset B$, toute suite d'intervalles couvrant B recouvre A et donc $\mathcal{L}_F^*(A) \leqslant \mathcal{L}_F^*(B)$. Soit maintenant $(A_k)_k$ une suite de sous-ensembles de \mathbb{R} . Si $\sum_k \mathcal{L}_F^*(A_k) = \infty$, la sous-additivité est démontrée. Sinon, soit $\varepsilon > 0$ et pour chaque k, soit $(]a_{k,j},b_{k,j}])_j$ une suite recouvrant A_k telle que

$$\sum_{j} F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) < \mathcal{L}_F^*(A_k) + \varepsilon/2^k.$$

On a $\cup_k A_k \subset \cup_{k,j}]a_{k,j}, b_{k,j}]$ et

$$\sum_{k,j} F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) < \sum_{k} \mathcal{L}_F^*(A_k) + \varepsilon.$$

Le nombre ε étant arbitraire, on a $\mathcal{L}_F^*(\cup_k A_k) \leqslant \sum_k \mathcal{L}_F^*(A_k)$.

Proposition 1.4.69. Si F est continu à droite, $\mathcal{L}_F^*([a,b]) = \operatorname{Vol}_F([a,b])$.

Démonstration. Puisque $[a,b] \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, on a $\mathcal{L}_F^*([a,b]) \leq \operatorname{Vol}_F([a,b])$. Soient $\varepsilon > 0$ et $([a_k,b_k])_k$ une suite de \mathbb{R} recouvrant [a,b] telle que

$$\sum_{k} \operatorname{Vol}_{F}(]a_{k}, b_{k}]) < \mathcal{L}_{F}^{*}(]a, b]) + \varepsilon/2.$$

Puisque F est continu à droite, $\lim_{\delta_k \to 0^+} \operatorname{Vol}_F(]a_k, b_k + \delta_k]) = \operatorname{Vol}_F(]a_k, b_k]) \, \forall k$. Pour chaque k, soit $]a_k, b_k + \delta_k]$ tel que $\delta_k > 0$ et $\operatorname{Vol}_F(]a_k, b_k + \delta_k]) < \operatorname{Vol}_F(]a_k, b_k]) + \varepsilon/2^{k+1}$. Soit $a' \in]a, b[$; on a $[a', b] \subset]a, b] \subset \cup_k]a_k, b_k + \delta_k[$. Puisque [a', b] est compact, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $[a', b] \subset \bigcup_{k=1}^N]a_k, b_k + \delta_k[$. On a donc

$$\operatorname{Vol}_{F}(]a',b]) \leqslant \sum_{k} \operatorname{Vol}_{F}(]a_{k},b_{k}+\delta_{k}])$$

$$< \sum_{k} \operatorname{Vol}_{F}(]a_{k},b_{k}]) + \varepsilon/2$$

$$< \mathcal{L}_{F}^{*}(]a,b]) + \varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, nous obtenons $\operatorname{Vol}_F(]a',b]) \leqslant \mathcal{L}^*(]a,b])$, pour tout $a' \in]a,b[$. La continuité à droite de F implique $\lim_{a'\to a^+} \operatorname{Vol}_F(]a',b]) = \operatorname{Vol}_F(]a,b])$, ce qui termine la démonstration.

Comme la mesure extérieure de Lebesgue, la mesure extérieure de Lebesgue-Stieltjes est métrique.

Proposition 1.4.70. La mesure extérieure de Lebesgue-Stieltjes est une mesure extérieure métrique.

Démonstration. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ tels que d(A, B) > 0. On a $\mathcal{L}_F^*(A \cup B) \leqslant \mathcal{L}_F^*(A) + \mathcal{L}_F^*(B)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $(]a_k, b_k])_k$ une suite recouvrant $A \cup B$ telle que

$$\sum_{k} \operatorname{Vol}_{F}(]a_{k}, b_{k}]) < \mathcal{L}_{F}^{*}(A \cup B) + \varepsilon.$$

Quitte à subdiviser les intervalles trop grand, nous pouvons supposer que diam($]a_k, b_k]$) $< d(A, B) \forall k$. Dès lors, la suite $(]a_k, b_k]$) $_k$ peut être décomposée en deux sous-suites $(]c_k, d_k]$) $_k$ et $(]e_k, f_k]$) $_k$ telles que $A \cap [e_k, f_k] = \emptyset$ et $B \cap [c_k, d_k] = \emptyset \forall k$. Donc

$$\mathcal{L}_F^*(A) + \mathcal{L}_F^*(B) \leqslant \sum_k \operatorname{Vol}_F(]c_k, d_k]) + \sum_k \operatorname{Vol}_F(]e_k, f_k])$$

$$= \sum_k F(d_k) - F(c_k) + \sum_k F(f_k) - F(e_k)$$

$$= \sum_k F(b_k) - F(a_k) < \mathcal{L}_F^*(A \cup B) + \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure, ε étant arbitraire.

Nous pouvons maintenant introduire la mesure de Lebesgue-Stieltjes

Définition 1.4.71. La restriction de la mesure extérieure de Lebesgue-Stieltjes aux ensembles \mathcal{L}_F^* -mesurables est appelée la mesure de Lebesgue-Stieltjes et est notée \mathcal{L}_F .

Corollaire 1.4.72. La mesure de Lebesgue-Stieltjes est une mesure complète définie sur les ensembles boréliens \mathbb{B} .

Nous venons de voir qu'une fonction croissante permet de définir une mesure sur les ensembles boréliens. Sous certaines conditions, l'inverse est également vrai.

Proposition 1.4.73. Soit μ une mesure finie sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \mu(]-\infty,x]$). La fonction F est bornée, croissante et continue à droite. Qui plus est, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $I_x =]-\infty, x]$. On a bien sûr $0 \leqslant \mu(I_x) \leqslant \mu(\mathbb{R})$ $\forall x \in \mathbb{R}$. De plus, $x \leqslant y$ entraîne $\mu(I_x) \leqslant \mu(I_y)$. On en déduit que la fonction F est bornée et croissante. Soit maintenant $(x_k)_k$ une suite décroissante convergeant vers x. On a $I_x = \cap_k I_{x_k}$ et la continuité des mesures implique $F(x) = \lim_k F(x_k)$. De la même manière, (cette fois, la suite $(x_k)_k$ tend vers $-\infty$), on montre que $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$

Soit F la fonction définie par la Proposition 1.4.73. Puisque $]a,b] =]-\infty,b]\setminus]-\infty,a]$, on a $\mu(]a,b]) = F(b)-F(a)$. La fonction F étant croissante et bornée, la limite à gauche de F en un point x est un nombre réel, que nous noterons $F(x^-)$. Si $(a_k)_k$ est une suite croissante convergeant vers b, en considérant les ensembles $]a_k,b]$ et la continuité des mesures, on obtient $\mu(\{b\}) = F(b) - F(b^-)$. Dès lors, $\mu(\{b\}) = 0$ si et seulement si la fonction F est continue en b. Nous avons un résultat d'unicité.

Proposition 1.4.74. Soit μ une mesure finie sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) et F la fonction définie par $F(x) = \mu(]-\infty,x]$). On a $\mu = \mathcal{L}_F$ sur \mathbb{B} .

Démonstration. Nous avons vu que la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction F satisfait $\mathcal{L}_F(]a,b])=F(b)-F(a)=\mu(]a,b])$. La continuité des mesures implique $\mathcal{L}_F(]-\infty,x])=\lim_k \mathcal{L}_F(]-k,x])=\lim_k \mu(]-k,x])=\mu(]-\infty,x])$. Par conséquent, si $\mathscr C$ représente la collection des demi-droites $]-\infty,x]$ $(x\in\mathbb R)$, $\mu=\mathcal{L}_F$ sur $\mathscr C$. Puisque $\mathscr C$ est un π -système qui, par la Proposition 1.1.10, engendre la σ -algèbre $\mathbb B$, le Théorème 1.2.10 implique que $\mu=\mathcal L_F$ sur $\mathbb B$.

Le résultat suivant est une réécriture de ce que nous avons déjà obtenu.

Proposition 1.4.75. Si $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, croissante et continue à droite satisfaisant $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, alors il existe une unique mesure finie μ sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) telle que $F(x) = \mu(|-\infty, x|) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. La mesure de Lebesgue-Stieltjes \mathcal{L}_F associée à F restreinte à la σ -algèbre \mathbb{B} convient. En effet, $\mathcal{L}_F(]-\infty,x]) = \lim_k \mathcal{L}_F(]-k,x]) = F(x)-\lim_k F(-k) = F(x)$. Cette mesure est finie, puisque $\mathcal{L}_F(\mathbb{R}) = \lim_k \mathcal{L}_F(]-\infty,k]) = \lim_k F(k)$. La Proposition 1.4.74 implique que cette mesure est unique.

Remarquons que nous avons incidemment montré, dans cette dernière démonstration, que $\mu(\mathbb{R}) = \lim_k F(k)$.

Définition 1.4.76. Si P est une probabilité sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) , la fonction F définie par $F(x) = P(|-\infty, x|)$ est appelée la fonction de répartition de P.

Nous avons donc montré que dans ce cas, $P = \mathcal{L}_F$ sur \mathbb{B} .

Chapitre 2

Intégrales

L'intégration est l'un des sujets relatifs aux mesures les plus importants. Dans ce chapitre, nous définissons cette notion et donnons les premières propriétés des intégrales. Nous nous attardons notamment sur les théorèmes de la convergence monotone, de la convergence dominée et le lemme de Fatou. Ces résultats donne nt lieu à de nombreuses applications. Nous présentons également l'interprétation de Riemann de l'intégrale. Ce chapitre se termine sur la comparaison entre les intégrales de Riemann, Darboux et Lebesgue.

2.1 Applications mesurables

Les fonctions mesurables jouent un rôle de premier ordre dans la théorie de l'intégration. Nous considérerons d'abord les applications à valeurs dans \mathbb{R} et $\overline{\mathbb{R}}$ avant de généraliser la définition de la mesurabilité aux applications abstraites.

Remarquons que la plupart des notions abordées dans cette section ont attrait aux σ -algèbres et non aux mesures; autrement dit, la théorie des applications mesurables relève plus de la théorie des ensembles.

Applications à valeurs dans la droite complétée

Nous allons ici nous intéresser particulièrement aux applications à valeurs dans \mathbb{R} (appelées fonctions étendues). La notion de mesurabilité pour des applications plus générales sera donnée par la suite.

Commençons par un résultat élémentaire qui nous permettra d'introduire la notion de mesurabilité pour les applications à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.1.1. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et A un ensemble de \mathscr{A} . Pour une application $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, les conditions suivantes sont équivalentes,

```
 \begin{split} & \longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \ \{x \in A : f(x) \leqslant y\} \in \mathscr{A}, \\ & \longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \ \{x \in A : f(x) < y\} \in \mathscr{A}, \\ & \longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \ \{x \in A : f(x) \geqslant y\} \in \mathscr{A}, \\ & \longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \ \{x \in A : f(x) > y\} \in \mathscr{A}. \end{split}
```

Démonstration. Puisque $\{x \in A : f(x) < y\} = \bigcup_k \{x \in A : f(x) \le y - 1/k\}$, la premières condition implique la deuxième. De même, la troisième implique la quatrième. Puisque $\{x \in A : f(x) \ge y\} = A \setminus \{x \in A : f(x) < y\}$, la deuxième condition implique la troisième. De la même manière, la quatrième condition implique la première.

Définition 2.1.2. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Une application $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est une application mesurable par rapport à \mathscr{A} si $\{x \in A : f(x) < y\} \in \mathscr{A}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. On dit que l'application est \mathscr{A} -mesurable, ou même juste mesurable si le contexte est clair. Si $(X, \mathscr{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$, f est une application Borel-mesurable. Si $X = \mathbb{R}^d$ et \mathscr{A} est la collection des ensembles \mathcal{L}^* -mesurables, l'application est dite Lebesque-mesurable.

Bien sûr, une application Borel-mesurable est Lebesgue-mesurable. Donnons quelques exemples.

Exemples 2.1.3. Étant données un ensemble A, une application f définie sur A et un nombre y, posons $M(y) = \{x \in A : f(x) < y\}$.

- Soit (X, Ω) un espace topologique. Si l'application $f: X \to \mathbb{R}$ est continue, l'ensemble M(y) est ouvert pour tout y. Cet ensemble est donc un ensemble borélien et f est Borel-mesurable,
- si $f: A \to \mathbb{R}$, où A est un intervalle de \mathbb{R} , est une fonction croissante, M(y) est un intervalle, un point ou l'ensemble vide. C'est donc un ensemble borélien,
- si (X, \mathscr{A}) est un espace mesurable et A est un sous-ensemble de X, la fonction caractéristique χ_A est \mathscr{A} -mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{A}$. En effet, si y > 1, M(y) = X et si $y \leq 0$, $M(y) = \varnothing$; dans les autres cas, $M(y) = A^c$,
- Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application prenant un nombre fini de valeurs, $f(X) = \{y_1, \dots, y_N\}$. Une telle fonction est mesurable si et seulement si $f^{-1}(y_k) \in \mathscr{A} \ \forall k$. En effet, si f est mesurable, $f^{-1}(y_k) = \{x \in X : f(x) \leq y_k\} \cap \{x \in X : f(x) \geq y_k\} \in \mathscr{A}$. Si $f^{-1}(y_k) \in \mathscr{A} \ \forall k$, pour $y \in \mathbb{R}$, on a $M(y) = \bigcup_{y_k < y} f^{-1}(y_k) \in \mathscr{A}$.

La définition d'une application mesurable peut paraître obscure au premier abord, mais son utilité deviendra clair dans la suite.

Donnons quelques propriétés des applications mesurables.

Proposition 2.1.4. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Si les applications f et g de A dans \mathbb{R} sont mesurables, on a

- $\{x \in A : f(x) < g(x)\} \in \mathscr{A},$
- $\{x \in A : f(x) \leqslant g(x)\} \in \mathscr{A},$
- $-\{x \in A : f(x) = g(x)\} \in \mathscr{A}.$

Démonstration. On a

$$\{x \in A : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in A : f(x) < r\} \cap \{x \in A : r < g(x)\} \in \mathscr{A}.$$

De même, si $\{x \in A : g(x) < f(x)\} \in \mathscr{A}$, alors $\{x \in A : f(x) \leq g(x)\} = A \setminus \{x \in A : g(x) < f(x)\} \in \mathscr{A}$. Enfin, $\{x \in A : f(x) = g(x)\} = \{x \in A : f(x) \leq g(x)\} \setminus \{x \in A : f(x) < g(x)\} \in \mathscr{A}$.

Proposition 2.1.5. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Si les applications f et g de A dans \mathbb{R} sont mesurables, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables.

Démonstration. La démonstration est triviale, puisque $\{x \in A : \max(f(x), g(x)) < y\} = \{x \in A : f(x) < y\} \cap \{x \in A : g(x) < y\}$ et $\{x \in A : \min(f(x), g(x)) < y\} = \{x \in A : f(x) < y\} \cup \{x \in A : g(x) < y\}.$

Proposition 2.1.6. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Si $(f_k)_k$ est une suite d'applications mesurables de A dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

- $\sup_k f_k$ et $\inf_k f_k$ sont mesurables,
- $-\lim_{k} f_{k}$ et $\lim_{k} f_{k}$ sont mesurables,
- $\lim_k f_k$ (dont le domaine de définition est $\{x \in A : \overline{\lim}_k f_k(x) = \underline{\lim}_k f_k(x)\}$) est mesurable.

Démonstration. La démonstration du premier point est analogue à celle de la Proposition 2.1.5 (en utilisant des unions et intersections dénombrables). Soient $f_k^{\vee}(x) = \sup_{j \geqslant k} f_j(x)$ et $f_k^{\wedge}(x) = \inf_{j \geqslant k} f_j(x)$. Par ce qui précède, f_k^{\vee} et f_k^{\wedge} sont mesurables et donc $\overline{\lim}_k f_k = \inf_k f_k^{\vee}$ et $\underline{\lim}_k f_k = \sup_k f_k^{\wedge}$ sont mesurables.

Soit D le domaine de définition de $\lim_k f_k$; la Proposition 2.1.4 implique que $D \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\{x \in D : \lim_k f_k(x) < y\} = D \cap \{x \in A : \overline{\lim}_k f_k(x) < y\} \in \mathcal{A}$, ce termine la démonstration.

Proposition 2.1.7. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Si f et g sont deux applications mesurables de A dans $[0, \infty]$ et α un nombre réel positif, alors αf et f + g sont mesurables.

Démonstration. Considérons l'application αf . Si $\alpha = 0$, le résultat est trivial. Sinon, $\{x \in A : \alpha f(x) < y\} = \{x \in A : f(x) < y/\alpha\} \in \mathscr{A}$. Pour la fonction f + g, on a

$$\{x \in A : f(x) + g(x) < y\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in A : f(x) < r\} \cap \{x \in A : g(x) < y - r\} \in \mathscr{A},$$

ce qui termine la démonstration.

Proposition 2.1.8. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Si f et g sont deux applications mesurables de A dans \mathbb{R} et α un nombre réel, alors αf , f+g, f-g, fg et f/g (défini sur $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$) sont mesurables.

Démonstration. La démarche à suivre pour démontrer la mesurabilité de αf et f+g est quasiment la même que celle suivie pour la démonstration de la Proposition 2.1.7 (avec une modification de l'inégalité si $\alpha < 0$). Pour la fonction f-g, il suffit de la ré-écrire comme suit, f+(-1)g, pour montrer qu'elle est mesurable.

Si f est une fonction mesurable, alors f^2 l'est également. De fait, si $y \le 0$, $\{x \in A : f^2(x) < y\} = \emptyset \in \mathscr{A}$. Sinon, $\{x \in A : f^2(x) < y\} = \{x \in A : -\sqrt{y} < f(x)\} \cap \{x \in A : f(x) < \sqrt{y}\} \in \mathscr{A}$. De là, si f et g sont mesurables, $fg = ((f+g)^2 - f^2 - g^2)/2$ l'est également.

Pour f/g, on a $D=\{x\in A:g(x)\neq 0\}=\{x\in A:g(x)>0\}\cup\{x\in A:g(x)<0\}\in\mathscr{A}$ et

$$\{x \in D : f/g < y\} = (\{x \in A : g(x) > 0\} \cap \{x \in A : f(x) < yg(x)\})$$
$$\cup (\{x \in A : g(x) < 0\} \cap \{x \in A : f(x) > yg(x)\}) \in \mathscr{A},$$

ce qui prouve que f/g est mesurable.

En ce qui concerne les applications à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, il faut prendre certaines précautions pour définir par exemple l'application f+g. Soient f et g deux fonctions de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ et posons $D_{\infty}=(f^{-1}(-\infty)\cap g^{-1}(\infty))\cup (f^{-1}(\infty)\cap g^{-1}(-\infty))$. Si $x\in A\setminus D_{\infty}, \ f+g(x)$ est défini; si $x\in D_{\infty}$, on pose $f+g=\alpha$, où $\alpha\in \overline{\mathbb{R}}$ est arbitraire. Avec ces modifications, on peut modifier les preuves précédentes pour obtenir le résultat qui suit.

Proposition 2.1.9. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Si f et g sont deux applications mesurables de A dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors f + g est mesurable.

Démonstration. Remarquons par exemple que $f^{-1}(-\infty) = \bigcap_k \{x \in A : f(x) < -k\} \in \mathcal{A}$; de même, $f^{-1}(\infty) \in \mathcal{A}$ et donc l'ensemble D_{∞} défini plus haut appartient à \mathcal{A} . Les preuves précédentes s'adaptent aisément.

Exercice 2.1.10. Soit $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$; montrer que si $f : A \to \mathbb{R}$ est une application mesurable et dérivable sur A, alors la dérivée de f est aussi mesurable. Suggestion : on a $Df = \lim_k f_k$, avec

$$f_k(x) = k(f(x+1/k) - f(x)).$$

Définition 2.1.11. Soit f une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . La partie positive f^+ et la partie négative f^- de f sont les fonctions définie à partir de f comme suit, $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = -\min(f,0)$.

Ces fonctions sont à valeurs dans $[0, \infty]$ et $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Remarquons que si f est mesurable, f^+ et f^- le sont aussi et que, par conséquent, la fonction |f| est mesurable. Si f défini sur A est \mathscr{A} -mesurable et si $B \in \mathscr{A}$ est un sous-ensemble de A, la restriction f_B de f à B est \mathscr{A} -mesurable, puisque $\{x \in B : f_B(x) < y\} = B \cap \{x \in A : f(x) < y\}$. De plus, si $(A_k)_k$ est une suite de \mathscr{A} telle que $A = \bigcup_k A_k$ et si, pour tout k, la restriction f_{A_k} de f à A_k est \mathscr{A} -mesurable, alors f est \mathscr{A} -mesurable, puisque $\{x \in A : f(x) < y\} = \bigcup_k \{x \in A_k : f_{A_k}(x) < y\}$.

Proposition 2.1.12. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et $A \in \mathscr{A}$. Si f est une application mesurable de A dans $[0, \infty]$, alors il existe une suite d'applications mesurables $(f_k)_k$ de A dans $[0, \infty[$ dont l'image est finie telle que

- la suite $(f_k)_k$ est croissante,
- $-f = \lim_{k} f_k$.

Démonstration. Pour chaque nombre naturel non-nul k, et $j \in J_k = \{1, \ldots, k2^k\}$, soit $A_{k,j} = \{x \in A : (j-1)/2^k \le f(x) < j/2^k\}$. Puisque f est mesurable, $A_{k,j} \in \mathscr{A}$. Pour $k \in \mathbb{N}_0$, soit f_k la fonction de A dans \mathbb{R} égale à $(j-1)/2^k$ sur $A_{k,j}$ ($j \in J_k$) et égale à k sur $A \setminus \bigcup_{j \in J_k} A_{k,j}$. Chaque fonction f_k n'admet qu'un nombre fini de valeurs et pour tout $x \in A$, la suite $(f_k)_k$ satisfait la thèse.

Si (X, \mathscr{A}) est un espace mesurable et si f est une fonction \mathscr{A} -mesurable de X dans \mathbb{R} , en appliquant le résultat précédant à f^+ et f^- , on obtient l'existence d'une suite $(f_k)_k$ de fonctions de X dans \mathbb{R} dont l'image est finie telle que $\lim_k f_k = f$.

Nous allons maintenant donner un point de vue différent concernant les applications mesurables. Il permet en fait de généraliser leur définition. Commençons par un lemme.

Lemme 2.1.13. Soient (X, \mathscr{A}) et (Y, \mathscr{B}) des espaces mesurables, $A \in \mathscr{A}$ et f une application de A dans Y. La famille $\mathscr{F} = \{B \in \mathscr{B} : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ est une σ -algèbre sur Y.

Démonstration. Bien sûr, $f^{-1}(Y) = A \in \mathscr{A}$ et $f^{-1}(B^c) = A \setminus f^{-1}(B)$. De plus, $f^{-1}(\cup_k B_k) = \bigcup_k f^{-1}(B_k)$, ce qui suffit.

Proposition 2.1.14. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, $A \in \mathscr{A}$ et f une application de A dans \mathbb{R} . Les conditions suivantes sont équivalentes,

- f est mesurable par rapport à \mathscr{A} ,
- $-f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$, quel que soit l'ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}$,
- $-f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$, quel que soit l'ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}$,
- $-f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, quel que soit l'ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}$.

Démonstration. L'application f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(]-\infty,y]) \in \mathscr{A}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Si \mathscr{F} est la σ -algèbre définie par le Lemme 2.1.13 (avec $(Y,\mathscr{B})=(\mathbb{R},\mathbb{B})$), f est mesurable si et seulement si $]-\infty,y] \in \mathscr{F} \ \forall y$, et donc si et seulement si $\mathbb{B}=\sigma(]-\infty,y]) \subset \mathscr{F}$. La première et la quatrième conditions sont donc équivalentes. Puisque la σ -algèbre \mathbb{B} est aussi engendrée par les ensembles ouverts et les ensembles fermés de \mathbb{R} , toutes les conditions sont équivalentes.

L'équation fonctionnelle de Cauchy

Comme application, considérons l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Définition 2.1.15. Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy si elle vérifie

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

pour tous nombres réels x et y.

Bien entendu, toute fonction linéaire vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy. La question qui se pose naturellement est de savoir s'il existe d'autres solutions. Nous allons montrer que toute solution Lebesgue-mesurable est nécessairement linéaire. Autrement dit, les solutions de cette équation sont soit extrêmement irrégulières, soit linéaires.

Proposition 2.1.16. Toute fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy est \mathbb{Q} -linéaire : on a f(rx) = rf(x), pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On a bien entendu f(0) = f(0) + f(0), ce qui implique f(0) = 0. De là, on obtient

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui implique f(x) = -f(x).

Une récurrence aisée sur k fournit f(kx)=kf(x), pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$. De là, on obtient

$$f(x) = f(k\frac{x}{k}) = kf(\frac{x}{k}),$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ non nul et tout $x \in \mathbb{R}$. ceci implique f(x/k) = f(x)/k et donc f(rx) = rf(x) pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 2.1.17. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy continue en un point x_0 , alors elle est continue sur \mathbb{R} tout entier.

Démonstration. Pour tout point x de \mathbb{R} , on a

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} f(x_0+h) + f(x-x_0) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x).$$

Lemme 2.1.18. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy continue en un point x_0 , alors f est linéaire.

Démonstration. Nous savons déjè que f est continu sur \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(r_k)_k$ une suite de \mathbb{Q} qui converge vers \mathbb{R} . On a

$$f(x) = \lim_{k} f(r_k) = \lim_{k} r_k f(1) = x f(1),$$

comme attendu. \Box

On a donc le résultat suivant sur les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Proposition 2.1.19. Une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy est soit linéaire, soit discontinue en chaque point.

Les solutions non-linéaires sont très irrégulières.

Proposition 2.1.20. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy qui n'est pas linéaire, alors son graphe est dense dans \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Par hypothèse, il existe deux nombres réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)/x_1$ n'est pas égal à $f(x_2)/x_2$. Soit v_1 le vecteur $(x_1, f(x_1))$ et v_2 le vecteur $(x_2, f(x_2))$; ces vecteurs ne sont pas colinéaires, par construction. Puisque f est \mathbb{Q} -linéaire, le graphe de f contient $\mathbb{Q}v_1 \oplus \mathbb{Q}v_2$, ce qui suffit.

Proposition 2.1.21. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy qui n'est pas majorée sur un ensemble Lebesgue-mesurable non-négligeable, alors f est linéaire.

Démonstration. Supposons que f soit majoré par C sur l'ensemble Lebesgue-mesurable E de mesure non-nulle. Par la proposition 1.4.46, E-E contient un intervalle non vide I. De plus, f est majoré par 2C sur I. Il s'ensuit que le graphe de f ne peut être dense dans \mathbb{R}^2 . Par conséquent, f est linéaire.

Donnons une démonstration plus analytique.

Démonstration. Si f est majoré sur l'ensemble Lebesgue-mesurable E de mesure nonnulle, nous savons que f est majoré sur un intervalle I contenant l'origine, par la proposition 1.4.46. Il existe donc une constante C>0 telle que $f(x)\leqslant C$ pour tout $x\in I$. On a dès lors

$$f(k\frac{x}{k}) = kf(\frac{x}{k}) \leqslant C,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ non nul et tout $x \in I$. De plus, pour un tel x, on a $f(-x) \leq C$, donc $f(x) \geq -C$. Par conséquent, on a

$$|f(\frac{x}{k})| \leqslant \frac{C}{k},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ non nul et tout $x \in I$. Autrement dit, |f(x)| < C/k pour tout $x \in I/k$. Si $(x_k)_k$ est une suite qui tend vers 0, pour tout $j \in \mathbb{N}$ non nul, on a $x_k \in I/j$ pour k suffisamment grand, ce qui implique

$$|f(x_k)| \leqslant \frac{C}{i},$$

pour de tels indices. Nous avons donc obtenu que f est continu en 0, ce qui suffit. \Box

Proposition 2.1.22. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy qui est monotone sur un ensemble Lebesgue-mesurable et non-négligeable, alors f est linéaire.

Démonstration. Supposons, sans restriction, que f est croissant sur un ensemble Lebesguemesurable A qui est non-négligeable. Soit alors $(x_k)_k$ une suite de A qui converge vers sup A et posons $A_k = A \cap]-\infty, x_k]$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Bien sûr, A est mesurable et $\lim_k A_k = A$. Par continuité, on a $\mathcal{L}(A_k) > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Puisque f est croissant sur A_k , f est majoré par x_k sur A_k , pour $k \in \mathbb{N}$ non nul. La proposition 2.1.21 permet de conclure.

Proposition 2.1.23. Toute fonction Lebesgue-mesurable f vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy est linéaire.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$ non nul, posons $A_k = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq k\}$. Ces ensembles sont mesurables et on a $\lim_k A_k = \mathbb{R}$; par conséquent, on a $\mathcal{L}(A_k) > 0$ pour k suffisamment grand. Puisque f est borné sur A_k , la proposition 2.1.21 permet encore une fois de conclure.

Considérons brièvement les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy qui ne sont pas linéaires. Soit \mathcal{H} une base de Hamel de \mathbb{R} , c'est-à dire une base de \mathbb{R} vu comme un espace vectoriel sur le corps des rationnels 1 . Pour tout nombre réel x, on a donc $x = \sum_{k=1}^{n_x} r_k x_k$, pour un nombre $n_x \in \mathbb{N}$, avec $x_k \in \mathcal{H}$, pour des nombres rationnels r_k ($k \in \{1, \ldots, n_x\}$). Si f est une fonction définie sur \mathcal{H} , elle peut être étendue sur \mathbb{R} comme suit :

$$f(x) = f(\sum_{k=1}^{n_x} r_k x_k) = \sum_{k=1}^{n_x} r_k f(x_k).$$
 (2.1)

Une telle fonction est solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy : étant donné deux nombres réels x et y, pour n suffisamment grand, on peut écrire, avec des notations évidentes,

$$f(x+y) = f(\sum_{k=1}^{n} (r_k + r'_k)x_k) = \sum_{k=1}^{n} (r_k + r'_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} r'_k f(x_k) = f(x) + f(y),$$

avec $x_k \in \mathcal{H}$, pour des nombres rationnels r_k et r'_k ($k \in \{1, ..., n\}$). Inversement, une solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy vérifie nécessairement (2.1). Si f est linéaire, il existe une constante c telle que f(x) = cx; on doit donc avoir $f(x_k)/x_k = c$ pour tout $x_k \in \mathcal{H}$. Dès lors, il suffit qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 de \mathcal{H} tels que $f(x_1)/x_1$ soit différent de $f(x_2)/x_2$ pour que f ne soit pas linéaire.

Ensemble de Cantor et mesure de Lebesgue

Grâce à la notion de fonction mesurable, nous pouvons maintenant construire un ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue qui n'appartient pas à \mathbb{B} . Nous allons aussi montrer qu'il existe un sous-ensemble de \mathbb{R} négligeable pour la mesure de Lebesgue ayant la puissance du continu.

Commençons par définir l'ensemble triadique de Cantor.

^{1.} L'existence d'une telle base est assurée par l'axiome du choix. Les bases de Hamel ont été pour la première fois proposées pour exhiber des solutions non-linéaires de l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Définition 2.1.24. Soit $K_0 = [0,1]$, $K_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$ et K_{j+1} l'ensemble obtenu à partir de K_j en enlevant, à chaque intervalle I_k composant K_j , l'intervalle ouvert formant le deuxième tiers de I_k . L'ensemble triadique de Cantor est l'ensemble $\mathfrak{C} = \bigcap_j K_j$.

Remarque 2.1.25. Pour tout intervalle compact [a, b], posons

$$T([a,b]) = [a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [b - \frac{b-a}{3}, b],$$

et pour $E = \bigcup_{k=1}^n I_k$, où les I_k sont des intervalles compacts, posons $T(E) = \bigcup_{k=1}^n T(I_k)$. Les intervalles constitutifs K_j de l'ensemble de Cantor \mathfrak{C} sont définis par la relation $K_{j+1} = T(K_j)$, pour $j \ge 0$.

L'ensemble \mathfrak{C} est un compact non-vide, vu la Proposition A.2.5.

Proposition 2.1.26. L'intérieur de C est l'ensemble vide.

Démonstration. si ce n'était pas le cas, il existerait un intervalle I inclus dans K_j quel que soit j; or, les intervalles de K_j sont de longueur $1/3^j$ au plus.

La définition alternative suivante fournit un autre point de vue sur l'ensemble de Cantor.

Proposition 2.1.27. L'ensemble de Cantor est l'ensemble des nombres réels de [0,1] tels qu'une de leurs représentations en base trois ne contient pas le chiffre 1.

 $D\acute{e}monstration$. Supposons avoir établi que les éléments de K_i puissent s'écrire

$$x = \sum_{k=1}^{j} \frac{2a_k}{3^k} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$
(2.2)

avec $a_k \in \{0,1\}$ et $b_k \in \{0,1,2\}$. Tous les intervalles constitutifs de K_j sont de la forme $I_k^{(j)} = [\frac{2k}{3^j}, \frac{2k+1}{3^j}]$, pour $k \in \{0,\dots,\frac{3^j-1}{2}\}$. Supposons avoir $b_{j+1} = 1$; si x appartient à $I_k^{(j)}$, on a $\sum_{k=1}^j 2a_k 3^{-k} = 2k 3^{-j}$ et x appartient à l'un des deux intervalles

$$[\frac{2k}{3^j},\frac{2k}{3^j}+\frac{1}{3^{j+1}}]=[\frac{2k}{3^j},\frac{6k+1}{3^{j+1}}]\quad \text{ou}\quad [\frac{2k+1}{3^j}-\frac{1}{3^{j+1}},\frac{2k+1}{3^j}]=[\frac{6k+2}{3^{j+1}},\frac{2k+1}{3^j}].$$

Si $b_k=0$ pour tout k>j+1, alors x peut s'écrire sous la forme (2.2), avec $b_{j+1}=0$ et $b_k=2$ pour k>j+1; on a en fait $x=\frac{6k+1}{3^{j+1}}$. Supposons donc que ce n'est pas le cas. On doit alors avoir $x>\frac{6k+1}{3^{j+1}}$ et par conséquent x ne peut appartenir au premier intervalle. Si $b_k=2$ pour tout k>j+1, alors x peut s'écrire sous la forme (2.2), avec $b_{j+1}=2$ et $b_k=0$ pour k>j+1; on a en fait $x=\frac{6k+2}{3^{j+1}}$. Si ce n'est pas le cas, on doit avoir $x<\frac{6k+2}{3^{j+1}}$, ce qui implique que x ne peut appartenir au second intervalle. On vient ainsi de montrer que les éléments de K_{j+1} sont de la forme

$$x = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{2a_k}{3^k} + \sum_{k=j+2}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$

avec $a_k \in \{0,1\}$ et $b_k \in \{0,1,2\}$; autrement dit, $b_{j+1} \neq 1$. Si x appartient à \mathfrak{C} , on a $x \in K_j$ pour tout j, ce qui implique que x peut s'écrire sous la forme (2.2) avec $b_k \neq 1$, quel que soit k.

L'ensemble de Cantor jouit de quelques propriétés remarquables.

Proposition 2.1.28. L'ensemble de Cantor triadique n'a pas de point isolé; c'est donc un ensemble parfait.

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert contenant un point x de \mathfrak{C} et $\varepsilon > 0$ tel que

$$|x-\varepsilon,x+\varepsilon|\subset I$$
.

On remarque directement que chaque intervalle constitutif de K_j est de longueur 3^{-j} exactement. On remarque également que les extrémités de ces intervalles appartiennent à $\mathfrak C$ par construction. Soit $j_0 \in \mathbb N^*$ tel que $3^{-j_0} < \varepsilon$. Soit alors I_{j_0} l'intervalle constitutif de K_{j_0} contenant x et x' une des extrémités de I_{j_0} telle que $x' \neq x$. On a

$$|x-x'|<3^{-j_0}$$

par construction et donc $x' \in I$.

Démonstration. Par définition, il nous faut montrer que tous les points de \mathfrak{C} sont des points limites, i.e. que tout point x de \mathfrak{C} est adhérent à $\mathfrak{C} \setminus \{x\}$. Or un point x de \mathfrak{C} s'écrit

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k},$$

pour une suite $(a_k)_k$ à valeurs dans $\{0,1\}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, soit

$$x_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k'}{3^k},$$

avec $a'_k = a_k$ pour $k \neq j$ et $a'_j = 1 - a_j$. Il est clair que la suite $(x_j)_j$ ainsi construite est à valeurs dans $\mathfrak C$ et converge vers x, avec $x_j \neq x$ quel que soit l'indice j.

Un ensemble parfait est nécessairement non-dénombrable. Dans le cas de l'ensemble de Cantor triadique, nous pouvons le démontrer simplement, grâce à l'escalier du diable.

Définition 2.1.29. L'escalier du diable est la fonction définie sur ${\mathfrak C}$ par

$$\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C} \to [0,1] \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2a_j}{3^j} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j},$$

où $a_j \in \{0,1\}$ définit une représentation du nombre x en base trois ne contenant pas le chiffre 1. Cette fonction peut être étendue sur [0,1] en posant

$$\mathfrak{D}(x) = \sup \{ \mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}(x') : x' \in \mathfrak{C}, x' \leqslant x \}.$$

On constate sans peine que la fonction \mathfrak{D} est constante sur $[0,1] \setminus \mathfrak{C}$, croissante sur \mathfrak{C} et continue sur [0,1].

Proposition 2.1.30. L'ensemble de Cantor triadique a la puissance du continu.

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'escalier du diable $\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}$ restreint à \mathfrak{C} est une surjection.

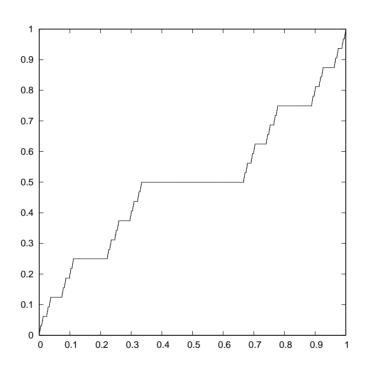


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de l'escalier du diable.

Démonstration. Soit $N=\{x_j:j\in\mathbb{N}^*\}$ un ensemble dénombrable de \mathfrak{C} . L'ensemble K_1 est constitué de deux intervalles disjoints et donc x_1 n'appartient pas à l'un d'entre eux. Notons cet intervalle I_1 . Considérons maintenant $K_2\cap I_1$; cet ensemble est constitué de deux intervalles et x_2 n'appartient pas à l'un d'entre eux. Notons cet ensemble I_2 . Si I_j a été défini comme un intervalle constitutif de K_j ne contenant pas x_j , on définit I_{j+1} comme un intervalle constitutif de $K_{j+1}\cap I_j$ ne contenant pas x_{j+1} . Puisque les intervalles I_j sont emboîtés en décroissant, il existe un point x_0 de $\cap_{j=1}^{\infty} I_j$. On a $x_0 \in \mathfrak{C}$ par construction, mais $x_0 \neq x_j$ quel que soit $j \in \mathbb{N}^*$, donc $\mathfrak{C} \not\subset N$.

Le résultat suivant montre qu'il existe un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue ayant la puissance du continu.

Proposition 2.1.31. L'ensemble triadique de Cantor est de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration. Bien entendu, pour tout j, l'ensemble K_j intervenant dans la définition de l'ensemble triadique de Cantor est mesurable et, par construction, $\mathcal{L}(K_j) = 2^j/3^j$, pour tout $j \geq 0$. Ainsi,

$$\mathcal{L}(\mathfrak{C}) = \lim_{j} \mathcal{L}(K_j) = \lim_{j} \frac{2^j}{3^j} = 0,$$

ce qui suffit.

Établissons maintenant qu'il existe un ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue qui n'est pas borélien. L'escalier du diable (restreint à \mathfrak{C}) étant surjectif, il admet un inverse à droite injectif,

$$\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1}:[0,1]\to\mathfrak{C}\quad y\mapsto\inf\{x\in\mathfrak{C}:\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}(x)=y\}.$$

L'image de $\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1}$ est une partie \mathfrak{C}_* de l'ensemble triadique de Cantor. Enfin, $\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}$ étant croissant, $\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1}$ est strictement croissant et est donc Borel-mesurable (cf. Exemples 2.1.3). Puisque $\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1}$: $[0,1] \to \mathfrak{C}_*$ est une bijection, soit

$$\mathfrak{D}_*:\mathfrak{C}_*\to[0,1]$$

la fonction inverse de $\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1}$. Pour tout $x \in \mathfrak{C}_*$, on a $\mathfrak{D}_*(x) = \mathfrak{D}(x)$ (de fait, on doit avoir $x = \mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1} \circ \mathfrak{D}_*(x) = \mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1} \circ \mathfrak{D}(x)$, ce qui implique l'égalité annoncée, l'application étant une bijection). Ce faisant, nous avons donc restreint le domine de \mathfrak{D} pour obtenir une fonction bijective ². Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant.

Proposition 2.1.32. Il existe un sous-ensemble de l'ensemble triadique de Cantor qui n'est pas borélien.

En particulier, il existe un sous-ensemble de l'ensemble triadique de Cantor qui est mesurable pour la mesure de Lebesgue et non-borélien.

Démonstration. Nous savons qu'il existe un sous-ensemble de [0,1] qui n'est pas mesurable; soit N un tel ensemble. L'ensemble $E = \mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1}(N)$ est inclus dans \mathfrak{C}_* et est par conséquent mesurable. En effet, la mesure de Lebesgue étant complète (sur la σ -algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables), $E \subset \mathfrak{C}$ et $\mathcal{L}(\mathfrak{C}) = 0$ implique que E est mesurable, avec $\mathcal{L}(E) = 0$. Si E était un ensemble borélien, l'ensemble $(\mathfrak{D}|_{\mathfrak{C}}^{-1})^{-1}(E)$ serait mesurable, par la Proposition 2.1.14. Or, puisque \mathfrak{D}_* est bijectif, on a $\mathfrak{D}_*(E) = N$. C'est absurde, puisque N a été choisi non-mesurable.

^{2.} Ce la revient à exclure de $\mathfrak C$ certaines extrémités des intervalles constitutifs des ensembles K_j . On ne modifie donc $\mathfrak C$ que sur une partie dénombrable.

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 2.1.33. La mesure de Lebesque définie sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) n'est pas complète.

Donnons une seconde construction légèrement plus simple, mais faisant intervenir la remarque 1.4.45. L'idée est de rendre $\mathfrak D$ strictement croissant, pour éviter de recourir à $\mathfrak D_*$. Considérons la fonction

$$f: [0,1] \to [0,2] \quad x \mapsto \mathfrak{D}(x) + x.$$

Puisque cette fonction est strictement croissante et continue, il s'agit d'un homéomorphisme.

Lemme 2.1.34. L'ensemble $\mathfrak{f}(\mathfrak{C})$ contient un ensemble qui n'est pas Lebesgue-mesurable.

Démonstration. Montrons d'abord que l'image de tout intervalle I de $[0,1] \setminus \mathfrak{C}$ par f est un intervalle de [0,2] de même mesure de Lebesgue. Puisque \mathfrak{D} est constant sur $[0,1] \setminus \mathfrak{C}$, on a $\mathfrak{D}(b) - \mathfrak{D}(a) = 0$ pour tous $a, b \in I$ et donc, si a < b,

$$\mathcal{L}(|\mathfrak{f}(a),\mathfrak{f}(b)|) = \mathfrak{f}(b) - \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{D}(b) + b - \mathfrak{D}(a) - a = b - a = \mathcal{L}(|a,b|).$$

On peut alors montrer que $\mathcal{L}(\mathfrak{f}(\mathfrak{C})) = 1$. De fait, on a

$$\mathcal{L}(\mathfrak{f}([0,1]\setminus\mathfrak{C}))=\mathcal{L}([0,1]\setminus\mathfrak{C})=1$$

et donc

$$2 = \mathcal{L}([0,2]) = \mathcal{L}(\mathfrak{f}(\mathfrak{C})) + \mathcal{L}(\mathfrak{f}([0,1] \setminus \mathfrak{C})) = \mathcal{L}(\mathfrak{f}(\mathfrak{C})) + 1.$$

On en conclut que $f(\mathfrak{C})$ contient un ensemble non-mesurable, vu la remarque 1.4.45. \square

Proposition 2.1.35. Si N est un ensemble non-mesurable de $\mathfrak{f}(\mathfrak{C})$ pour la mesure de Lebesque, alors $\mathfrak{f}^{-1}(N)$ est un ensemble mesurable qui n'est pas borélien.

Démonstration. Puisque $\mathfrak{f}^{-1}(N)$ est une partie de \mathfrak{C} , $\mathfrak{f}^{-1}(N)$ est un ensemble négligeable, donc Lebesgue-mesurable. Puisque \mathfrak{f} est un homéomorphisme, si $\mathfrak{f}^{-1}(N)$ était un ensemble borélien, N le serait également, ce qui permet de conclure.

Définition générale de la mesurabilité pour les applications

Nous allons nous intéresser ici au concept de mesurabilité pour les applications dont le domaine et l'image sont des ensembles quelconques.

C'est la dernière condition de la Proposition 2.1.14 qui va donner lieu à une définition générale de la mesurabilité.

Définition 2.1.36. Soient (X, \mathscr{A}) et (Y, \mathscr{B}) deux espaces mesurables et $A \in \mathscr{A}$. Une application $f: A \to Y$ est une application mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathscr{B} si $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ pour tout $B \in \mathscr{B}$. Si le contexte est clair, on dit simplement que f est une application mesurable.

Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et f une application définie sur X à valeurs réelles. Par la Proposition 2.1.14, cette application est \mathscr{A} -mesurable au sens de la Définition 2.1.2 si et seulement si elle est mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathbb{B} , selon la Définition 2.1.36.

Proposition 2.1.37. Soient (X, \mathscr{A}) , (Y, \mathscr{B}) et (Z, \mathscr{C}) des espaces mesurables. Si les applications $f: ((Y, \mathscr{B}) \to (Z, \mathscr{C})$ et $g: (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ sont mesurables, alors $f \circ g: (X, \mathscr{A}) \to (Z, \mathscr{C})$ est mesurable.

Démonstration. Si
$$C \in \mathcal{C}$$
, $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ et donc $g^{-1}(f^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. Ainsi, $(f \circ g)^{-1}(C) = g^{-1}(f^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$, ce qui suffit.

Le résultat suivant est parfois utile pour vérifier la mesurabilité d'une application.

Proposition 2.1.38. Soient (X, \mathscr{A}) et (Y, \mathscr{B}) deux espace mesurables et \mathscr{C} une collection de sous-ensemble de Y telle que $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$. Une application $f: X \to Y$ est mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathscr{B} si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ pour tout $B \in \mathscr{C}$.

Démonstration. Bien sûr, si f est mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathscr{B} , alors $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ $\forall B \in \mathscr{C}$.

Supposons maintenant que $f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \ \forall B \in \mathscr{C}$. Soit \mathscr{F} la collection des sousensembles B de Y tels que $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. Par le Lemme 2.1.13, \mathscr{F} est une σ -algèbre. On a $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ et donc $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$, ce qui suffit.

Corollaire 2.1.39. Soient $(X, \mathcal{B}(X))$ et $(Y, \mathcal{B}(Y))$ deux espace mesurables. Si $f: X \to Y$ est une application continue, alors f est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$.

 $D\acute{e}monstration$. De fait, par définition, l'image inverse de tout ensemble ouvert est un ensemble ouvert, ce qui suffit, vu la Proposition 2.1.38.

Proposition 2.1.40. Soient X un espace topologique et Y un sous-espace (topologique) de X. On a $\mathcal{B}(Y) = \{A : \exists B \in \mathcal{B}(X) : A = B \cap Y\}.$

Démonstration. Soit \mathscr{C} la collection des sous-ensembles de Y de la forme $B \cap Y$, avec $B \in \mathscr{B}(X)$. L'injection canonique $j: Y \to X$ étant continue (i.e. mesurable par rapport à $\mathscr{B}(Y)$ et $\mathscr{B}(X)$), on a $j^{-1}(B) = B \cap Y \ \forall B \in \mathscr{B}(X)$ et donc $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(Y)$. D'un autre côté, \mathscr{C} est une σ -algèbre sur Y contenant les ensembles ouverts de Y et donc $\mathscr{B}(Y)$, ce qui suffit.

L'analogie entre la Définition 2.1.36 et la notion de continuité est évidente. Pour la mesurabilité cependant, les résultats limites sont moins délicats.

Proposition 2.1.41. Soient (X, \mathscr{A}) et (Y, \mathscr{B}) des espaces mesurables et $(f_k)_k$ une suite d'applications mesurables de (X, \mathscr{A}) dans (Y, \mathscr{B}) . Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles disjoints de \mathscr{A} tels que $\cup_k A_k = X$, l'application

$$f: X \to Y \quad x \mapsto f_k(x) \text{ si } x \in A_k$$

est mesurable.

Démonstration. De fait, si $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) = \bigcup_k A_k \cap f_k^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.1.42. Soient (Y,d) un espace métrique et (X,\mathscr{A}) un espace mesurable. Si $(f_k)_k$ est une suite d'applications de X dans Y mesurables par rapport à \mathscr{A} et $\mathscr{B}(Y)$ qui converge ponctuellement vers une application f, alors f est aussi mesurable.

Démonstration. Soit B un sous-ensemble fermé de Y; on a $y \in B$ si et seulement si d(y,B)=0. Dès lors, $f^{-1}(B)=\{x\in X:d(f(x),B)=0\}=\{x\in X:\lim_k d(f_k(x),B)=0\}=\cap_i \cup_j \cap_{k\geqslant j} \{d(f_k,B)\leqslant 1/i\}\in \mathscr{A}$, par la Proposition 2.1.37 (cf. Proposition A.2.12). La Proposition 2.1.38 permet de conclure, puisque $\mathscr{B}(Y)=\sigma(\{B:B\subset Y,B\text{ fermé}\})$. \square

Soit $\overline{\mathbb{B}}$ la collection de tous les sous-ensembles de $\overline{\mathbb{R}}$ de la forme $B \cup C$, avec $B \in \mathbb{B}$ et $C \subset \{-\infty, \infty\}$. On vérifie sans peine qu'il s'agit d'une σ -algèbre.

Proposition 2.1.43. On $a \bar{\mathbb{B}} = \sigma([-\infty, x] : x \in \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit \mathscr{C} la collection des ensembles de la forme $[-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. On a $[-\infty, x] = \{-\infty\} \cup]-\infty, x]$ et donc $\mathscr{C} \subset \overline{\mathbb{B}}$. De là, on obtient $\sigma(\mathscr{C}) \subset \overline{\mathbb{B}}$. Pour l'autre inclusion, on note d'abord que $\{-\infty\} = \cap_k [-\infty, -k] \in \sigma(\mathscr{C})$; de même, $\{\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \cup_k [-\infty, k] \in \sigma(\mathscr{C})$. De là, $]-\infty, x] = [-\infty, x] \setminus \{-\infty\} \in \sigma(\mathscr{C})$ et donc $\mathbb{B} \subset \sigma(\mathscr{C})$. Dès lors, si B est un ensemble borélien et $C \subset \{-\infty, \infty\}$, $B \cup C \in \sigma(\mathscr{C})$ et donc $\overline{\mathbb{B}} \subset \sigma(\mathscr{C})$. \square

Proposition 2.1.44. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, $A \in \mathscr{A}$ et f une application de A dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'application f est \mathscr{A} -mesurable au sens de la Définition 2.1.2 si et seulement si elle est mesurable par rapport à \mathscr{A} et $\overline{\mathbb{B}}$, selon la Définition 2.1.36.

Démonstration. Cela résulte de proposition 2.1.38 et de la proposition 2.1.43, puisque $\{x \in A : f(x) \leq y\} = f^{-1}([-\infty, y]).$

Proposition 2.1.45. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et f une application de X dans \mathbb{R}^d . Si $(f_k)_{k=1}^d$ sont les composantes de f, i.e. si $f = (f_1, \ldots, f_d)$, f est mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathbb{B}^d si et seulement si les applications f_k sont \mathscr{A} -mesurables $(k \in \{1, \ldots, d\})$.

Démonstration. Cela découle de la Proposition 1.1.11 et la Proposition 2.1.38. En effet, si chaque f_k est mesurable, on a

$$\{x \in X : x \in f^{-1}(\prod_{k=1}^{d}] - \infty, b_k]\} = \{x \in X : f_k(x) \in]-\infty, b_k], 1 \leqslant k \leqslant d\}$$
$$= \bigcap_{k=1}^{d} \{x \in X : f_k(x) \leqslant b_k\} \in \mathscr{A}.$$

Inversement, si f est mesurable, pour $k_0 \in \{1, \ldots, d\}$, posons $b_{k_0, j} = y \ \forall j$ et $b_{k, j} = j$ si $k \neq k_0$. On a

$$\{x \in X : f_{k_0}(x) \leq y\} = \bigcup_{j} \bigcap_{k=1}^{d} \{x \in X : f_k(x) \leq b_{k,j}\}$$
$$= \bigcup_{j} \{x \in X : x \in f^{-1}(\prod_{k=1}^{d}] - \infty, b_{k,j}])\} \in \mathscr{A},$$

ce qui suffit.

En identifiant l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} avec l'espace \mathbb{R}^2 et en posant $\mathscr{B}(\mathbb{C}) = \mathbb{B}^2$, la remarque précédente implique qu'une application f à valeurs complexes est mesurable par rapport à \mathscr{A} et $\mathscr{B}(\mathbb{C})$ si et seulement si les parties réelles et imaginaires de f

sont \mathscr{A} -mesurables. La collections des applications mesurables de (X,\mathscr{A}) dans $(\mathbb{C},\mathscr{B}(\mathbb{C}))$ est stable pour les opérations somme, multiplication par un nombre réel et limite. Des arguments identiques à ceux développés dans cette section permettent de montrer que le produit de deux applications mesurables à valeurs complexes est une application mesurable (en particulier le produit d'un nombre complexe et d'une application mesurable à valeurs complexes est mesurable).

Image d'une mesure par une application

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (Y, \mathcal{B}) un espace mesurable et $f: X \to Y$ une application mesurable par rapport à \mathcal{A} et \mathcal{B} . Définissons l'application μ_f de la manière suivante,

$$\mu_f: \mathscr{B} \to [0, \infty] \quad B \mapsto \mu \circ f^{-1}(B)$$
 (2.3)

Proposition 2.1.46. L'application μ_f définie par la relation (2.3) est une mesure sur (Y, \mathcal{B}) .

Démonstration. Bien sûr, $\mu_f(\varnothing) = 0$. Soit $(B_k)_k$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{B} . Les ensembles $f^{-1}(B_k)$ sont des ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{A} tels que $f^{-1}(\bigcup_k B_k) = \bigcup_k f^{-1}(B_k)$. De là, on a $\mu_f(\bigcup_k B_k) = \sum_k \mu_f(B_k)$ et μ_f est une mesure sur (Y,\mathscr{B}) .

Définition 2.1.47. La mesure définie par la relation (2.3) est appelée l'image de μ par f.

Définition 2.1.48. En théorie des probabilités, une application mesurable est appelée une quantité aléatoire. Si cette application est à valeurs réelles et est mesurable au sens de la Définition 2.1.2, on parle de variable aléatoire. On dénote généralement les quantités aléatoires par X, Y et Z. Si (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace probabilisé, la mesure P_X est appelée distribution de X ou encore loi de X. On note aussi parfois $P(\{X \in B\}) = P_X(B)$.

2.2 Propriétés vérifiées presque partout

Les propriétés vérifiée presque partout sont de premières importance en théorie de la mesure.

Définition 2.2.1. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $E \subset X$. Une propriété (concernant des points de X) est dite vérifiée μ -presque partout dans E si l'ensemble des points de E pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée est μ -négligeable (c.f. Définition 1.2.11). On dit alors que la propriété est vérifiée μ -p.p. Si le contexte est clair, on peut omettre la référence à μ en utilisant les expressions presque partout et l'abréviation p.p.

Rappelons qu'il n'est pas nécessaire que l'ensemble des points pour lesquels la propriété n'est pas vérifiée soit un élément de \mathscr{A} . Bien sûr, si la mesure est complète, alors cet ensemble doit appartenir à \mathscr{A} . Donnons quelques exemples.

Exemples 2.2.2. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

- Si f et g sont deux fonctions sur X, alors f = g μ -p.p. si l'ensemble $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ est μ -négligeable,
- $f \geqslant g \mu$ -p.p. si $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ est μ -négligeable,

— si $(f_k)_k$ est une suite de fonctions de X, alors elle converge μ -p.p. vers f si $\{x \in X : \lim_k f_k(x) \neq f(x)\}$ est μ -négligeable.

Remarquons que si f et g sont mesurables, alors le ensembles $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ et $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ appartiennent à la σ -algèbre \mathscr{A} .

Voici quelques propriétés concernant la mesurabilité et la notion « presque partout ».

Proposition 2.2.3. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et f, g deux applications de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ égales presque partout. Si μ est une mesure complète et si f est \mathscr{A} -mesurable, alors g est également \mathscr{A} -mesurable.

Démonstration. Soit N un ensemble négligeable tel que $f(x) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{N}^c$; on a donc $N \in \mathscr{A}$ et $\mu(N) = 0$. On peut écrire, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X : g(x) < y\} = (\{x \in X : f(x) < y\} \cap N^c) \cup (\{x \in X : g(x) < y\} \cap N).$$

Puisque μ est une mesure complète, $\{x \in X : g(x) < y\} \cap N \in \mathscr{A}$ et donc $\{x \in X : g(x) < y\} \in \mathscr{A}$, ce qui suffit.

Corollaire 2.2.4. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, $(f_k)_k$ une suites d'applications de X dans \mathbb{R} et f une application de X dans \mathbb{R} telle que la suite $(f_k)_k$ converge μ -presque partout vers f. Si μ est une mesure complète et si f_k est \mathscr{A} -mesurable pour tout k, alors f est \mathscr{A} -mesurable.

Démonstration. Nous avons vu que l'application $\underline{\lim}_k f_k$ est une application \mathscr{A} -mesurable (proposition 2.1.6). Qui plus est, par hypothèse, $f = \underline{\lim}_k f_k$ presque partout. La proposition précédente implique donc que f est \mathscr{A} -mesurable.

Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. Si μ n'est pas une mesure complète, soit $N \subset X$ un ensemble μ -négligeable n'appartenant pas à \mathscr{A} . La fonction caractéristique χ_N et la fonction constante 0 sont égales presque partout, mais alors que la fonction 0 est \mathscr{A} -mesurable, χ_N ne l'est pas. De même, la suite de fonctions dont chaque terme est la fonction nulle converge presque partout vers χ_N , ce qui souligne l'importance de l'hypothèse concernant la complétude de la mesure.

Proposition 2.2.5. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et \mathscr{A}_{μ} la σ -algèbre sur laquelle est définie la complétion de μ sur \mathscr{A} . L'application $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ est \mathscr{A}_{μ} -mesurable si et seulement si il existe deux applications \mathscr{A} -mesurables $f_I, f_S: X \to \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f_I \leqslant f \leqslant f_S$ partout sur X et $f_I = f_S$ μ -presque partout sur X.

Démonstration. Supposons l'existence de deux applications f_I et f_S vérifiant les conditions de l'énoncé. L'application f_I est \mathscr{A}_{μ} -mesurable et $f = f_I$ $\bar{\mu}$ -presque partout. La Proposition 2.2.3 appliquée à l'espace mesuré $(X, \mathscr{A}_{\mu}, \bar{\mu})$ implique que f est \mathscr{A}_{μ} -mesurable.

Supposons maintenant que f est \mathscr{A}_{μ} -mesurable. Supposons d'abord que l'application est de la forme $f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k} \ (N \in \mathbb{N}_0)$, avec $a_k \in \mathbb{R}^+ \ \forall k$. Pour tout k, il existe des ensembles $A_{I,k}, A_{S,k} \in \mathscr{A}$ tels que $A_{I,k} \subset A_k \subset A_{S,k}$ et $\mu(A_{S,k} \setminus A_{I,k}) = 0$ (voir Exemples 2.1.3). Les fonctions $f_I = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_{I,k}}$ et $f_S = \sum_k a_k \chi_{A_{S,k}}$ sont les fonctions recherchées. Si $f(X) = \{a_1, \ldots, a_N\}$ avec $a_k \in \mathbb{R} \ \forall k$, l'argument précédent peut être appliqué aux parties positives et négatives de f.

Si f est une application de X dans \mathbb{R} \mathscr{A}_{μ} -mesurable arbitraire, soit $(f_k)_k$ une suite d'applications de X dans \mathbb{R} \mathscr{A}_{μ} -mesurables dont l'image est finie telle que $\lim_k f_k = f$

2.3. INTÉGRATION

63

sur X. Pour chaque k, nous savons qu'il existe deux applications $f_{I,k}, f_{S,k}$ telles que $f_{I,k} \leq f_k \leq f_{S,k}$ sur X et $f_{I,k} = f_{S,k}$ μ -presque partout sur X. Les fonctions $f_I = \underline{\lim} f_{I,k}$ et $f_S = \overline{\lim} f_{S,k}$ sont les fonctions recherchées.

2.3 Intégration

Dans cette section, nous définissons les intégrales et en donnons les premières propriétés. La définition de l'intégrale se fera en trois étapes.

Intégrale de fonctions simples

La première étape consiste à définir l'intégrale pour des applications pouvant s'écrire comme une somme finie de fonctions caractéristiques.

Définition 2.3.1. Une application simple est une application $f: X \to \mathbb{R}$ dont l'image f(X) est un ensemble fini. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable; la collection des applications simples sur X \mathscr{A} -mesurables (on parle parfois d'applications \mathscr{A} -simples) est notée $\mathscr{S}(X, \mathscr{A})$, ou simplement \mathscr{S} lorsque le contexte est clair. La collection des fonctions de $\mathscr{S}(X, \mathscr{A})$ à valeurs positives est notée $\mathscr{S}^+(X, \mathscr{A})$ ou \mathscr{S}^+ si aucune confusion n'est possible.

Puisque la mesurabilité est stable pour les combinaisons linéaires, $\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$ est un espace vectoriel. La fonction caractéristique χ_A , avec $A \in \mathscr{A}$, est une fonction de $\mathscr{S}^+(X,\mathscr{A})$. Remarquons que $\chi_A^{-1}(B)$ est toujours un des ensembles \varnothing , X, A ou A^c .

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Si $f \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ et si a_1, \ldots, a_N sont les valeurs distinctes que prend l'application f, posons $A_k = f^{-1}(a_k)$. On a

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k},\tag{2.4}$$

avec $a_k \ge 0 \ \forall k$. On peut bien sûr supposer que les coefficients a_k intervenant dans cette égalité sont strictement positifs. Bien sûr, les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et $A_k \in \mathscr{A}$ pour tout k (voir exemples 2.1.3). On constate sans peine qu'une telle représentation est unique.

Définition 2.3.2. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et f une application de $\mathscr{S}^+(X, \mathscr{A})$. L'intégrale de f par rapport à μ , notée $\int f d\mu$ est définie comme suit,

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A_k),$$

où les ensembles A_k sont les ensembles intervenant dans l'égalité (2.4).

Vérifions quelques propriétés de l'intégrale ainsi définie.

Proposition 2.3.3. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, f, g deux applications de \mathcal{S}^+ et α un nombre réel positif. On a

$$-\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu,$$

$$-\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$$

—
$$si f \leq g sur X$$
, $alors \int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Démonstration. Soient $f(X) = \{a_1, \ldots, a_N\}$, $g(X) = \{b_1, \ldots, b_M\}$ et $f+g(X) = \{c_1, \ldots, c_P\}$. En écrivant αf sous la forme (2.4), on a $\alpha f = \sum_{k=1}^{N} \alpha a_k \chi_{A_k}$ et donc

$$\int \alpha f \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} \alpha a_k \mu(A_k) = \alpha \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A_k) = \alpha \int f \, d\mu.$$

Pour la seconde propriété, en supposant que $g = \sum_{k=1}^{M} b_k \chi_{B_k}$ et $f + g = \sum_{k=1}^{P} c_k \chi_{C_k}$,

$$\int f + g \, d\mu = \sum_{k=1}^{P} c_k \mu(\{x \in X : f(x) + g(x) = c_k\})$$

$$= \sum_{k=1}^{P} c_k \sum_{a_i + b_j = c_k} \mu(\{x \in X : f(x) = a_i, \ g(x) = b_j\})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (a_i + b_j) \mu(\{x \in X : f(x) = a_i, \ g(x) = b_j\})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{M} \mu(\{x \in X : f(x) = a_i, \ g(x) = b_j\})$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} b_j \sum_{i=1}^{N} \mu(\{x \in X : f(x) = a_i, \ g(x) = b_j\})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(\{x \in X : f(x) = a_i\}) + \sum_{j=1}^{M} b_j \mu(\{x \in X : g(x) = b_j\})$$

$$= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Pour la troisième propriété, supposons que $f \leq g$ sur X. On a donc $g - f \in \mathcal{S}^+$ et

$$\int g \, d\mu = \int f + (g - f) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int (g - f) \, d\mu \geqslant \int f \, d\mu,$$

ce qui termine la démonstration.

Proposition 2.3.4. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, f une application de \mathscr{S}^+ et $(f_k)_k$ une suite croissante d'applications de \mathscr{S}^+ telles que $\lim_k f_k = f \, \operatorname{sur} X$. On a $\lim_k \int f_k d\mu = \int f d\mu$.

Démonstration. La Proposition 2.3.3 implique que

$$\int f_1 d\mu \leqslant \int f_2 d\mu \leqslant \cdots \leqslant \int f_k d\mu \leqslant \cdots \leqslant \int f d\mu.$$

Dès lors, la limite de la suite $(\int f_k d\mu)_k$ existe et $\lim_k \int f_k d\mu \leqslant \int f d\mu$. Montrons que l'inégalité inverse est vérifiée. Étant donné $0 < \varepsilon < 1$, nous allons construire une suite croissante $(g_k)_k$ de d'applications de \mathscr{S}^+ telles que $g_k \leqslant f_k \ \forall k$ et $\lim_k \int g_k d\mu = (1 - 1)^k d\mu$

 ε) $\int f d\mu$, ce qui impliquera $(1 - \varepsilon) \int f d\mu \leq \lim_k \int f_k d\mu$ et donc $\int f d\mu \leq \lim_k \int f_k d\mu$, puisque ε est arbitraire.

Supposons que f s'écrive selon l'égalité (2.4), $f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{A_k}$ et posons $A_{k,j} = \{x \in A_k : f_j(x) \geqslant (1-\varepsilon)a_k\}$. Chacun de ces ensembles appartient à \mathscr{A} . Pour k fixé, la suite $(A_{k,j})_j$ est croissante et vérifie $A_k = \bigcup_j A_{k,j}$. Soit $g_j = \sum_{k=1}^N (1-\varepsilon)a_k \chi_{A_{k,j}}$. Pour tout j, $g_j \in \mathscr{S}^+$ et vérifie $g_j \leqslant f_j$. La continuité de la mesure implique

$$\lim_{j} \int g_j d\mu = \lim_{j} \sum_{k=1}^{N} (1 - \varepsilon) a_k \mu(A_{k,j}) = \sum_{k=1}^{N} (1 - \varepsilon) a_k \mu(A_k) = (1 - \varepsilon) \int f d\mu,$$

ce qui suffit. \Box

Intégrale de fonctions à valeurs dans $[0, \infty]$

Définissons maintenant l'intégrale pour des applications mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$.

Définition 2.3.5. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et f une application \mathscr{A} -mesurable définie sur X à valeurs dans $[0, \infty]$. L'intégrale de f par rapport à μ , aussi notée $\int f d\mu$, est définie comme suit,

$$\int f \, d\mu = \sup \{ \int g \, d\mu : g \in \mathscr{S}^+(X, \mathscr{A}) \text{ et } g \leqslant f \}.$$

Vu le caractère monotone des intégrales définie sur $\mathscr{S}^+(X,\mathscr{A})$, on vérifie sans peine que cette définition est une généralisation de la Définition 2.3.2.

Proposition 2.3.6. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $f: X \to [0, \infty]$ une application \mathcal{A} -mesurable et $(f_k)_k$ une suite croissante d'applications de \mathscr{S}^+ telles que $\lim_k f_k = f$ sur X. On a $\lim_k \int f_k d\mu = \int f d\mu$.

Démonstration. Comme pour la proposition 2.3.4, on a $\lim_k \int f_k d\mu \leqslant \int f d\mu$. Par définition de $\int f d\mu$, pour prouver que $\lim_k \int f_k d\mu \geqslant \int f d\mu$, il suffit de prouver que toute application g de \mathscr{S}^+ satisfaisant $g \leqslant f$ vérifie $\int g d\mu \leqslant \lim_k \int f_k d\mu$. Soit donc g une telle application. La suite $(\min(g, f_k))_k$ est une suite croissante d'applications de \mathscr{S}^+ telle que $\lim_k \min(g, f_k) = g$. La proposition 2.3.4 implique donc $\int g d\mu = \lim_k \int \min(g, f_k) d\mu$. Puisque $\int \min(g, f_k) d\mu \leqslant \int f_k d\mu$, on a $\int g d\mu \leqslant \lim_k \int f_k d\mu$, ce qui termine la preuve. \square

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré; vu la Proposition 2.1.12, on peut définir l'intégrale d'une fonction \mathcal{A} -mesurable f comme suit :

$$\int f \, d\mu = \lim_{k} \int f_k \, d\mu,$$

où $(f_k)_k$ est une suite de \mathscr{S}^+ qui converge en croissant vers f.

Exemple 2.3.7. Si μ est une mesure atomique dont $(x_k)_k$ sont les atomes, on a

$$\int f d\mu = \sum_{k} f(x_k) \mu(\{x_k\}),$$

pour toute application $f: X \to [0, \infty]$. De fait, posons $p_k = \mu(\{x_k\})$. Pour tout $g \in \mathscr{S}^+$, on a $\int g \, d\mu = \sum_k g(x_k) p_k$. Si $(f_j)_j$ est une suite d'application croissante de \mathscr{S}^+ qui converge vers f, alors

$$\int f d\mu = \lim_{j} \int f_{j} d\mu = \lim_{j} \sum_{k} f_{j}(x_{k}) p_{k} \leqslant \sum_{k} f(x_{k}) p_{k}.$$

De plus, $g_j = \sum_k^j f(x_k) \chi_{\{x_k\}}$ définit une suite croissante de \mathscr{S}^+ telle que $g_j \leqslant f$ et

$$\lim_{j} \int g_j \, d\mu = \sum_{k} f(x_k) p_k,$$

ce qui suffit. Ainsi, pour la mesure de Dirac δ_x en x, on a $\int f d\delta_x = f(x)$.

Proposition 2.3.8. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $f, g: X \to [0, \infty]$ deux applications \mathscr{A} -mesurables et α un nombre réel positif. On a

- $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu,$
- $-\int_{0}^{\infty} f + g d\mu = \int_{0}^{\infty} f d\mu + \int_{0}^{\infty} g d\mu,$ si $f \leqslant g \ sur \ X, \ alors \int_{0}^{\infty} f d\mu \leqslant \int_{0}^{\infty} g d\mu.$

 $D\acute{e}monstration$. Nous savons qu'il existe deux suites croissantes d'applications $(f_k)_k$ et $(g_k)_k$ de \mathscr{S}^+ telles que $\lim_k f_k = f$ et $\lim_k g_k = g$. Les suites de fonctions $(\alpha f_k)_k$ et $(f_k + g_k)_k$ sont des suites croissantes de \mathscr{S}^+ . Dès lors les résultats précédents impliquent

$$\int \alpha f \, d\mu = \lim_{k} \int \alpha f_k \, d\mu = \alpha \lim_{k} \int f_k \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$$

et

$$\int f + g \, d\mu = \lim_{k} \int f_k + g_k \, d\mu = \lim_{k} \int f_k \, d\mu + \int g_k \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Pour la dernière assertion, si $f \leq g$, alors la classe des fonctions h de \mathscr{S}^+ telles que $h \leq f$ est incluse dans la classe des fonctions h de \mathscr{S}^+ telles que $h \leqslant g$ et donc $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$. La proposition est donc démontrée.

Définition générale de l'intégrale

Passons maintenant à la définition générale de l'intégrale.

Définition 2.3.9. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et f une application \mathscr{A} -mesurable définie sur X à valeurs dans \mathbb{R} . Si les parties positive f^+ et négative f^- de f sont telles que $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$ sont finis, alors l'application f est dite intégrable et l'intégrale de f par rapport à μ , aussi notée $\int f d\mu$, est définie comme étant

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Si au moins une des composantes $\int f^+ d\mu$ ou $\int f^- d\mu$ est finie, on dit que l'intégrale existe et $\int f d\mu$ est défini de la même manière. On écrit parfois $\int f(x)\mu(dx)$ ou $\int f(x)d\mu(x)$ en lieu et place de $\int f d\mu$.

Si $f: X \to \mathbb{R}$ est \mathscr{A} -mesurable et $A \in \mathscr{A}$, alors f est intégrable sur A si l'application $f\chi_A$ est intégrable et dans ce cas, l'intégrale de f sur A, notée $\int_A f d\mu$, est définie comme

étant $\int f \chi_A d\mu$. Si le domaine de définition de f est l'ensemble $A \in \mathscr{A}$, l'intégrale de f sur A est l'intégrale (si elle existe) de l'application sur X qui est égale à f sur A et 0 sur A^c . Si $\mu(A^c) = 0$, on écrit parfois $\int f d\mu$ à la place de $\int_A f d\mu$; on dit aussi que f est intégrable et non plus intégrable sur A.

Si $X = \mathbb{R}^d$ et $\mu = \mathcal{L}$ on parle d'intégrale de Lebesgue et on écrit simplement $\int f(x)dx$ ou même $\int fdx$ plutôt que $\int fd\mathcal{L}$.

Dans le cas général, l'intégrale est également linéaire et monotone pour les fonctions réelles.

Lemme 2.3.10. Soient (X, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré et $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^+$ des applications intégrables telles que $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$. On a $\int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int g_1 d\mu - \int g_2 d\mu$.

Démonstration. On a $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ et la Proposition 2.3.8 implique $\int f_1 d\mu + \int g_2 d\mu = \int f_2 d\mu + \int g_1 d\mu$. Puisque toutes les intégrales sont finies, cela suffit.

Proposition 2.3.11. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $f, g: X \to \mathbb{R}$ deux applications intégrables et α un nombre réel. On a

- $-\alpha f$ et f+g sont intégrables,
- $-\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu,$
- $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$
- $-si f \leq q sur X$, alors $\int f d\mu \leq \int q d\mu$.

Démonstration. L'intégrabilité de αf et la relation $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ sont claires si $\alpha = 0$. Supposons que $\alpha > 0$. On a $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha f^-$; ces deux applications sont donc intégrables, ce qui implique l'intégrabilité de αf . On a

$$\int \alpha f \, d\mu = \int \alpha f^+ \, d\mu - \int \alpha f^- \, d\mu = \alpha \int f^+ \, d\mu - \alpha \int f^- \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

Si $\alpha < 0$, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ et $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. L'argument précédent peut alors être aisément adapté.

Considérons maintenant l'application f+g. On a $(f+g)^+ \leqslant f^+ + g^+$ et $(f+g)^- \leqslant f^- + g^-$. Vu ce qui a été montré précédemment, on a

$$\int (f+g)^+ d\mu \leqslant \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu < \infty,$$

ce qui montre que $(f+g)^+$ et (par un argument similaire) $(f+g)^-$ sont intégrables; en conséquence, f+g est intégrable. On a $f+g=(f+g)^+-(f+g)^-=f^++g^+-(f^-+g^-)$ et par conséquent, vu le Lemme 2.3.10,

$$\int f + g \, d\mu = \int f^+ + g^+ \, d\mu - \int f^- + g^- \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Si $f \leq g$ sur X, g - f est une application positive et $\int g - f d\mu \geq 0$, ce qui suffit, vu les points précédents.

Nos allons maintenant obtenir les premières propriétés de l'intégrale

Proposition 2.3.12. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to \mathbb{R}$ une application \mathscr{A} mesurable. L'application f est intégrable si et seulement si |f| est intégrable. Dans ce cas, $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Démonstration. Par définition, f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont. Puisque $|f| = f^+ + f^-$, la Proposition 2.3.8 implique que |f| est intégrable si et seulement si f^+ et f^- le sont. On a alors

$$|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \le \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu,$$

ce qui démontre la seconde assertion.

Remarquons que l'hypothèse de mesurabilité est nécessaire, puisqu'il existe des applications non-mesurables (donc non-intégrables) dont la valeur absolue est intégrable. En effet, soit $N \subset [a,b]$ un ensemble qui n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue; on a tôt fait de vérifier que la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \chi_{[a,b] \setminus N}(x) - \chi_N(x)$ constitue un tel exemple.

Proposition 2.3.13. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f, g: X \to \mathbb{R}$ deux applications \mathcal{A} -mesurables égales presque partout. Si $\int f d\mu$ ou $\int g d\mu$ existe, alors les deux intégrales existent et $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. Supposons d'abord que f et g sont à valeurs positives. Soient $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ et h l'application égale à ∞ si $x \in N$ et à 0 sinon. On a $\int h d\mu = 0$. De fait, pour chaque k, l'application $h_k = k\chi_N$ définit une suite d'applications croissante $(h_k)_k$ de \mathscr{S}^+ qui converge vers h. La Proposition 2.3.6 implique $\int h d\mu = \lim_k \int h_k d\mu = 0$. Puisque $f \leq g + h$, la Proposition 2.3.8 implique $\int f d\mu \leq \int g d\mu + \int h d\mu = \int g d\mu$. En inversant les rôles de f et g, on obtient $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Le cas général se réduit au cas traité en considérant les décompositions $f=f^+-f^-$ et $g=g^+-g^-$.

Quelques propriétés de l'intégrale

Nous donnons ici quelques propriétés de base de l'intégrale.

Proposition 2.3.14. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to [0, \infty]$ une application \mathcal{A} -mesurable. Si y > 0 et $A_y = \{x \in X : f(x) \geqslant y\}$, alors $\mu(A_y) \leqslant \int_{A_y} f d\mu/y \leqslant \int f d\mu/y$.

Démonstration. On a $0 \le y\chi_{A_y} \le f\chi_{A_y} \le f$. La Proposition 2.3.8 implique $\int y\chi_{A_y}d\mu \le \int_{A_y}fd\mu \le \int fd\mu$. La conclusion s'en suit, puisque $\int y\chi_{A_y}d\mu = y\mu(A_y)$.

Corollaire 2.3.15. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to \mathbb{R}$ une fonction μ -intégrable. L'ensemble $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ est un ensemble σ -fini pour la mesure μ .

Démonstration. La Proposition 2.3.14 appliquée à |f| implique que les ensembles $A_{1/y} = \{x \in X : |f(x)| \ge 1/y\}$ soient de mesure finie pour μ . Puisque $\{x \in X : f(x) \ne 0\} = \bigcup_k A_{1/k}$, cet ensemble est σ-fini pour μ .

Corollaire 2.3.16. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to \mathbb{R}$ une application \mathscr{A} mesurable satisfaisant $\int |f| d\mu = 0$. L'application f s'annule presque partout.

Démonstration. La Proposition 2.3.14 appliquée à |f| implique $\mu(\{x \in X : |f(x)| \ge 1/y\}) \le y \int |f| d\mu = 0$ quel que soit y > 0. Puisque $\{x \in X : f(x) \ne 0\} = \bigcup_k \{x \in X : |f(x)| \ge 1/k\}$, la sous-additivité des mesures implique que $\mu(\{x \in X : f(x) \ne 0\}) = 0$. \square

Corollaire 2.3.17. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On a $|f| < \infty$ presque partout.

Démonstration. La Proposition 2.3.14 appliquée à |f| implique $\mu(\{x \in X : |f(x)| \geqslant y\}) \leqslant$ $\int |f| d\mu/y$ quel que soit y > 0. Ainsi, $\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) \leqslant \mu(\{x \in X : |f(x)| \geqslant 1\})$ $|y| \le \int |f| d\mu/y$ quel que soit y > 0 et donc $\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) = 0$.

Nous pouvons introduire l'espace \mathcal{L}^1 .

Définition 2.3.18. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. L'espace $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ (ou simplement \mathcal{L}^1 ou $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ lorsque le contexte est clair) est la collection des applications définies sur X à valeurs réelles intégrables sur X.

Vu les propriétés jusqu'ici obtenues, \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel et l'intégrale est une application linéaire sur \mathcal{L}^1 . On munit cet espace de la semi-norme $||f|| = \int |f| d\mu$.

Corollaire 2.3.19. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to \mathbb{R}$ une application \mathcal{A} mesurable. L'application f est intégrable si et seulement si il existe une application de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ égale à f presque partout.

Démonstration. S'il existe une application de \mathcal{L}^1 égale à f presque partout, la Proposition 2.3.13 implique que f est intégrable. Supposons maintenant que f est intégrable et soit $N = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$. Le Corollaire 2.3.17 implique $\mu(N) = 0$ et donc la fonction $g = f\chi_{N^c}$ est égale à f presque partout. Par la Proposition 2.3.13, g est intégrable et appartient donc à \mathcal{L}^1 .

Intégrale de fonctions à valeurs complexes

Le cas des applications à valeurs complexes se traite naturellement.

Définition 2.3.20. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Une application $f: X \to \mathbb{C}$ est intégrable si ses parties réelles et imaginaires, $\Re f$ et $\Im f$, le sont. Dans ce cas l'intégrale de f est définie par

$$\int f \, d\mu = \int \Re f \, d\mu + i \int \Im f \, d\mu.$$

Il est facile d'appliquer les techniques vues précédemment pour vérifier que si f et gsont deux applications à valeurs complexes intégrables et si $\alpha \in \mathbb{C}$, alors

- f + q et αf sont intégrables.
- $\begin{array}{l} --\int f+g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu, \\ --\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu. \end{array}$

Proposition 2.3.21. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to \mathbb{C}$ une application mesurable par rapport à \mathscr{A} et $\mathscr{B}(\mathbb{C})$. L'application f est intégrable si et seulement si |f| est intégrable. Dans ce cas, on a $|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu$.

Démonstration. La mesurabilité de |f| est facilement vérifiée. Montrons que f est intégrable si et seulement si |f| est intégrable en utilisant la Proposition 2.3.12. Puisque $|f| \le |\Re f| + |\Im f|$, |f| est intégrable si f l'est. Maintenant, si |f| est intégrable, l'intégrabilité de f résulte des inégalités $|\Re f| \leq |f|$ et $|\Im f| \leq |f|$.

Supposons maintenant que f est intégrable et écrivons $\int f d\mu = \alpha |\int f d\mu|$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. On a donc

$$|\int f \, d\mu| = (1/\alpha) \int f \, d\mu = \int f/\alpha \, d\mu = \int \Re(f/\alpha) \, d\mu \leqslant \int |f| \, d\mu,$$

ce qui termine la preuve.

Proposition 2.3.22. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to \mathbb{C}$ une application mesurable par rapport à \mathscr{A} et $\mathscr{B}(\mathbb{C})$. S'il existe une fonction $g: X \to [0, \infty]$ intégrable telle que $|f| \leqslant g$ presque partout sur X, alors f est également intégrable.

Démonstration. Soit $N = \{x \in X : |f(x)| > g(x)\}$; cet ensemble est mesurable et négligeable. Puisqu'on a $|f|\chi_{N^c} \leq g\chi_{N^c}$, la fonction $f\chi_{N^c}$ est intégrable sur X. On conclut directement, puisque $f = f\chi_{N^c}$ presque partout.

Définition 2.3.23. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. L'espace $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{C})$ (ou simplement \mathscr{L}^1 ou $\mathscr{L}^1(\mathbb{C})$ lorsque le contexte est clair) est la collection des applications définies sur X à valeurs complexes intégrables sur X.

Vu les propriétés jusqu'ici obtenues, \mathscr{L}^1 est un espace vectoriel et l'intégrale est une application linéaire sur \mathscr{L}^1 . On munit cet espace de la semi-norme $||f|| = \int |f| d\mu$.

L'intégrale pour les mesures extérieures

On peut définir la notion d'intégrale pour les mesures extérieures. Cependant, il est souvent nécessaire d'émettres des hypothèses supplémentaires pour obtenir une théorie satisfaisante, raison pour laquelle l'intégrale pour les mesures extérieures n'est pas souvent approfondie.

Définition 2.3.24. Soient μ^* une mesure extérieure sue un ensemble X. Une propriété (concernant des points de X) est dite vérifiée μ^* -presque partout dans E si l'ensemble des points N de E pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée est tel que $\mu^*(N) = 0$. On dit alors que la propriété est vérifiée μ^* -p.p. Si le contexte est clair, on peut omettre la référence à μ^* en utilisant les expressions presque partout et l'abréviation p.p.

L'intégrale de fonctions simples se définit de manière identique.

Définition 2.3.25. Étant donné une mesure extérieure μ^* sur un ensemble X, si f est une fonction simple positive définie sur X et de représentation canonique $f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k}$, l'intégrale de f par rapport à μ^* est donnée par

$$\int f \, d\mu^* = \sum_{k=1}^{N} a_k \mu^*(A_k).$$

Une fonction simple f sur X est dite μ^* -intégrable si $\int f^+ d\mu^+$ et $\int f^- d\mu^+$ sont finis. Dans ce cas, l'intégrale de f par rapport à μ^* est donnée par

$$\int f \, d\mu^* = \int f^+ \, d\mu^* - \int f^- \, d\mu^*.$$

Si soit $\int f^+ d\mu^+$, soit $\int f^- d\mu^+$ est fini, on dit que l'intégrale de f par rapport à μ^* existe, ou que f admet une intégrale, et on définit son intégrale de la même manière.

2.3. INTÉGRATION

71

Si f est une fonction simple μ^* -intégrable, on a donc

$$\int f \, d\mu^* = \sum_{\{y: y \in f(X)\}} y \mu^*(f^{-1}(y)).$$

Définition 2.3.26. Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Étant donné une application $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, soit \mathscr{C} la collection des fonctions simples g admettant une intégrale et telles que $g \geqslant f$ p.p. L'intégrale supérieure de f par rapport à μ^* est donnée par

$$\overline{\int} f \, d\mu^* = \inf \{ \int g \, d\mu^* : g \in \mathscr{C} \}.$$

Soit alors \mathscr{C}' la collection des fonctions simples g admettant une intégrale et telles que $g\leqslant f$ p.p. L'intégrale inférieure de f par rapport à μ^* est donnée par

$$\int_{\underline{-}} f \, d\mu^* = \sup \{ \int g \, d\mu^* : g \in \mathscr{C}' \}.$$

L'intégrale de f par rapport à μ^* existe si l'intégrale supérieure de f est égale à son intégrale inférieure. On définit alors l'intégrale $\int f d\mu^*$ par

$$\int f \, d\mu^* = \overline{\int} f \, d\mu^* = \int f \, d\mu^*.$$

Enfin, f est dit intégrable par rapport à μ^* si son intégrale $\int f d\mu^*$ existe et est finie.

Proposition 2.3.27. Soit μ^* une mesure extérieure sur X; si f et g sont deux applications de X dans \mathbb{R} , on a, si ces expressions sont bien définies,

$$\overline{\int} f + g \, d\mu^* \leqslant \overline{\int} f \, d\mu^* + \overline{\int} g \, d\mu^*, \quad et \quad \underline{\int} f + g \, d\mu^* \geqslant \underline{\int} f \, d\mu^* + \underline{\int} g \, d\mu^*.$$

De plus pour toute constante positive c, on a

$$\overline{\int} cf \, d\mu^* = c \overline{\int} f \, d\mu^* \quad et \quad \underline{\int} cf \, d\mu^* = c \underline{\int} f \, d\mu^*$$

et pour toute constante négative c, on a

$$\overline{\int} cf \, d\mu^* = c \underline{\int} f \, d\mu^* \quad et \quad \underline{\int} cf \, d\mu^* = c \overline{\int} f \, d\mu^*.$$

En particulier, la fonctionnelle $f \mapsto \int f d\mu^*$ définie sur les fonctions μ^* -intégrables (et plus généralement, lorsque les sommes sont bien définies) est linéaire.

Démonstration. Considérons le cas des intégrales inférieures. Soit φ une fonction simple qui minore f presque partout et ψ une fonction simple qui minore g presque partout. Bien sûr, $\varphi + \psi$ minore f + g presque partout et

$$\int \varphi \, d\mu^* + \int \psi \, d\mu^* = \int \varphi + \psi \, d\mu^* \leqslant \int f + g \, d\mu^*.$$

Puisque $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ lorsque le membre de droite est défini, on a, avec des notations évidentes,

$$\int f d\mu^* + \int g d\mu^* = \sup \{ \int \varphi + \psi d\mu^* \} \leqslant \int f + g d\mu^*.$$

Soit c>0; bien sûr la fonction simple φ minore f si et seulement si la fonction simple $c\varphi$ minore cf. Inversement, la fonction simple φ minore cf si et seulement si φ/c minore f. Autrement dit, toute fonction simple minorant cf presque partout s'écrit $c\varphi$, où φ est une fonction simple minorant f presque partout. On conclut dans ce cas par la linéarité de l'intégrale des fonctions simples.

Il nous reste à montrer que

$$\underline{\int} - f \, d\mu^* = -\overline{\int} f \, d\mu^*.$$

Il suffit de remarquer qu'une fonction simple minore -f si et seulement si son opposé majore f.

La notion de mesurabilité pour les mesures extérieures est identique à celle des mesures.

Définition 2.3.28. Soit μ^* une mesure extérieure sur X; une application $f: X \to \mathbb{R}$ est μ^* -mesurable si $f^{-1}(U)$ est μ^* -mesurable pour tout ouvert U de \mathbb{R} .

Proposition 2.3.29. Soit μ^* une mesure extérieure sur X; si $f: X \to \mathbb{R}$ admet une intégrale pour μ , alors f admet une intégrale pour μ^* et $\int f d\mu^* = \int f d\mu$.

Démonstration. Si f est μ^* -mesurable, il existe deux suites d'applications $(g_k)_k$ et $(h_k)_k$ de \mathscr{S}^+ telles que g_k converge en croissant vers f^+ et h_k converge en croissant vers f^- . On a donc

$$\lim_{k} \int g_k \, d\mu \leqslant \int f^+ \, d\mu^* \qquad \text{et} \qquad \lim_{k} \int h_k \, d\mu \leqslant \int f^- \, d\mu^*.$$

On peut démontrer de même (en modifiant les constructions des suites $(g_k)_k$ et $(h_k)_k$) qu'il existe deux suites d'applications $(g'_k)_k$ et $(h'_k)_k$ μ -mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs telles que g'_k converge en décroissant vers f^+ et h'_k converge en décroissant vers f^- . Il vient alors

$$\overline{\int} f^+ d\mu^* \leqslant \lim_k \int g_k' d\mu \quad \text{et} \quad \overline{\int} f^- d\mu^* \leqslant \lim_k \int h_k' d\mu.$$

Puisque $\lim_k g_k = \lim_k g'_k$ et $\lim_k h_k = \lim_k h'_k$, on obtient

$$\int f^+ d\mu^* = \lim_k \int g_k d\mu = \int f^+ d\mu \qquad \text{et} \qquad \int f^- d\mu^* = \lim_k \int h_k d\mu = \int f^- d\mu,$$

ce qui permet de conclure.

Il convient de remarquer que ce résultat n'a pas de réciproque. Cela vient de la définition même de l'intégrale par rapport à μ^* , où les partie négatives et positives peuvent se compenser, alors que pour l'intégrale par rapport à μ , on considère ces parties individuellement. Pour la mesure de Lebesgues par exemple, la définition 2.3.26 est plus proche de celle de l'intégrale fléchée :

$$\int_{\to -\infty}^{\to \infty} f \, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f \, dx.$$

Un exemple célèbre est l'intégrale de Dirichlet : la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ prolongée continûment à l'origine n'est pas Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R} , mais admet une intégrale fléchée (égale à π) [17].

Définition 2.3.30. Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X; une application $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ^* -sommable si $\int |f| d\mu^*$ est fini.

Proposition 2.3.31. Soit μ^* une mesure extérieure sur X; l'application μ^* -mesurable $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ est μ -intégrable si et seulement si elle est μ^* -sommable. Dans ce cas, on a $\int f d\mu^* = \int f d\mu$.

Démonstration. Nous savons déjà que si f est μ -intégrable alors f est μ^* -sommable. Supposons maintenant que l'application est μ^* -sommable; en particulier, f^+ et f^- le sont également. Puisque f^+ est mesurable, il existe une suite d'applications croissantes $(g_k)_k$ de \mathscr{S}^+ qui converge vers f^+ . On a donc

$$\int f^+ d\mu \leqslant \int_{-}^{} f d\mu^* < \infty.$$

Le même raisonnement pour f^- montre que f est μ -intégrable. On en déduit l'égalité de l'énoncé.

2.4 Théorèmes concernant la limite et applications

Dans cette section, nous prouvons les résultats classiques concernant les théorèmes faisant intervenir des limites dans la théorie de l'intégration. Ces théorèmes sont d'une importance cruciale et nous aurons souvent recours à eux. Ils permettent notamment de démontrer le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, de définir la densité d'une mesure et fournissent une interprétation de l'intégrale.

Théorèmes concernant la limite

Les théorèmes fondamentaux pour l'intégration sont les théorèmes de la convergence monotone, de la convergence dominée et le lemme de Fatou.

Théorème 2.4.1 (convergence monotone, Levi). Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $(f_k)_k$ une suite d'applications \mathcal{A} -mesurables de X dans $[0, \infty]$ croissante et f une application de X dans $[0, \infty]$ telle que $\lim_k f_k = f$. On a

$$\int f \, d\mu = \lim_{k} \int f_k \, d\mu.$$

Si les relations $f_k \leqslant f_{k+1} \ \forall k \ et \lim_k f_k = f$ n'ont lieu que presque partout, le résultat reste valide si f est \mathscr{A} -mesurable.

Démonstration. Supposons d'abord que les hypothèses sont vérifiées partout. Vu la monotonie de l'intégrale, $\lim_k \int f_k d\mu$ existe (dans $[0,\infty]$) et $\int f_k d\mu \leqslant \int f d\mu$, donc $\lim_k \int f_k d\mu \leqslant \int f d\mu$.

Montrons que l'inégalité inverse est vérifiée. Pour tout k, la Proposition 2.1.12 implique l'existence d'une suite $(g_{k,j})_j$ croissante d'applications de \mathscr{S}^+ convergeant vers f_k . Maintenant, pour chaque k, définissons l'application $h_k = \max\{g_{j,k} : 1 \leq j \leq k\}$. La suite $(h_k)_k$ est une suite croissante d'applications de \mathscr{S}^+ telle que $h_k \leq f_k$ et $\lim_k h_k = f$. De fait, on a $h_k \leq f_k \leq f$ et $\lim_k h_k \geqslant \lim_k g_{j,k} = f_j$ pour tout j. La Proposition 2.3.6 implique alors

 $\int f \, d\mu = \lim_{k} \int h_k \, d\mu \leqslant \lim_{k} \int f_k \, d\mu.$

Si les hypothèses ne sont vérifiée que presque partout, soit $N \in \mathscr{A}$ un ensemble de mesure nulle contenant les points pour lesquels les relations ne sont pas vérifiées. L'application $f\chi_{N^c}$ et la suite $(f_k\chi_{N^c})_k$ satisfont les hypothèses faites dans la premières partie de la preuve. Ainsi, $\int f\chi_{N^c}d\mu = \lim_k \int f_k\chi_{N^c}d\mu$. La Proposition 2.3.13 implique alors $\int fd\mu = \lim_k \int f_kd\mu$.

Corollaire 2.4.2. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_k)_k$ une suite d'applications de X dans $[0, \infty]$ \mathcal{A} -mesurables. On a

$$\int \sum_{k} f_k \, d\mu = \sum_{k} \int f_k \, d\mu.$$

Démonstration. Pour obtenir ce résultat il suffit d'appliquer le théorème de la convergence monotone à la suite $(\sum_{j=1}^k f_j)_k$.

Théorème 2.4.3 (Lemme de Fatou). Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $(f_k)_k$ une suite d'application de X dans $[0, \infty]$ \mathscr{A} -mesurables. On a $\int \underline{\lim}_k f_k d\mu \leqslant \underline{\lim} \int f_k d\mu$.

Démonstration. Pour tout k, soit $g_k = \inf_{j \ge k} f_j$. L'application g_k est mesurable pour tout k, par la Proposition 2.1.6. De plus, la suite $(g_k)_k$ est croissante et $\lim_k g_k = \underline{\lim}_k f_k$. Le théorème de la convergence monotone implique alors

$$\int \underline{\lim}_k f_k \, d\mu = \int \lim_k g_k \, d\mu = \lim_k \int g_k \, d\mu \leqslant \underline{\lim}_k \int f_k \, d\mu,$$

puisque $g_k \leqslant f_k$.

Exercice 2.4.4. Montrer que l'égalité n'est pas nécessairement vérifiée dans le lemme de Fatou.

Suggestion: considérer l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ et la suite $f_k = \chi_{[k,k+1]}$.

Donnons une démonstration du lemme de Fatou ne faisant pas appel à la convergence monotone.

 $D\acute{e}monstration$. Il nous suffit de montrer que pour toute fonction $g \in \mathscr{S}^+$ telle que $g \leqslant \varliminf_k f_k$, on a $\int g \, d\mu \leqslant \varliminf_k \int f_k \, d\mu$. Supposons qu'une telle fonction g s'écrive $g = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ où les ensemble mesurables A_j sont deux à deux disjoints. Pour $\varepsilon \in]0,1[$, posons

$$A_{j,l} = \{ x \in A_j : \inf_{k \ge l} f_k \ge (1 - \varepsilon) a_j \}.$$

On vérifie directement que pour tout j, la suite d'ensembles $(A_{j,l})_l$ est croissante vers A_j . Définissons alors

$$g_l = \sum_{j=1}^{N} (1 - \varepsilon) a_j \chi_{A_{j,l}}.$$

Par construction, on a $g_l \leqslant \inf_{k \geqslant l} f_k$ et donc, pour tout $l \leqslant k$,

$$\int f_k \, d\mu \geqslant \int f_k \chi_{\bigcup_{j=1}^N A_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} f_k \, d\mu \geqslant \sum_{j=1}^N \int_{A_{j,l}} f_k \, d\mu$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^N \int_{A_{j,l}} g \, d\mu = (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_{j,l}).$$

Par conséquent, il vient

$$\underline{\lim}_{k} \int f_{k} d\mu \geqslant (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{N} a_{j} \mu(A_{j}) = (1 - \varepsilon) \int g d\mu.$$

Puisque ε est arbitraire, on peut conclure.

Exercice 2.4.5. Montrer que le lemme de Fatou implique le théorème de la convergence monotone

Suggestion : Avec les notations de l'énoncé, on trouve directement $\lim_k \int f_k d\mu \leqslant \int f d\mu$ et

$$\int f \, d\mu = \int \lim_k f_k \, d\mu = \int \underline{\lim}_k f_k \, d\mu \leqslant \underline{\lim}_k \int f_k \, d\mu = \lim_k \int f \, d\mu.$$

Théorème 2.4.6 (convergence dominée, Lebesgue). Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $g: X \to [0, \infty]$ une application intégrable. Étant donné $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, si $(f_k)_k$ est une suite d'applications \mathscr{A} -mesurables de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $f = \lim_k f_k$ et $|f_k| \leq g \ \forall k$, alors f et f_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ sont intégrables et

$$\lim_{k} \int |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

En particulier, $\int f d\mu = \lim_k \int f_k d\mu$. Le résultat reste valide si les relations $|f_k| \leq g$ et $\lim_k f_k = f$ n'ont lieu que presque partout et si f est mesurable.

Démonstration. Puisque f_k^{\pm} , $f^{\pm} \leq g$ (éventuellement presque partout), toutes les applications sont intégrables et sont à valeurs réelles presque partout. Supposons que les relations soient vérifiées sur X et considérons la suite de fonctions $(h_k)_k$, où $h_k = 2g - |f_k - f|$ si cette égalité a un sens et $h_k = 2g$ sinon. On a $\lim_k h_k = 2g$ et le Lemme de Fatou implique

$$\int 2g \, d\mu \leqslant \lim_{k \to \infty} \int 2g - |f_k - f| \, d\mu = 2 \int g \, d\mu - \overline{\lim}_{k \to \infty} \int |f_k - f| \, d\mu$$

et donc $\overline{\lim}_k \int |f_k - f| d\mu = 0.$

Si les relations des hypothèses ne sont plus vérifiées que presque partout, le résultat s'obtient en utilisant la même démarche que pour le théorème de la convergence monotone.

Les résultats précédents impliquent les corollaires suivants, également appelés théorèmes de la convergence monotone.

Corollaire 2.4.7. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, $(f_k)_k$ une suite d'applications \mathscr{A} mesurables de X dans \mathbb{R} croissante telle que f_1 soit intégrable et f une application de Xdans \mathbb{R} telle que $\lim_k f_k = f$. L'application f^- est intégrable, on a $\lim_k \int |f_k^- - f^-| d\mu = 0$ et

 $\int f \, d\mu = \lim_{k} \int f_k \, d\mu.$

Si les relations $f_k \leqslant f_{k+1} \ \forall k$ et $\lim_k f_k = f$ n'ont lieu que presque partout, le résultat reste valide si f est \mathscr{A} -mesurable.

Démonstration. On peut, comme précédemment, supposer que les relations ont lieu partout. Par le théorème de la convergence monotone, $\int f^+ d\mu = \lim_k \int f_k^+ d\mu$. De plus, les applications f^- et f_k^- sont majorées par f_1^- pour tout k, qui est une application intégrable. Le théorème de la convergence dominée permet alors d'affirmer que $\lim_k \int |f_k^- - f^-| d\mu = 0$, ce qui suffit.

Corollaire 2.4.8. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $(f_k)_k$ une suite d'applications μ intégrables de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ croissante telle que la suite $(\int f_k d\mu)_k$ soit majorée et f une
application de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ telle que $\lim_k f_k = f$. L'application f est intégrable et on a

$$\lim_{k} \int |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

Si les relations $f_k \leqslant f_{k+1} \ \forall k \ et \ \lim_k f_k = f \ n'ont \ lieu \ que \ presque \ partout, \ le résultat reste valide si <math>f$ est \mathscr{A} -mesurable.

Démonstration. On peut, comme précédemment, supposer que les relations ont lieu partout. Par le corollaire 2.4.7, on a $\lim_k \int |f_k^- - f^-| d\mu = 0$. Le théorème de la convergence monotone permet d'écrire $\lim_k \int f_k^+ d\mu = \int f^+ d\mu$ et ainsi d'affirmer que $\int f^+ d\mu$ est fini, puisque majoré. L'application f^+ est donc intégrable et puisque $f_k^+ \leq f^+$ pour tout k, le théorème de la convergence dominée implique $\lim_k \int |f_k^+ - f^+| d\mu = 0$. De là,

$$0 \leqslant \lim_{k} \int |f_{k} - f| \, d\mu \leqslant \lim_{k} \int |f_{k}^{+} - f^{+}| \, d\mu + \lim_{k} \int |f_{k}^{-} - f^{-}| \, d\mu = 0,$$

ce qui termine la preuve.

Le résultat qui suit est un critère de convergence.

Corollaire 2.4.9. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré complet, $(f_k)_k$ une suite d'applications μ -intégrables de X dans \mathbb{R} croissante presque partout telle que la suite $(\int f_k d\mu)_k$ soit majorée. Il existe une fonction $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ telle que $\lim_k f_k = f$ presque partout et

$$\lim_{k} \int |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

Démonstration. Soit f une application telle que $f = \lim_k f_k$; cette égalité définit f presque partout, puisque la suite est croissante presque partout. De plus, f est mersurable par la proposition 2.2.3. Par le corollaire 2.4.8, on obtient $\int f d\mu = \lim_k \int f_k d\mu$. Puisque f est intégrable, par le corollaire 2.3.19, il existe une fonction de \mathscr{L}^1 égale à f presque partout, ce qui suffit.

Théorème de dérivation des intégrales paramétriques

Nous démontrons ici le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.

Théorème 2.4.10. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Si $f: X \times \Omega \to \mathbb{R}$ est une application vérifiant les propriétés suivantes,

- $-f(x,\cdot) \in C^1(\Omega)$ pour μ -presque tout $x \in X$,
- les fonctions $f(\cdot, \omega)$, $D_{\omega_k} f(\cdot, \omega)$ sont μ -intégrables pour tout $\omega \in \Omega$ $(1 \le k \le d)$,
- pour tout ensemble compact K de Ω , il existe une application g_K μ -intégrable telle que $|D_{\omega_k}f(x,\omega)| \leq g_K(x)$ pour tout $\omega \in K$ et μ -presque tout $x \in X$ $(1 \leq k \leq d)$, alors $\int f(x,\omega)d\mu(x) \in C^1(\Omega)$ et

$$D_{\omega_k} \int f(x,\omega) \, d\mu(x) = \int D_{\omega_k} f(x,\omega) \, d\mu(x),$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$.

Démonstration. La fonction $\int D_{\omega_k} f(x,\omega) d\mu(x)$ est continue. Soit $\omega \in \Omega$; si $(\omega_j)_j$ est une suite de Ω qui converge vers ω , on a $\lim_j D_{\omega_k} f(x,\omega_j) = D_{\omega_k} f(x,\omega)$ presque partout. Il existe une application intégrable $g_{(\omega_j)_j}$ telle que $|D_{\omega_k} f(\cdot,\omega_j)| \leq g_{(\omega_j)_j}$ pour tout j presque partout. Le théorème de la convergence dominée implique alors

$$\lim_{j} \int D_{\omega_k} f(x, \omega_j) d\mu(x) = \int D_{\omega_k} f(x, \omega) d\mu(x).$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(\omega, \varepsilon) \subset \Omega$. En utilisant le théorème des accroissements finis, on a, pour tout h vérifiant $|h| < \varepsilon$, $f(x, \omega + he_k) - f(x, \omega) = hD_{\omega_k}f(x, \omega + \theta he_k)$, presque partout, avec $\theta = \theta(x, k, h) \in]0, 1[$. Dès lors, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int f(x,\omega + he_k) - f(x,\omega) d\mu(x) = \int D_{\omega_k} f(x,\omega) d\mu(x),$$

ce qui permet de conclure.

Si f est une application à valeurs complexes, on peut bien entendu appliquer le résultat précédent aux parties réelles et imaginaires de f.

Remarquons que le théorème précédent peut être sensiblement renforcé si la mesure μ est complète : il n'est alors pas nécessaire d'imposer l'intégrabilité des applications $D_{\omega_k} f(\cdot, \omega)$. En effet, ces applications sont mesurables presque partout, comme limite p.p. d'applications mesurables, $D_{\omega_k} f(\cdot, \omega) = \lim_j (f(\cdot, \omega + 1/j) - f(\cdot, \omega))/(1/j)$. L'application $D_{\omega_k} f(\cdot, \omega)$ étant presque partout majorée en module par une application intégrable $g_{\{\omega\}}$, elle est elle-même intégrable.

Si Ω est connexe, on peut même ne demander que la mesurabilité de $f(\cdot,\omega)$ sur Ω et l'existence d'un point $\omega_0 \in \Omega$ tel que $f(\cdot,\omega_0)$ est intégrable. De fait, si $B(\omega_0,\leqslant\varepsilon)$ est une boule fermée de Ω , la formule de Taylor limitée procure l'égalité $f(\cdot,\omega) = f(\cdot,\omega_0) + \sum_{k=1}^{d} (\omega - \omega_0)_k D_{\omega_k} f(\cdot,\omega_0 + \theta(\omega - \omega_0))$ presque partout, pour tout $\omega \in B(\omega_0,\leqslant\varepsilon)$. L'application $f(\cdot,\omega)$ est donc mesurable et de module majoré presque partout par une fonction intégrable. Nous venons donc de montrer que si $\omega \in B(\omega_0,\leqslant\varepsilon)$, $f(\cdot,\omega)$ est intégrable. Cela étant, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : f(\cdot,\omega) \text{ est intégrable}\}$ est un ouvert de Ω ; le théorème de passage des frontières permet de conclure.

Image d'une mesure par une application mesurable et intégration

Revenons brièvement sur l'image d'une mesure par une application mesurable.

Proposition 2.4.11. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, (Y, \mathscr{B}) un espace mesurable et $f: X \to Y$ une application mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathscr{B} . Si $g: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ est une application \mathscr{B} -mesurable, alors g est μ_f -intégrable si et seulement si $g \circ f$ est μ -intégrable. Dans ce cas,

$$\int_{Y} g \, d\mu_f = \int_{Y} g \circ f \, d\mu.$$

Démonstration. La composition d'applications mesurable étant mesurable, $g \circ f$ est \mathscr{A} mesurable. Vérifions maintenant l'intégrabilité des applications g et $g \circ f$, ainsi que l'égalité
annoncée. Si $g = \chi_B$ avec $B \in \mathscr{B}$, $g \circ f$ est la fonction caractéristique de $f^{-1}(B)$ et

$$\int_{Y} g \, d\mu_{f} = \int_{X} g \circ f \, d\mu = \mu(f^{-1}(B)).$$

L'identité voulue est donc vérifiée si $g = \chi_B$. Si $g \in \mathscr{S}^+$, ce résultat est toujours valide grâce à la linéarité des intégrales. Il l'est encore si g est une application à valeurs dans $[0,\infty]$ \mathscr{B} -mesurable, par la Proposition 2.1.12 et le théorème de la convergence monotone. Pour le cas général, il suffit de décomposer g en sa partie positive et négative (on a $(g \circ f)^{\pm} = g^{\pm} \circ f$).

Densités

Le Corollaire 2.4.2 permet de construire une large classe de mesures

Définition 2.4.12. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to [0, \infty]$ une application \mathscr{A} -mesurable. Soit ν l'application définie comme suit,

$$\nu: \mathscr{A} \to [0, \infty] \quad A \mapsto \int_A f \, d\mu.$$

L'application f est appelée une densité de ν par rapport à μ . On note parfois $\nu = f \cdot \mu$.

Proposition 2.4.13. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $f: X \to [0, \infty]$ une application \mathscr{A} -mesurable. L'application $f \cdot \mu$ est une mesure; cette mesure est finie si et seulement si l'application f la définissant est μ -intégrable.

Démonstration. On a bien sûr $f \cdot \mu(\varnothing) = 0$. Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{A} , le Corollaire 2.4.2 appliqué à la série $\sum_k f \chi_{A_k}$ implique $f \cdot \mu(\cup A_k) = \sum_k f \cdot \mu(A_k)$. La dernière partie de la thèse est évidente.

Proposition 2.4.14. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, où μ est une mesure σ -finie. Si $f, g: X \to [0, \infty]$ sont deux applications \mathscr{A} -mesurables telles que $f \cdot \mu \geqslant g \cdot \mu$, alors $f \geqslant g \mu$ -pp.

Démonstration. Soit $(X_k)_k$ une suite croissante d'ensembles de $\mathscr A$ telle que $\cup_k X_k = X$ et $\mu(X_k) < \infty \ \forall k$. Pour tout k, posons $A_k = \{x \in X : f(x) + 1/k \leqslant \min(g(x), k)\} \cap X_k \in \mathscr A$. Par hypothèse, $g \cdot \mu(A_k) \leqslant f \cdot \mu(A_k) \leqslant k\mu(X_k) < \infty$. On a alors $0 \leqslant f \cdot \mu(A_k) - g \cdot \mu(A_k) = \int_{A_k} f - g d\mu \leqslant -\mu(A_k)/k \leqslant 0$, ce qui implique $\mu(A_k) = 0$. Ainsi,

$$\mu(\{x \in X : f(x) < g(x)\}) = \mu(\bigcup_k A_k) \leqslant \sum_k \mu(A_k) = 0,$$

ce qui termine la preuve.

Théorème 2.4.15. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, $g, h : X \to [0, \infty]$ et $f : X \to \mathbb{R}$ des applications \mathscr{A} -mesurables. L'application f est $g \cdot \mu$ -intégrable si et seulement si l'application fg est μ -intégrable et dans ce cas, $\int f dg \cdot \mu = \int fg d\mu$. De plus, $h \cdot (g \cdot \mu) = gh \cdot \mu$.

Démonstration. Si $f = \chi_A$, avec $A \in \mathscr{A}$, on a $\int f \, dg \cdot \mu = g \cdot \mu(A) = \int_A g \, d\mu = \int f g \, d\mu$. Si $f \in \mathscr{S}^+$, ce résultat reste valide grâce à la linéarité des intégrales. Si f est à valeurs dans $[0, \infty]$, il l'est encore, par la Proposition 2.1.12 et le théorème de la convergence monotone. Pour le cas général, il suffit de décomposer f en sa partie positive et négative. Pour la seconde partie de la thèse, on a alors, si $A \in \mathscr{A}$, $h \cdot (g \cdot \mu)(A) = \int_A h \, dg \cdot \mu = \int_A gh \, d\mu = gh \cdot \mu(A)$, ce qui suffit.

En théorie des probabilités, les mesures sont souvent définies comme des densités par rapport à la mesure de Lebesgue \mathcal{L} .

Exemples 2.4.16. Soient m, σ des nombres réels et α, τ des nombres strictement positifs. Les fonctions suivantes définissent une densité par rapport à \mathcal{L} :

- la distribution de Gauß, $f(x) = \exp(-(x-m)^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi\sigma^2}$,
- la distribution exponentielle, $f(x) = \tau \exp(-\tau x)\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$,
- la distribution gamma, $f(x) = (\tau^{\alpha} x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)) \exp(-\tau x) \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$,
- la distribution uniforme, $f(x) = \chi_A(x)/\mathcal{L}(A)$, avec $A \in \mathbb{B}$, $\mathcal{L}(A) > 0$.

Définition 2.4.17. Dans un espace probabilisé (Ω, \mathscr{A}, P) , l'espérance d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie comme suit,

$$E(X) = \int X dP = \int I dP_X,$$

où $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application identité.

Si la loi associée à X est définie par une densité par rapport à \mathcal{L} , $P_X = f \cdot \mathcal{L}$, on a

$$E(X) = \int I df \cdot \mathcal{L} = \int If d\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Exercice 2.4.18. Calculer l'espérence de la variable aléatoire définie par une densité uniforme sur [0, 1].

Suggestion : On trouve directement $E(X) = \int_0^1 x \, dx = [x^2/2]_0^1 = 1/2$.

En définissant la variance de X comme suit,

$$Var(X) = E((X - E(X))^2),$$

on obtient

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx,$$

puisque

$$Var(X) = \int (\cdot)^2 \circ X dP - 2 \int XE(X) dP + \int (E(X))^2 dP$$
$$= \int x^2 f(x) dx - 2E(X) \int x f(x) dx + (E(X))^2 P(\Omega).$$

Exercice 2.4.19. Calculer la variance de la variable aléatoire définie par une densité uniforme sur [0,1].

Suggestion: On trouve directement

$$Var(X) = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 x dx + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Définition 2.4.20. Dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable. Par extension, la mesure P_X associée est elle aussi qualifiée de discrète.

Pour une variable aléatoire discrète, si on suppose avoir $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, la mesure P_X est atomique et $(x_k)_k$ sont ses atomes. Il vient $E(X) = \sum_k x_k p_k$, où on a posé $p_k = P_X(\{x_k\})$ et

$$Var(X) = \int (x - E(X))^{2} dP_{X}$$

$$= \int x^{2} dP_{X} - 2E(X) \int x dP_{X} + E(X)^{2}$$

$$= \sum_{k} x_{k}^{2} p_{k} - (\sum_{k} x_{k} p_{k})^{2}.$$

Définition 2.4.21. Une mesure discrète P_X associée à une variable aléatoire X est uniforme si ses atomes x_1, \ldots, x_n sont en nombre fini et $P_X(\{x_j\}) = P_X(\{x_k\})$ pour tous les indices j et k.

Dans le cas d'une telle mesure discrète et uniforme, puisque $P_X(\mathbb{R}) = 1$, on doit avoir $P_X(\{x_k\}) = 1/n$ et donc $E(X) = \frac{1}{n} \sum_k x_k$,

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{k} x_k^2 - (\frac{1}{n} \sum_{k} x_k)^2.$$

Exercice 2.4.22. On considère un dé non-pipé (constitué de six faces); calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair lors d'un lancé de ce dé.

Suggestion : On peut supposer que P_X est une mesure discrète uniforme associée aux atomes $1, \ldots, 6$. On doit donc avoir $P_X(k) = 1/6$ pour $k \in \{1, \ldots, 6\}$. La probabilité d'obtenir un nombre pair est donnée par

$$P_X(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = 3P_X(\{2\}) = \frac{1}{2}.$$

Interprétation de Riemann de l'intégrale

Le résultat suivant présente la célèbre interprétation de l'intégrale due à Riemann.

Théorème 2.4.23 (Interprétation de Riemann de l'intégrale). Si (X, d) est un espace métrique, soient $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ un espace mesuré, A un ensemble borélien tel que $\mu(A) < \infty$ et $(\varepsilon_k)_k$ une suite strictement positive tendant vers 0. Si

- pour tout k, $(A_{k,j})_j$ est une partition dénombrable de A telle que $A_{k,j} \in \mathcal{B}(X)$ et $\operatorname{diam}(A_{k,j}) < \varepsilon_k \ \forall j$,
- $x_{k,j}$ est un élément de $\bar{A_{k,j}} \cap A$,

— $f: X \to \mathbb{R}$ est une application continue et bornée sur A, alors $f\chi_A$ est une application intégrable et

$$\int f \chi_A d\mu = \lim_k \sum_j f(x_{k,j}) \mu(A_{k,j}).$$

Démonstration. Pour tout k fixé, posons $f_k = \sum_j f(x_{k,j})\chi_{A_{k,j}}$. Bien sûr f_k est mesurable et la suite $(f_k)_k$ converge vers f sur A. De plus, puisque $|f_k| \leq \sup_{x \in A} |f(x)|\chi_A \, \forall k$, le théorème de la convergence dominée implique que f_k et $f\chi_A$ sont des applications intégrables et $\lim_k \int f_k d\mu = \int f\chi_A d\mu$. Une seconde application du théorème de la convergence dominée à la suite $g_l = \sum_{j=1}^l f(x_{k,j})\chi_{A_{k,j}}$ permet d'affirmer que $\int f_k d\mu = \sum_j f(x_{k,j})\mu(A_{k,j})$, ce qui suffit.

2.5 L'intégrale de Riemann

Bien que l'intégrale de Riemann soit généralisée par l'intégrale de Lebesgue, elle fournit une interprétation édifiante de l'intégrale de Lebesgue. Sur le plan théorique, l'intégrale de Riemann est souvent invoquée pour la construction de fonctions intégrables. Dans cette section, nous introduisons aussi l'intégrale de Darboux, équivalente à l'intégrale de Riemann.

Définition de l'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann repose sur la notion de partition.

Définition 2.5.1. Une partition (on parle aussi de découpage) d'un intervalle fermé [a,b] de \mathbb{R} est une suite finie $(a_k)_{k=0}^N$ de nombres réels tels que $a=a_0 < a_1 < \cdots < a_N=b$. Si $(a_k)_{k=0}^N$ et $(b_k)_{k=0}^M$ sont deux partitions d'un même intervalle, $(b_k)_{k=0}^M$ est une partition plus fine que $(a_k)_{k=0}^N$ si $\{a_0,\ldots,a_N\}\subset\{b_0,\ldots,b_M\}$. Une partition $(a_k)_{k=0}^N$ est une partition subordonnée à $\varepsilon>0$ si $\sup_k a_k-a_{k-1}<\varepsilon$.

Une partition est généralement notée \mathscr{P} . Si $\mathscr{P}=(a_k)_{k=0}^N$ est une partition de [a,b], soit $I_k(\mathscr{P})=[a_{k-1},a_k]$.

Définition 2.5.2. Un découpage de Riemann d'un intervalle [a,b] est la donnée d'une partition \mathscr{P} de [a,b] et d'une suite finie $(r_k)_k$ telle que $r_k \in I_k(\mathscr{P}) \ \forall k$. Une suite fondamentale de découpages de Riemann de [a,b] est une suite de découpages de Riemann $(\mathscr{P}_j,(r_{j,k})_k)_j$ de [a,b] telle que \mathscr{P}_j est subordonné à $\varepsilon_j \ \forall j$, avec $\lim_j \varepsilon_j = 0$.

Définition 2.5.3. Une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur [a,b] si pour toute suite fondamentale de découpage à la Riemann de [a,b], la suite

$$\left(\sum_{k} f(r_{j,k}) \operatorname{Vol}(I_{k}(\mathscr{P}_{j}))\right)_{j}$$

converge vers une limite finie.

Proposition 2.5.4. Pour une fonction Riemann-intégrable, la limite intervenant dans la définition 2.5.3 ne dépend pas de la suite fondamentale de découpages à la Riemann choisie.

Démonstration. Si f est une fonction Riemann-intégrable sur l'intervalle [a,b], soient $(\mathscr{P}_j,(r_{j,k})_k)_j$ et $(\mathscr{P}'_j,(s_{j,k})_k)_j$ deux suites fondamentales de découpages de Riemann de l'intervalle [a,b]. Il suffit de considérer la suite fondamentale de découpages de Riemann $(\mathscr{P}''_j,(t_{j,k})_k)_j$ où $\mathscr{P}''_{2j-1}=\mathscr{P}_j,\,\mathscr{P}''_{2j}=\mathscr{P}'_j,\,t_{2j-1,k}=r_{j,k}$ et $t_{2j,k}=s_{j,k}$. De fait, les éléments pairs et impairs de la suite $\left(\sum_k f(t_{j,k})\operatorname{Vol}(I_k(\mathscr{P}''_j))\right)_j$ convergent vers la même limite.

Définition 2.5.5. La limite intervenant dans la définition 2.5.3 est appelée l'*intégrale de Riemann* de la fonction f sur [a,b].

Proposition 2.5.6. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable sur [a,b], alors f est borné sur [a,b].

Démonstration. Montrons que si f n'est pas borné alors f n'est pas Riemann-intégrable. Quitte à considérer -f, on peut considérer que f est une fonction non-majorée. Pour chaque j, soit \mathscr{P}_j une partition de [a,b] subordonnée à ε_j , où $(\varepsilon_j)_j$ est une suite qui tend vers zéro. Puisque f n'est pas majoré sur [a,b], pour tout j, il existe k(j) tel que f n'est pas majoré sur $I_{k(j)}(\mathscr{P}_j)$. Pour tout $k \neq k(j)$, soit $r_{j,k} \in I_k(\mathscr{P}_j)$ et choisissons $r_{j,k(j)}$ tel que

$$f(r_{j,k(j)})\operatorname{Vol}(I_{k(j)}(\mathscr{P}_j)) \geqslant j - \sum_{k \neq k(j)} f(r_{j,k})\operatorname{Vol}(I_k(\mathscr{P}_j)).$$

Cela étant, la suite de découpages à la Riemann $(\mathscr{P}_j,(r_{j,k})_k)_j$ de [a,b] est telle que la suite

$$\left(\sum_{k} f(r_{j,k}) \operatorname{Vol}(I_{k}(\mathscr{P}_{j}))\right)_{j}$$

ne converge pas vers une limite finie, d'où la conclusion.

Le résultat suivant sera généralisé par la suite.

Proposition 2.5.7. Toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue est Riemann-intégrable et son intégrale de Riemann vaut $\int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. La fonction f étant bien sûr \mathcal{L} -intégrable sur [a, b], le résultat découle de l'interprétation de Cauchy-Riemann de l'intégrale (Théorème 2.4.23).

L'intégrale de Darboux

Pour l'intégrale de Darboux, on ne choisit pas de suite $(r_{j,k})_k$ d'éléments de $I_k(\mathscr{P}_j)$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée; pour toute partition \mathscr{P} de [a,b], posons

$$\underline{m}_{\mathscr{P}}(f) = \sum_{k} \inf f(I_{k}(\mathscr{P})) \operatorname{Vol}(I_{k}(\mathscr{P}))$$

et

$$\overline{m}_{\mathscr{P}}(f) = \sum_{k} \sup f(I_{k}(\mathscr{P})) \operatorname{Vol}(I_{k}(\mathscr{P}))$$

On a bien sûr $\underline{m}_{\mathscr{P}}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}}(f)$.

Proposition 2.5.8. Soient $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ deux partitions de l'intervalle [a,b] telles que \mathscr{P}_2 est plus fin que \mathscr{P}_1 . On a $\underline{m}_{\mathscr{P}_1}(f) \leqslant \underline{m}_{\mathscr{P}_2}(f)$ et $\overline{m}_{\mathscr{P}_2}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}_1}(f)$.

Démonstration. En procédant par récurrence, il suffit de supposer que \mathscr{P}_2 possède un point c de plus que \mathscr{P}_1 ; supposons donc avoir $a_{k_0-1} < c < a_{k_0}$, où a_{k_0-1} et a_{k_0} sont des points de \mathscr{P}_1 . On a par exemple

$$\inf f(I_{k_0}(\mathscr{P}_1))\operatorname{Vol}(I_{k_0}(\mathscr{P}_1)) = \inf f(I_{k_0}(\mathscr{P}_1))\operatorname{Vol}([a_{k_0-1},c])$$

$$+ \inf f(I_{k_0}(\mathscr{P}_1))\operatorname{Vol}([c,a_{k_0}])$$

$$\leqslant \inf f([a_{k_0-1},c])\operatorname{Vol}([a_{k_0-1},c])$$

$$+ \inf f([c,a_{k_0}])\operatorname{Vol}([c,a_{k_0}]),$$

ce qui implique $\underline{m}_{\mathscr{P}_1}(f) \leqslant \underline{m}_{\mathscr{P}_2}(f)$. Un raisonnement analogue permet d'obtenir l'inégalité $\overline{m}_{\mathscr{P}_1}(f) \geqslant \overline{m}_{\mathscr{P}_2}(f)$.

Corollaire 2.5.9. Soient $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ deux partitions de l'intervalle [a,b]. On a $\underline{m}_{\mathscr{P}_1}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}_2}(f)$.

 $D\acute{e}monstration$. Soit \mathscr{P}_3 une partition de l'intervalle [a,b] plus fine que \mathscr{P}_1 et \mathscr{P}_2 . La Proposition 2.5.8 implique

$$\underline{m}_{\mathscr{P}_1}(f) \leqslant \underline{m}_{\mathscr{P}_2}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}_3}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}_2}(f),$$

ce qui suffit. \Box

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale de Darboux.

Définition 2.5.10. Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. L'intégrale de Darboux inférieure $\underline{m}_{[a,b]}(f)$ est la quantité

$$\underline{m}_{[a,b]}f=\sup\{\underline{m}_{\mathscr{P}}(f):\mathscr{P}\text{ partition de }[a,b]\}$$

et l'intégrale de Darboux supérieure $\overline{m}_{[a,b]}(f)$ est quant à elle définie comme suit :

$$\overline{m}_{[a,b]}f = \inf\{\overline{m}_{\mathscr{P}}(f) : \mathscr{P} \text{ partition de } [a,b]\}.$$

On a toujours $\underline{m}_{[a,b]}(f) \leq \overline{m}_{[a,b]}(f)$. Si f est une fonction bornée sur [a,b] et si $\underline{m}_{[a,b]}(f) = \overline{m}_{[a,b]}(f)$, la fonction f est dite Darboux-intégrable sur [a,b] et son intégrale de Darboux $m_{[a,b]}(f)$ est l'intégrale de Darboux inférieure.

Concernant l'intégrabilité, nous avons le critère suivant.

Lemme 2.5.11. Une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est Darboux-intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition \mathscr{P} de [a,b] telle que $\overline{m}_{\mathscr{P}}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) < \varepsilon$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Si f est Darboux-intégrable, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe deux partitions \mathscr{P}_1 et \mathscr{P}_2 telles que $\overline{m}_{\mathscr{P}_2}(f) < \overline{m}_{[a,b]}(f) + \varepsilon/2$ et $\underline{m}_{[a,b]}(f) < \underline{m}_{\mathscr{P}_1}(f) + \varepsilon/2$. Étant donné une partition \mathscr{P}_3 de [a,b] plus fine que \mathscr{P}_1 et \mathscr{P}_2 , on a

$$\overline{m}_{\mathscr{P}_3}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}_3}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}_2}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}_1}(f) < m_{[a,b]}(f) + \varepsilon/2 - (m_{[a,b]}(f) - \varepsilon/2) = \varepsilon.$$

La condition est suffisante. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une partition \mathscr{P} telle que

$$\overline{m}_{[a,b]}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}}(f) < \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) + \varepsilon \leqslant \underline{m}_{[a,b]}(f) + \varepsilon.$$

On a donc $\overline{m}_{[a,b]}(f) < \underline{m}_{[a,b]}(f) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique que f est Darboux-intégrable.

Corollaire 2.5.12. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est Darboux-intégrable.

Démonstration. L'image continue d'un compact étant un compact, f est borné. De plus, f étant uniformément continu sur [a,b], pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/(b-a)$ si $|x-y| < \delta$. Si $\mathscr P$ est une partition de [a,b] subordonnée à δ , alors

$$\overline{m}_{\mathscr{P}}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) \leqslant (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

comme il devait être montré.

Lemme 2.5.13. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute partition \mathscr{P} de [a,b] subordonnée à δ ,

$$\underline{m}_{\mathscr{P}}(f) + \varepsilon > \underline{m}_{[a,b]}(f) \qquad et \qquad \overline{m}_{\mathscr{P}}(f) - \varepsilon < \overline{m}_{[a,b]}(f).$$

En particulier, si $(\mathscr{P}_k)_k$ est une suite de partitions croissante $(\mathscr{P}_k \subset \mathscr{P}_{k+1})$ de [a,b] telle que \mathscr{P}_k soit subordonné à ε_k , où $(\varepsilon_k)_k$ est une suite qui converge vers zéro, on a

$$\lim_k \underline{m}_{\mathscr{P}_k}(f) = \underline{m}_{[a,b]}(f) \qquad et \qquad \lim_k \overline{m}_{\mathscr{P}_k}(f) = \overline{m}_{[a,b]}(f).$$

Démonstration. Démontrons l'inégalité concernant $\underline{m}_{\mathscr{P}}(f)$; l'autre s'obtient de la même manière. Soit $\mathscr{P}_{\varepsilon}$ une partition de [a,b] telle que $\underline{m}_{\mathscr{P}_{\varepsilon}}(f)+\varepsilon/2>\underline{m}_{[a,b]}(f)$. Soit $N=\#\mathscr{P}_{\varepsilon}$ le nombre de points de la partition $\mathscr{P}_{\varepsilon}$ et posons $\Delta=\sup f([a,b])-\inf f([a,b])+1$; montrons que $\delta=\varepsilon/(2N\Delta)$ convient. Si \mathscr{P} est une partition de [a,b] subordonnée à δ , soit $\mathscr{P}'=\mathscr{P}\cup\mathscr{P}_{\varepsilon}$ la partition obtenue à partir des points de \mathscr{P} et $\mathscr{P}_{\varepsilon}$. Puisque \mathscr{P}' est plus fin que $\mathscr{P}_{\varepsilon}$, on a $\underline{m}_{\mathscr{P}'}(f)+\varepsilon/2>\underline{m}_{[a,b]}(f)$. L'adjonction de N-2 points de $\mathscr{P}_{\varepsilon}$ (le premier point de $\mathscr{P}_{\varepsilon}$ est a et le dernier est b) modifie au plus N-2 intervalles $I_k(\mathscr{P})$ dans les partition \mathscr{P}' , i.e. il n'existe pas de couple (k,j) tel que $I_k(\mathscr{P})=I_j(\mathscr{P}')$ pour N-2 intervalles $I_k(\mathscr{P})$ au plus. Dès lors,

$$\underline{m}_{\mathscr{P}'}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) \leqslant (N-2)\Delta \frac{\varepsilon}{2N\Lambda} < \varepsilon/2.$$

On obtient donc

$$\underline{m}_{[a,b]}(f) - \varepsilon/2 < \underline{m}_{\mathscr{P}'}(f) < \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) + \varepsilon/2,$$

ce qui suffit. \Box

Théorème 2.5.14. Une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est Darboux-intégrable. Auquel cas, ces deux intégrales sont égales.

Démonstration. Supposons d'abord que f est une fonction Riemann-intégrable sur [a,b] et soit S son intégrale de Riemann. Par la Proposition 2.5.6, f est borné sur cet intervalle. Étant donné $\varepsilon > 0$, on montre par l'absurde qu'il existe $\delta > 0$ telle que

$$|S - \sum_{k} f(r_k) \operatorname{Vol}(I_k(\mathscr{P}_{\delta}))| < \varepsilon/2,$$

pour toute partition \mathscr{P}_{δ} subordonnée à δ et toute suite finie $(r_k)_k$ vérifiant $r_k \in I_k(\mathscr{P}_{\delta})$. De là,

$$\overline{m}_{\mathscr{P}_{\delta}}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}_{\delta}}(f) \leqslant |S - \overline{m}_{\mathscr{P}_{\delta}}(f)| + |S - \underline{m}_{\mathscr{P}_{\delta}}(f)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui suffit, en vertu du Lemme 2.5.11.

Supposons maintenant que f est une fonction Darboux-intégrable sur [a,b]. Par le lemme 2.5.13, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ telle que toute partition $\mathscr P$ de [a,b] subordonnée à δ vérifie

$$\overline{m}_{\mathscr{P}}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) < \overline{m}_{[a,b]}(f) + \varepsilon/2 - (\underline{m}_{[a,b]}(f) - \varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Pour tout découpage de Riemann $(\mathscr{P},(r_k)_k)$ de [a,b] tel que \mathscr{P} soit subordonné à δ , puisque $\underline{m}_{\mathscr{P}}(f) \leqslant \sum_k f(r_k) \operatorname{Vol}(I_k(\mathscr{P})) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}}(f)$, l'inégalité précédente permet d'écrire

$$\left| m_{[a,b]}(f) - \sum_{k} f(r_k) \operatorname{Vol}(I_k(\mathscr{P})) \right| \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) < \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

Comparaison entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue

Les notions d'intégrales de Riemann et Darboux ne sont qu'un cas particulier de l'intégrale de Lebesgue.

Lemme 2.5.15. Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Il existe deux fonctions Borel-mesurables g,h telles que $g \leqslant f \leqslant h$ et $\int_{[a,b]} g \, dx = \underline{m}_{[a,b]}(f)$, $\int_{[a,b]} h \, dx = \overline{m}_{[a,b]}(f)$. Si f est Darboux-intégrable, alors f = g = h presque partout.

Démonstration. Pour toute partition \mathscr{P} de [a,b], soient $g_{\mathscr{P}}$ et $h_{\mathscr{P}}$ les fonctions telles que

$$g_{\mathscr{P}}(x) = \inf \bigcup_{I_k(\mathscr{P})\ni x} f(I_k(\mathscr{P})), \qquad h_{\mathscr{P}}(x) = \sup \bigcup_{I_k(\mathscr{P})\ni x} f(I_k(\mathscr{P})).$$
 (2.5)

Ces fonctions sont Borel-mesurables et on a

$$\int_{[a,b]} g_{\mathscr{P}} dx = \underline{m}_{\mathscr{P}}(f) \leqslant \overline{m}_{\mathscr{P}}(f) = \int_{[a,b]} h_{\mathscr{P}} dx.$$

Soit $(\mathscr{P}_k)_k$ une suite de partitions croissante $(\mathscr{P}_k \subset \mathscr{P}_{k+1})$ de [a,b] telle que \mathscr{P}_k soit subordonné à ε_k , où $(\varepsilon_k)_k$ est une suite qui converge vers zéro. Posons $g_k = g_{\mathscr{P}_k}$ et $h_k = h_{\mathscr{P}_k}$; les suites $(g_k)_k$ et $(h_k)_k$ sont croissantes et décroissantes respectivement. Puisque f est borné, les fonctions g_k et h_k le sont également; soient $g = \lim_k g_k$ et $h = \lim_k h_k$. Ces fonctions sont Borel-mesurables, $g \leqslant f \leqslant h$ par construction et le théorème de la convergence dominée implique

$$\int_{[a,b]} g \, dx = \lim_k \int_{[a,b]} g_k \, dx = \lim_k \underline{m}_{\mathscr{P}_k}(f) = \underline{m}_{[a,b]}(f)$$

et $\int_{[a,b]} h \, dx = \overline{m}_{[a,b]}(f)$.

Si f est Darboux-intégrable, $\int_{[a,b]} g \, dx = \int_{[a,b]} h \, dx = m_{[a,b]}(f)$. Ainsi, $\int_{[a,b]} h - g \, dx = 0$. Puisque $h - g \ge 0$, le Corollaire 2.3.16 implique h = g = f presque partout.

Théorème 2.5.16 (Lebesgue). Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. La fonction f est Darboux-intégrable si et seulement si elle est continue presque partout.

Démonstration. soit $(\mathscr{P}_k)_k$ une suite de partitions croissante $(\mathscr{P}_k \subset \mathscr{P}_{k+1})$ de [a,b] telle que \mathscr{P}_k soit subordonné à ε_k , avec $\varepsilon_k \to 0$ et $g_k = g_{\mathscr{P}_k}$, $h_k = h_{\mathscr{P}_k}$ les fonctions définies par la relation (2.5).

Si f est Darboux-intégrable, soit $N=\cup_k\mathscr{P}_k$ et comme dans le Lemme 2.5.15, posons $g=\lim_k g_k$ et $h=\lim_k h_k$. Soit $x\in[a,b]\setminus N$ un point pour lequel h(x)=g(x). Pour tout $\varepsilon>0$, il existe donc un indice k tel que $h_k(x)-g_k(x)<\varepsilon$. Si j est l'indice tel que $x\in I_j(\mathscr{P}_k)^\circ$, on a $\sup_{y\in I_j(\mathscr{P}_k)^\circ}|f(x)-f(y)|\leqslant h_k(x)-g_k(x)<\varepsilon$ et f est continu en x. Maintenant, le Lemme 2.5.15 implique que h=g presque partout. Puisque N est négligeable, f est continu presque partout.

Supposons maintenant que f est continu sur $[a,b]\setminus N$, où N est un ensemble négligeable contenant $\cup_k \mathscr{P}_k$. Soit $\varepsilon > 0$; si $x \in [a,b]\setminus N$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ si $|x-y| < \delta$. Dès lors, si $x \in I_j(\mathscr{P}_k)$ avec $\operatorname{Vol}(I_j(\mathscr{P}_k)) < \delta$,

$$h_k(x) - g_k(x) \leqslant \sup_{y,z \in I_i(\mathscr{P}_k)} |f(x) - f(z)| + |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $(h_k - g_k)_k$ est une suite décroissante, $\lim_k h_k - g_k = 0^+$ sur $[a,b] \setminus N$, c'est-à-dire presque partout. Puisque $\int_{[a,b]} g_k dx = \underline{m}_{\mathscr{P}_k}(f)$ et $\int_{[a,b]} h_k dx = \overline{m}_{\mathscr{P}_k}(f)$, le théorème de la convergence dominée implique

$$\lim_{k} \overline{m}_{\mathscr{P}_{k}}(f) - \underline{m}_{\mathscr{P}_{k}}(f) = \int_{[a,b]} \lim_{k} h_{k} - g_{k} dx = 0.$$

Le Lemme 2.5.11 implique alors que la fonction est Darboux-intégrable.

Corollaire 2.5.17 (Lebesgue). Une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est bornée et continue presque partout.

 $D\acute{e}monstration$. Cela résulte du Théorème 2.5.16 et du Théorème 2.5.14.

Le résultat suivant montre que l'intégrale de Riemann est généralisée par l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 2.5.18 (Lebesgue). Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable (i.e. Darboux intégrable), alors f est Lebesgue-intégrable et ces deux intégrales coïncident.

Démonstration. Si f est Riemann-intégrable, alors, si g et h sont les fonctions définies par le Lemme 2.5.15, la relation h=g=f presque partout est vérifiée. Il s'ensuit que f est Lebesgue-mesurable (Proposition 2.2.3), Lebesgue-intégrable (Proposition 2.3.13) et $\int_{[a,b]} f \, dx = \int_{[a,b]} g \, dx = m_{[a,b]}(f)$.

Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R} , la relation $\int f dx = \lim_k \int_{[-k,k]} f dx$ est vérifiée comme une conséquence du théorème de la convergence dominée (et non comme une définition). On peut définir les intégrale de Riemann sur \mathbb{R} de la même manière. Cette

intégrale (impropre) ne possède plus les propriétés que l'on est en droit d'attendre d'une intégrale (permutation de la limite et du signe d'intégration sous certaines hypothèses ³, invariance par translation,...) [23].

^{3.} Pour le voir, il suffit de considérer la fonction $f_k = \chi_{[0,k]}/k$. On vérifie sans peine que $\int_0^k f_k = 1 \ \forall k$. Cependant, f_k converge uniformément vers f = 0 et donc $\lim_k \int f_k = 1 \neq \int f = 0$.

Chapitre 3

Produit de mesures

Ce chapitre est dédié aux mesures et intégrales sur les espaces produits.

3.1 Construction

Produit de σ -algèbres

La notion de produit de σ -algèbres est très proche du produit d'espaces topologiques, où la continuité est remplacée par la mesurabilité.

Dans cette section, nous donnons les définitions ainsi que les premières propriétés concernant les σ -algèbre et mesures produit.

Soient $((X_j, \mathscr{A}_j))_{j \in J}$ une suite d'espace mesurables non nécessairement dénombrable et pour chaque $j, f_j : X \to X_j$ une application. Notons

$$\sigma(f_j:j\in J)=\sigma(f_j^{-1}(\mathscr{A}_j):j\in J)=\sigma(\cup_{j\in J}\{f_j^{-1}(A_j):A_j\in\mathscr{A}_j\})$$

la plus petite des σ -algèbres $\mathscr A$ sur X telles que les applications f_j sont mesurables par rapport à $\mathscr A$ et $\mathscr A_j$ quelque soit $j\in J$.

Définition 3.1.1. Soient $((X_j, \mathscr{A}_j))_{j \in J}$ une suite d'espaces mesurables non nécessairement dénombrable et π_k la projection

$$\pi_k: \prod_{j\in J} X_j \to X_k \quad (x_j)_{j\in J} \mapsto x_k.$$

La σ -algèbre produit engendrée par les σ -algèbres \mathcal{A}_i est la σ -algèbre suivante,

$$\bigotimes_{j \in J} \mathscr{A}_j = \sigma(\pi_j^{-1}(\mathscr{A}_j) : j \in J).$$

On pose $\prod_{j\in J}(X_j,\mathscr{A}_j)=(\prod_{j\in J}X_j,\otimes_{j\in J}\mathscr{A}_j).$

Proposition 3.1.2. Soit $((X_j, \mathscr{A}_j))_{j \in J}$ une suite d'espaces mesurables. Si J est dénombrable, alors

$$\bigotimes_{j \in J} \mathscr{A}_j = \sigma(\{\prod_{j \in J} A_j : A_j \in \mathscr{A}_j\}). \tag{3.1}$$

Démonstration. Si $A_j \in \mathscr{A}_j \ \forall j$, on a

$$\prod_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j) \in \bigotimes_{j \in J} \mathscr{A}_j$$

et donc $\sigma(\{\prod_j A_j : A_j \in \mathscr{A}_j\}) \subset \otimes_j \mathscr{A}_j$. D'autre part, si $A \in \mathscr{A}_k$ pour un k, $\pi_k^{-1}(A) = \prod_{j \in J} A_j$, avec $A_j = X_j$ si $j \neq k$ et $A_k = A$. Ainsi, π_k est mesurable par rapport à $\sigma(\{\prod_j A_j : A_j \in \mathscr{A}_j\})$ et \mathscr{A}_k quelque soit k. Par définition de $\otimes_j \mathscr{A}_j$, on a donc $\otimes_j \mathscr{A}_j \subset \sigma(\{\prod_j A_j : A_j \in \mathscr{A}_j\})$.

Proposition 3.1.3. Soient $((X_j, \mathscr{A}_j))_{j \in J}$ une suite d'espaces mesurables non nécessairement dénombrable et pour chaque $j, f_j : X \to X_j$ une application. S'il existe une suite $(\mathscr{C}_j)_{j \in J}$ telle que $\mathscr{A}_j = \sigma(\mathscr{C}_j) \ \forall j$, alors

$$\sigma(\bigcup_{j\in J} \{f_j^{-1}(A_j) : A_j \in \mathscr{A}_j\}) = \sigma(\bigcup_{j\in J} \{f_j^{-1}(C_j) : C_j \in \mathscr{C}_j\}),$$

au sens où $\otimes_j \mathscr{A}_j$ est la plus petite des σ -algèbres \mathscr{A} telles que $f_j^{-1}(C_j) \in \mathscr{A}$ quelque soit $C_j \in \mathscr{C}_j$ et $j \in J$.

 $D\acute{e}monstration$. La thèse résulte directement de la Proposition 2.1.38.

Le résultat suivant est d'une grande importance pour les σ -algèbres produits.

Corollaire 3.1.4. Soit $((X_j, \mathscr{A}_j))_{j \in J}$ une suite dénombrable d'espaces mesurables telle que $\mathscr{A}_j = \sigma(\mathscr{C}_j) \ \forall j$. On a

$$\bigotimes_{j \in J} \mathscr{A}_j = \sigma(\{\prod_{j \in J} C_j : C_j \in \mathscr{C}_j\}).$$

Démonstration. Cela résulte de la Proposition 3.1.3 et de la preuve de la Proposition 3.1.2, en remplaçant les ensembles $A_j \in \mathscr{A}_j$ et $A \in \mathscr{A}_k$ par les ensembles $C_j \in \mathscr{C}_j$ et $C \in \mathscr{C}_k$ respectivement.

Il arrive que l'on ne considère que le produit dénombrable de σ -algèbre dans la définition 3.1.1. Dans ce cas, il est souvent plus simple de prendre (3.1) comme définition. On peut dans ce cas montrer la proposition 3.1.4 directement.

Remarque 3.1.5. Posons $C = \sigma(\{\prod_{j \in J} C_j : C_j \in \mathscr{C}_j\})$. On a bien entendu $C \subset \bigotimes_{j \in J} \mathscr{A}_j$. Pour tout $C_k \in \mathscr{C}_k$, on a $\pi_k^{-1}(C_k) = \prod_{j \in J} A_j$, avec $A_j = X_j$ pour $j \neq k$ et $A_k = C_k$. Par conséquent, π_k est mesurable par rapport à C et \mathscr{A}_k . Maintenant, si pour $j \in J$, A_j un élément de \mathscr{A}_j , on a $\prod_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j) \in C$, ce qui suffit.

Nous pouvons maintenant justifier la notation 1 \mathbb{B}^d . De fait, si $\mathscr C$ est la collection des semi-intervalles]a,b] de \mathbb{R} , on a $\mathbb{B}^n=\sigma(\{\prod_{k=1}^n I_k:I_k\in\mathscr C\})=\bigotimes_{k=1}^n\mathbb{B}$. En fait, c'est le cas de manière plus générale pour les espaces métriques séparables. Si $((X_k,d_k))_k$ est une suite finie d'espaces métriques séparables, soit $(\prod_k X_k,d_\Pi)$ l'espace produit muni de la distance $d_\Pi(x,y)=\max_k\{d_k(x_k,y_k)\}$. La boule de centre x et de rayon $\varepsilon>0$ s'écrit dans cet espace $B(x,\varepsilon)=\prod_k B_k(x_k,\varepsilon)$, où B_k est la boule de X_k , comme on le vérifie aussitôt par double inclusion.

^{1.} Pour la proposition, nous travaillerons avec l'exposant n et non d pour éviter toute ambiguïté entre la dimension topologique et la distance.

Proposition 3.1.6. Si $((X_k, d_k))_k$ est une suite finie d'espaces métriques séparables,

$$\mathscr{B}(\prod_k X_k, d_{\Pi}) = \bigotimes_k \mathscr{B}(X_k, d_k).$$

Démonstration. Puisque les espaces (X_k, d_k) et $(\prod_k X_k, d_{\Pi})$ sont séparables, par la Proposition 1.1.9, les σ -algèbres de Borel $\mathcal{B}(X_k, d_k)$ et $\mathcal{B}(\prod_k X_k, d_{\Pi})$ sont engendrées par les boules ouvertes de ces espaces. Donc,

$$\bigotimes_{k} \mathcal{B}(X_{k}, d_{k}) = \sigma(\{\prod_{k} B_{k}(x_{k}, \varepsilon) : x_{k} \in X_{k}, \varepsilon > 0\})$$

$$= \sigma(\{B(x, \varepsilon) : x \in \prod_{k} X_{k}, \varepsilon > 0\})$$

$$= \mathcal{B}(\prod_{k} X_{k}, d_{\Pi}),$$

ce qui suffit.

Corollaire 3.1.7. On $a, si \ n > 1, \mathbb{B}^n = \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}^{n-1} = \mathbb{B} \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}$.

 $D\acute{e}monstration$. Si $d_{\mathbb{R}^n}$ est la distance euclidienne usuelle dans \mathbb{R}^n , on a $d_{\Pi} \leq d_{\mathbb{R}^n} \leq \sqrt{n}d_{\Pi}$. Les deux distances sont donc équivalentes et les espaces métriques $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ et (\mathbb{R}^n, d_{Π}) engendrent le même espace topologique (i.e. les mêmes ensembles ouverts). La Proposition 3.1.6 implique

$$\mathbb{B}^n = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n, d_{\Pi}) = \mathscr{B}(\prod_{k=1}^n \mathbb{R}, d_{\Pi}) = \bigotimes_{k=1}^n \mathscr{B}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}}) = \bigotimes_{k=1}^n \mathbb{B},$$

ce qui devait être montré.

Il n'est pas nécessaire d'invoquer la Proposition 3.1.6 ou d'autres dans le résultat précédent : on peut le montrer directement.

Remarque 3.1.8. On a $\mathbb{B}^2 = \sigma(]a_1,b_1]\times]a_2,b_2]: a_1,b_1,a_2,b_2 \in \mathbb{R})$ et donc $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$. Qui plus est, les projections $\pi_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto x$ et $\pi_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto y$ sont Borel-mesurables, puisque continues. Dès lors, si E_1 et E_2 appartiennent à \mathbb{B} , on a $E_1 \times E_2 = (E_1 \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times E_2) = \pi_1^{-1}(E_1) \cap \pi_2^{-1}(E_2) \in \mathbb{B}^2$. Ainsi, $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B} = \sigma(E_1 \times E_2) \in E_1, E_2 \in \mathbb{B}$ ce qui suffit.

Donnons un dernier résultat concernant les applications mesurables.

Corollaire 3.1.9. Soit (X, \mathscr{A}) , (Y, \mathscr{B}) et (Z, \mathscr{C}) trois espaces mesurables; si $f: X \to Y$ est une application mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathscr{B} et $g: X \to Z$ est une application mesurable par rapport à \mathscr{A} et \mathscr{C} , alors

$$(f,g): X \to Y \times Z \quad x \mapsto (f(x),g(x))$$

est mesurable par rapport à \mathscr{A} et $\mathscr{B} \otimes \mathscr{C}$.

Démonstration. Soit h = (f, g); l'ensemble $\{E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} : h^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ est une σ -algèbre contenant les ensembles de la forme $B \times C$, avec $B \in \mathcal{B}$ et $C \in \mathcal{C}$.

Mesure produit

Étant donné deux mesures μ et ν relatives aux σ -algèbres \mathscr{A} et \mathscr{B} respectivement, nous allons définir une mesure sur la σ -algèbre $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Soient deux ensembles X, Y et E un sous-ensemble de $X \times Y$. Si $x \in X$ et $y \in Y$, les sections E_x et E^y sont les ensembles $E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}, E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}.$

Proposition 3.1.10. Soient (X, \mathscr{A}) et (Y, \mathscr{B}) deux espaces mesurables. Si $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, alors, pour tous $x \in X$, $y \in Y$, on a $E_x \in \mathscr{B}$ et $E^y \in \mathscr{A}$.

Démonstration. Soit $x \in X$ et \mathscr{F} la collection des sous-ensembles E de $X \times Y$ tels que $E_x \in \mathscr{B}$. Si $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$, alors $(A \times B)_x$ est soit B, soit \varnothing , donc $A \times B \in \mathscr{F}$. En particulier $X \times Y \in \mathscr{F}$. De plus, puisque $(E^c)_x = (E_x)^c$ et $(\cup_k E_k)_x = \cup_k (E_k)_x$, \mathscr{F} est une σ -algèbre. De là, $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. Autrement dit, si $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, alors $E_x \in \mathscr{B}$. Un argument similaire montre que si $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, alors $E^y \in \mathscr{A}$.

Corollaire 3.1.11. Soient (X, \mathscr{A}) et (Y, \mathscr{B}) deux espaces mesurables. Si $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ est une application $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ -mesurable, alors pour tous $x \in X$, $y \in Y$, $f(\cdot, y)$ est \mathscr{A} -mesurable et $f(x, \cdot)$ est \mathscr{B} -mesurable.

Démonstration. On a $(f(x,\cdot))^{-1}(E) = (f^{-1}(E))_x$ et $(f(\cdot,y))^{-1}(E) = (f^{-1}(E))^y$. La Proposition 3.1.10 permet de conclure.

Le résultat reste bien-entendu valable si f est à valeurs complexes.

Proposition 3.1.12. Soient (X, \mathscr{A}, μ) et (Y, \mathscr{B}, ν) des espaces mesurés σ -finis. Si $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, alors l'application $x \mapsto \nu(E_x)$ est \mathscr{A} -mesurables et l'application $y \mapsto \mu(E^y)$ est \mathscr{B} -mesurable.

Démonstration. Démontrons la mesurabilité de l'application $x \mapsto \nu(E_x)$; l'autre cas se traite de même. Supposons d'abord que ν est fini. Soit \mathscr{F} la classe des ensembles E de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ pour lesquels l'application $x \mapsto \nu(E_x)$ est \mathscr{A} -mesurable (la quantité $\nu(E_x)$ est bien définie, puisque $E_x \in \mathscr{B}$, par la Propriété 3.1.10). Si $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$, $\nu((A \times B)_x) = \nu(B)\chi_A(x)$ et donc $A \times B \in \mathscr{F}$. En particulier, $X \times Y \in \mathscr{F}$. Montrons que \mathscr{F} est une classe de Dynkin. Si, $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, $\nu((E^c)_x) = \nu(Y) - \nu(E_x)$ et si $(E_k)_k$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, alors $\nu((\cup_k E_k)_x) = \sum_k \nu((E_k)_x)$. On a donc montré l'inclusion $\lambda(\{A \times B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}) \subset \mathscr{F}$. Bien sûr, si $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ et $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, on a $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Le Théorème 1.1.25 implique donc que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. Ainsi, $x \mapsto \nu(E_x)$ est mesurable pour tout $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Si ν est une mesure σ -finie, soit $(B_k)_k$ une suite d'ensembles croissante de \mathscr{B} telle que $\nu(B_k) < \infty$ quel que soit k et $\cup_k B_k = Y$. Pour tout k, soit ν_k la mesure sur \mathscr{B} définie par $\nu_k(B) = \nu(B \cap B_k)$. Nous venons de montrer que l'application $x \mapsto \nu_k(E_x)$ est \mathscr{A} -mesurable $\forall k$. La mesurabilité relative à ν s'obtient par passage à la limite sur k. \square

Théorème 3.1.13. Soient (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) des espaces mesurés σ -finis. Il existe une unique mesure $\mu \times \nu$ sur l'espace mesurable $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ telle que

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

pour tous $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$.

La mesure $\mu \times \nu$ est en fait donnée par

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) \, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) \, d\nu(y),$$

pour tout $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Démonstration. La mesurabilité des applications $x \mapsto \nu(E_x)$ et $y \mapsto \mu(E^y)$, $\forall E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ résulte de la Proposition 3.1.12. Donc les applications ξ_1 et ξ_2 définies sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ par $\xi_1(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$ et $\xi_2(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)$ sont bien définies. Bien sûr $\xi_1(\varnothing) = \xi_2(\varnothing) = 0$. Si $(E_k)_k$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, pour tout $y \in Y$, $(E_k^y)_k$ est une suites d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{A} . On a donc $\mu(\cup_k E_k^y) = \sum_k \mu(E_k^y)$ et le Corollaire 2.4.2 implique

$$\xi_1(\bigcup_k E_k) = \int_Y \mu(\bigcup_k E_k^y) \, d\nu(y) = \sum_k \int_Y \mu(E_k^y) \, d\nu(y) = \sum_k \xi_1(E_k),$$

ce qui montre l'additivité dénombrable de ξ_1 . Un argument similaire montre que ξ_2 possède la même propriété. Les applications ξ_1 et ξ_2 sont donc des mesures sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Si $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$,

$$\xi_1(A \times B) = \int_Y \mu(A)\chi_B(y)\nu(dy) = \mu(A)\nu(B) = \xi_2(A \times B).$$

On peut donc poser $\mu \times \nu = \xi_1$.

L'unicité de la mesure $\mu \times \nu$ résulte du Théorème 1.2.10 : on a donc $\mu \times \nu = \xi_1 = \xi_2$ sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ et le théorème est démontré.

Définition 3.1.14. Étant donnés deux espaces mesurés σ -finis (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) , la mesure $\mu \times \nu$ définie sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par le Théorème 3.1.13 est appelée la mesure produit.

Soit \mathcal{L}^d la mesure de Lebesgue définie sur les ensembles boréliens de \mathbb{R}^d . On a

$$\mathcal{L}^{m+n} = \mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^n$$

En effet chacune de ces deux mesures assigne à un rectangle I de \mathbb{R}^{m+n} la quantité $\operatorname{Vol}(I)$. Le Théorème 1.2.10 implique que ces mesures sont égales.

Le corollaire suivant est évident.

Corollaire 3.1.15. Soient (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) des espaces mesurés σ -finis. Si $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est un ensemble tel que N_x (resp. N^y) est négligeable μ -presque partout (resp. ν -presque partout), alors N est négligeable pour la mesure produit.

Démonstration. De fait, l'application $x \mapsto \nu(N_x)$ (resp. $y \mapsto \mu(N^y)$) est égale à l'application 0 μ -presque partout (resp. ν -presque partout). Le Théorème 3.1.13 permet de conclure.

Exercice 3.1.16. Soient (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) des espaces mesurés σ -finis; montrer que si $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est un ensemble $\mu \times \nu$ -négligeable, alors N_x est ν -négligeable μ -presque partout et N^y est μ -négligeable ν -presque partout.

Suggestion : On a par exemple $\int \nu(N_x) d\mu = 0$, ce qui implique $\nu(N_x) = 0$ μ -presque partout.

Définition 3.1.17. Soient (Ω, \mathscr{A}, P) un espace probabilisé et $(X_k)_{k=1}^d$ des variables aléatoires $(X_k : \Omega \to \mathbb{R}, \mathscr{A}$ -mesurable). Ces variables sont appelées des *variables indépendantes* si

$$P(\{X_1 \in A_1, \dots, X_d \in A_d\}) = P(\{X_1 \in A_1\}) \cdots P(\{X_d \in A_d\}).$$

pour toute suite $(A_k)_{k=1}^d$ d'ensembles de \mathscr{A} .

Vu les résultats précédents, les variables sont indépendantes si et seulement si

$$P_{X_1,\ldots,X_d} = P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_d}$$
.

3.2 Intégrales itérées

Théorèmes de Fubini et Tonelli

Les théorèmes qui suivent permettent de calculer des intégrales relatives à des mesures produits grâce à des intégrales itérées.

Théorème 3.2.1 (Tonelli). Soient (X, \mathscr{A}, μ) et (Y, \mathscr{B}, ν) deux espaces mesurés σ -finis. Si $f: X \times Y \to [0, \infty]$ est une fonction $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ -mesurable, alors l'application $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ est \mathscr{A} -mesurable et l'application $y \mapsto \int_X f(x,y) d\mu(x)$ est \mathscr{B} -mesurable. Qui plus est,

$$\int_{X\times Y} f \, d\mu \times \nu = \int_Y \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) = \int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x).$$

Démonstration. Les applications $f(\cdot, y)$ et $f(x, \cdot)$ sont positives et, par le Corollaire 3.1.11, mesurables; les applications $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont donc bien définies.

Si $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ et $f = \chi_E$, alors $f(x,\cdot) = \chi_{E_x}$ et $f(\cdot,y) = \chi_{E^y}$. On a dans ce cas, $\int f(x,y)d\nu(y) = \nu(E_x)$ et $\int f(x,y)d\mu(x) = \mu(E^y)$, $\forall x,y$. Par la Proposition 3.1.12 et le Théorème 3.1.13, la thèse est vérifiée si $f = \chi_E$. La linéarité de l'intégrale implique que ce résultat reste vrai si $f \in \mathscr{S}^+(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$. La Proposition 2.1.6, la Proposition 2.1.12 et le théorème de la convergence monotone permettent de conclure.

On peut vérifier l'intégrabilité d'une application f mesurable sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ en appliquant le théorème de Tonelli à |f|. Si |f| est intégrable sur X et $\int_X |f|(x,y)d\mu(x)$ est intégrable sur Y, alors |f| et donc f sont intégrables sur $X \times Y$ (on peut bien sûr inverser les rôles de X et Y).

Théorème 3.2.2 (Fubini). Soient (X, \mathscr{A}, μ) et (Y, \mathscr{B}, ν) deux espaces mesurés σ -finis. Si $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ est une application $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ -mesurable et $\mu \times \nu$ -intégrable, alors $f(x, \cdot)$ est ν -intégrable pour μ -presque tout $x \in X$ et $f(\cdot, y)$ est μ -intégrable pour ν -presque tout $y \in Y$. Qui plus est l'application,

$$g(x) = \begin{cases} \int_{Y} f(x, y) d\nu(y) & si \ f(x, \cdot) \ est \ \nu\text{-intégrable} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, l'application

$$h(y) = \begin{cases} \int_X f(x,y) \, d\mu(x) & \text{si } f(\cdot,y) \text{ est } \mu\text{-int\'egrable} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}, \nu, \mathbb{R})$ et

$$\int_{X\times Y} f \, d\mu \times \nu = \int_X g \, d\mu = \int_Y h \, d\nu.$$

Démonstration. Traitons le cas de l'application $f(x,\cdot)$; celui de $f(\cdot,y)$ est similaire. Le Théorème de Tonelli implique que les applications

$$x \mapsto \int f^+(x,y) \, d\nu(y)$$
 et $x \mapsto \int f^-(x,y) \, d\nu(y)$

sont \mathscr{A} -mesurables et μ -intégrables. Par le Corollaire 2.3.17, ces applications sont finies μ -presque partout; il s'ensuit que $f(x,\cdot)$ est ν -intégrable μ -presque partout.

Soit N l'ensemble des points x pour lesquels $\int f^+ d\nu(y) = \infty$ ou $\int f^- d\nu(y) = \infty$. L'ensemble $N \in \mathscr{A}$ est un ensemble μ -négligeable tel que g(x) est égal à

$$\int f^{+}(x,y) \, d\nu(y) - \int f^{-}(x,y) \, d\nu(y)$$

si $x \notin N$ et à 0 sinon. Dès lors, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$.

Le théorème de Tonelli et la Proposition 2.3.13 impliquent

$$\int f d\mu \times \nu = \int f^+ d\mu \times \nu - \int f^- d\mu \times \nu$$
$$= \int \int f^+(x, y) d\nu(y) d\mu(x) - \int \int f^-(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$$
$$= \int g d\mu,$$

ce qui suffit.

Bien sûr, le cas des applications à valeurs complexes peut être abordé en décomposant l'application sur $X \times Y$ en sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Voici une conséquence importante du théorème de Fubini, qui permet de calculer l'intégrale de f^p (où f est une fonction mesurable positive) en fonction des mesures des ensembles de niveau de f.

Lemme 3.2.3 (Principe de Cavalieri). Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré σ -fini et $p \in [1, \infty[$; pour toute application μ -mesurable $f: X \to [0, \infty]$, on a

$$\int f^p d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) dt.$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini, on a

$$\int f^p \, d\mu = \int_X (\int_0^{f(x)} p t^{p-1} \, dt) d\mu(x) = p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{\{x: f(x) > t\}} d\mu(x) dt,$$

ce qui suffit.

3.3 Mesures extérieures produit

On peut aussi considérer les mesures extérieures produit.

On peut bien entendu étendre la notion de mesurabilité d'une application aux mesures extérieures.

Définition 3.3.1. Soit X un espace, (Y, \mathcal{B}) un espace mesurable et μ^* une mesure extérieure sur X; une application $f: X \to Y$ est μ^* -mesurable par rapport pour \mathscr{B} si $f^{-1}(B)$ est μ^* -mesurable pour tout $B \in \mathcal{B}$. Si Y est un espace topologique et que l'on ne précise pas la σ -algèbre \mathscr{B} sur laquelle on travaille, l'application f est μ^* -mesurable si $f^{-1}(U)$ est μ^* -mesurable pour tout ouvert U de Y.

Les propriétés des applications mesurables restent inchangées dans ce contexte. On a le théorème de décomposition suivant.

Théorème 3.3.2. Si μ^* est une mesure extérieure sur X et $f: X \to [0, \infty]$ est une application μ^* -mesurable, il existe une suite d'ensembles μ^* -mesurables $(A_k)_k$ de X telle que

$$f = \sum_{k} \frac{1}{k} \chi_{A_k}.$$

Démonstration. Posons $A_1 = \{x \in X : f(x) \ge 1\}$ et

$$A_{k+1} = \{x \in X : f(x) \geqslant \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)\}.$$

On vérifie directement que $f \geqslant \chi_{A_1}$ et si on a montré la relation $f \geqslant \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \chi_{A_j}$ pour un k, si x n'appartient pas à A_{k+1} , on a trivialement $f(x) \geqslant \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$. Si x appartient à A_{k+1} , on a par définition de cet ensemble,

$$f(x) \geqslant \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x).$$

Nous venons donc de montrer par récurrence que l'on a $f \geqslant \sum_k \frac{1}{k} \chi_{A_k}$. Si x vérifie $f(x) = \infty$, x appartient à A_k pour tout k et on a $f = \sum_k \frac{1}{k} \chi_{A_k}$. Si f(x) est fini, alors x n'appartient pas à A_k pour un nombre infini d'indices k. Pour un tel k, on a

$$0 \leqslant f - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) < \frac{1}{k-1},$$

ce qui suffit pour conclure.

Définition 3.3.3. Soit μ^* une mesure extérieure sur X et ν^* une mesure extérieure sur Y; pour tout $A \times B \in \wp(X \times Y)$, on pose

$$\mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*} = \{A \times B \in X \times Y : A \text{ est } \mu^*\text{-mesurable et } B \text{ est } \nu^*\text{-mesurable}\},$$

$$\mathcal{R}_E = \{ (A_k \times B_k)_k : E \subset \bigcup_k A_k \times B_k, \ A_k \times B_k \in \mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*} \forall k \},$$

pour tout $E \in \wp(X \times Y)$ et

$$\mu^* \times \nu^* : \wp(X \times Y) \to [0, \infty] \quad A \times B \mapsto \inf\{\sum_k \mu(A_k)\nu(B_k) : (A_k \times B_k)_k \in \mathcal{R}_E\}.$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 3.3.4. Soit μ^* une mesure extérieure sur X et ν^* une mesure extérieure sur Y; on a les propriétés suivantes :

- $\mu^* \times \nu^*$ est une mesure extérieure régulière sur $X \times Y$ dont la mesure associée sera notée $\mu \times \nu$,
- $si\ A \times B \in \mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*}$, alors $A \times B$ est également $\mu^* \times \nu^*$ -mesurable et

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

— si $E \in \wp(X \times Y)$ est $\mu^* \times \nu^*$ -mesurable et σ -fini pour $\mu^* \times \nu^*$, alors E^y est μ^* -mesurable pour ν^* -presque tout y, E_x est ν^* -mesurable pour μ^* -presque tout x, $\mu(E^y)$ est ν^* -mesurable, $\mu(E_x)$ est μ^* -mesurable et

$$\mu \times \nu(E) = \int \mu(E^y) \, d\nu(y) = \int \nu(E_x) \, d\mu(x).$$

— Si f est $\mu \times \nu$ -intégrable, l'application

$$y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$$

admet une intégrale pour ν -presque tout y,

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$$

admet une intégrale pour μ -presque tout x et

$$\int f d\mu \times \nu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit \mathscr{C} la collection des parties E de $X \times Y$ pour lesquelles la fonction

$$x \mapsto \chi_E(x,y)$$

est μ -mesurable pour tout $y \in Y$ et l'application

$$y \mapsto \int_X \chi_E(x,y) \, d\mu(x)$$

est ν -mesurable. Pour $E \in \mathcal{C}$, soit

$$\rho(E) = \int_{Y} \left(\int_{X} \chi_{E}(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Remarquons que l'on a $\mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*} \subset \mathscr{C}$ et que pour $A \times B \in \mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*}$,

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Posons

$$\mathscr{F}_{\cup} = \{ E = \cup_k E_k : E_k \in \mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*} \} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_{\cap} = \{ E = \cap_k E_k : E_k \in \mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*} \}.$$

Si $A_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$ sont deux éléments de $\mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*}$, alors

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathscr{F}_{u^*, v^*}$$

et

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)),$$

où l'union est une union disjointe déléments de $\mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*}$, ce qui nous permet d'affirmer que tout élément de \mathscr{F}_{\cup} est une union dénombrable d'éléments de $\mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*}$ deux à deux disjoints. En conséquence, on a $\mathscr{F}_{\cup} \subset \mathscr{C}$.

Pour $E \in \wp(X \times Y)$, on a

$$\rho(\cup_k A_k \times B_k) \leqslant \sum_k \rho(A_k \times B_k) = \sum_k \mu(A_k)\nu(B_k),$$

pour toute suite $((A_k, B_k))_k$ de \mathcal{R}_E et donc

$$\inf\{\rho(\cup_k R_k) : (R_k)_k \in \mathcal{R}_E\} \leqslant \mu^* \times \nu^*(E).$$

D'autre part, pour toute suite $(R_k)_k$ de \mathcal{R}_E , il existe une suite $(A_k \times B_k)_k$ d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*}$ tels que $\cup_k R_k = \cup_k A_k \times B_k$ et donc

$$\rho(R) = \sum_{k} \mu(A_k) \nu(B_k) \geqslant \mu^* \times \nu^*(E),$$

ce qui prouve que l'on a

$$\inf\{\rho(\cup_k R_k): (R_k)_k \in \mathcal{R}_E\} = \mu^* \times \nu^*(E).$$

Maintenant, pour $A \times B \in \mathscr{F}_{\mu^*,\nu^*}$, on a

$$\mu^* \times \nu^*(A \times B) \leqslant \mu(A)\nu(B) = \rho(A \times B) \leqslant \rho(\cup R_k),$$

pour toute suite $(R_k)_k$ de $\mathcal{R}_{A\times B}$ et par conséquent, en prenant l'infimum sur de telles suites, on obtient l'égalité dans les relations précédentes et donc

$$\mu^* \times \nu^*(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Nous n'avons pas encore prouvé que l'ensemble $A \times B$ est mesurable. Soit $E \in \wp(X \times Y)$, $(R_k)_k$ une suite de \mathcal{R}_E et posons $R = \cup R_k$. Les ensembles $R \setminus A \times B$ et $R \cap A \times B$ sont deux ensembles disjoints de \mathscr{C} et donc

$$\mu^* \times \nu^*(E \setminus A \times B) + \mu^* \times \nu^*(E \cap A \times B) \leq \rho(R \setminus A \times B) + \rho(R \cap A \times B) = \rho(R)$$

et donc, en prenant l'infimum sur de tels ensembles R,

$$\mu^* \times \nu^*(E \setminus A \times B) + \mu^* \times \nu^*(E \cap A \times B) \leq \mu^* \times \nu^*(E).$$

Nous avons donc prouvé le second point de l'énoncé.

Montrons maintenant que pour toute partie E de $X \times Y$, il existe $R \in \mathscr{F}_{\cap}$ tel que $\rho(R) = \mu^* \times \nu^*(E)$. Si $\mu^* \times \nu^*(E) = \infty$, il suffit de prendre $R = X \times Y$. Sinon, pour tout indice k, nous savons qu'il existe un élément R_k de \mathscr{F}_{\cup} tel que $E \subset R_k$ et

$$\rho(R_k) < \mu^* \times \nu^*(E) + 1/k.$$

Soit $R = \cap_k R_k$; puisque R appartient à \mathscr{F}_{\cap} , on a $R \in \mathscr{C}$ et par le théorème de la convergence majorée, on obtient

$$\mu^* \times \nu^*(E) \leqslant \rho(R) = \lim_k \rho(\cap_k R_k) \leqslant \mu^* \times \nu^*(E).$$

Vu le second point de la thèse (qui a été démontré), tout élément de \mathscr{F}_{\cap} est $\mu^* \times \nu^*$ mesurable et la relation qui vient d'être obtenue prouve le premier point de la thèse.

Si E est une partie de $X \times Y$ pour laquelle $\mu^* \times \nu^*(E) = 0$, il existe $R \in \mathscr{F}_{\cap}$ tel que $E \subset R$ et $\rho(R) = 0$, ce qui montre que E appartient à \mathscr{C} avec $\rho(E) = 0$. Supposons maintenant que E est $\mu^* \times \nu^*$ -mesurable avec $\mu \times \nu(E) < \infty$. Il existe $R \in \mathscr{F}_{\cap}$ tel que $E \subset R$ et $\mu \times \nu(R \setminus E) = 0$, ce qui implique $\rho(R \setminus E) = 0$. Par définition de ρ , on a $\mu(E^y) = \mu(S^y)$ pour ν -presque tout y et

$$\mu \times \nu(E) = \rho(R) = \int \mu(S^y) \, d\nu(y).$$

Si E n'est pas de mesure finie, il suffit de considérer la suite croissante (E_k) d'éléments mesurables tels que $\mu \times \nu(E_k) < \infty$ et $E = \bigcup_k E_k$.

Le dernier point découle du précédent lorsque f est de la forme $f=\chi_E$ pour un ensemble mesurable E. Si f est positif et $\mu^* \times \nu^*$ -intégrable, le théorème 3.3.2 permet de décomposer f comme suit :

$$f = \sum_{k} \frac{1}{k} \chi_{E_k},$$

ce qui permet de conclure, grâce au théorème de la convergence monotone. Le cas général s'obtient grâce à la décomposition $f = f^+ - f^-$.

Chapitre 4

Compléments sur l'intégrale de Lebesgue

4.1 Théorème du changement de variables dans \mathbb{R}^d

Nous allons ici nous intéresser à la mesure de Lebesgue et au théorème fondamental de changement de variable s'y rapportant. Nous considérerons implicitement que la mesure sous-jacente est la mesure de Lebesgue.

Lemme 4.1.1. Si E est une partie Lebesgue-négligeable de \mathbb{R}^d et T une application de E dans \mathbb{R}^d telle que

$$\overline{\lim_{y\to x,y\in E}}\,\frac{|T(x)-T(y)|}{|x-y|}<\infty,$$

pour tout x, alors T(E) est également négligeable.

Démonstration. Pour $n, p \in \mathbb{N}_0$, soit

$$E_{n,p} = \{ x \in E : |T(x) - T(y)| < n|x - y| \ \forall y \in B(x, 1/p) \cap E \}.$$

Puisque $E_{n,p}$ est négligeable, par la régularité de la mesure de Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant $E_{n,p}$ tel que $\mathcal{L}^d(U) < \varepsilon$. Nous savons que U est union dénombrable de cubes dyadiques semi-ouverts deux à deux disjoints. Quitte à les subdiviser, nous pouvons supposer que le diamètre de ces cubes est 1/p au plus. La somme des mesures de ces cubes est donc majorée par ε . Pour chacun de ces cubes C, soit B le cercle circonscrit correspondant. En considérant le carré circonscrit à ce cercle, on obtient facilement qu'il existe une constante c > 0 indépendante de C et B telle que $\mathcal{L}^d(B) < c\mathcal{L}^d(C)$. On a donc que la somme de ces boules est majoré par $c\varepsilon$. Autrement dit, nous venons de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement dénombrable $(B_k)_k$ de $E_{n,p}$ par des boules de rayon au plus 1/p tel que $\sum_k \mathcal{L}^d(B_k) < \varepsilon$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit x_k le centre de B_k et r_k son rayon. Puisque, pour tout $x \in E_{n,p} \cap B_k$, on a $|x - x_k| < 1/p$ et $x_k \in E_{n,p}$, il vient

$$|T(x) - T(x_k)| < n|x - x_k| < nr_k$$

ce qui implique $T(E_{n,p} \cap B_k) \subset B(T(x_k), nr_k)$. On a donc

$$T(E_{n,p}) \subset \bigcup_k B(T(x_k), nr_k).$$

La mesure extérieure de $T(E_{n,p})$ est en particulier majorée par

$$\sum_{k} \mathcal{L}^{d}(B(T(x_{k}), nr_{k})) = \sum_{k} \mathcal{L}^{d}(B(x_{k}, nr_{k})) = n^{d} \sum_{k} \mathcal{L}^{d}(B_{k}) < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $T(E_{n,p})$ est négligeable. Puisque la mesure de Lebesgue est complète, on a en particulier que $T(E_{n,p})$ est \mathcal{L}^d -mesurable.

Puisque E est union dénombrable d'ensembles de la forme $E_{n,p}$, T(E) est union dénombrable d'ensembles de la forme $T(E_{n,p})$ et est donc négligeable.

Corollaire 4.1.2. Si U est un ouvert de \mathbb{R}^d et si l'application $T:U\to\mathbb{R}^d$ est différentiable sur U, alors l'image par T d'un ensemble Lebesgue-négligeable est encore un ensemble négligeable.

Proposition 4.1.3. Soit T une matrice réelle de dimension $d \times d$. Si T n'admet pas d'inverse, $T\mathbb{R}^d$ est négligeable. Si T est inversible, l'image par T de tout ensemble borélien est un ensemble borélien et, dans les deux cas,

$$\mathcal{L}(TB) = |\det(T)|\mathcal{L}(B),$$

pour tout ensemble borélien B de \mathbb{R}^d .

 $D\acute{e}monstration$. Si T n'est pas inversible, $T\mathbb{R}^d$ est inclus dans un hyperplan de \mathbb{R}^d . Vu le Corollaire 3.1.15, $T\mathbb{R}^d$ est négligeable. La formule est trivialement vérifiée.

Si T est inversible, l'application linéaire T est continue, tout comme son inverse T^{-1} . Les applications T et T^{-1} sont donc mesurables (par rapport à \mathbb{B}^d) et TB est un ensemble borélien si et seulement si B est un ensemble borélien. Pour conclure, par la Proposition A.4.8, il suffit d'établir la formule dans le cas ou T est une matrice de multiplication ou d'addition.

Soit T une matrice de multiplication. Le résultat est évident si B est un cube dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (un des côté est contracté ou dilaté). Par le Lemme 1.4.34, la formule est vérifiée pour tout ensemble B ouvert et donc, puisque la mesure de Lebesgue est régulière, pour tout ensemble borélien.

Soit T une matrice d'addition; on a T=I+S, où S est une matrice dont seul l'élément (l,c) $(l \neq c)$ est non-nul (égal à $s \in \mathbb{R}_*$). Si B est un rectangle $\prod_{k=1}^d [a_k,b_k]$ (dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées), le Théorème 3.1.13 et le théorème de Fubini impliquent,

$$\mathcal{L}(TB) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots [\widehat{\int_{a_c}^{b_c} dx_c}] \cdots [\widehat{\int_{a_l}^{b_l} dx_l}] \cdots \int_{a_d}^{b_d} dx_d \int_{a_c}^{b_c} \int_{a_l+sx_c}^{b_l+sx_c} dx_l dx_c = \mathcal{L}(B).$$

Puisque det(T) = 1, la conclusion s'ensuit. Pour le cas général, on procède comme pour les matrices de multiplication.

Lemme 4.1.4. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et $C = \prod_k [a_k, b_k] \subset \Omega$ un cube de Ω . S'il existe une application $g: \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 telle que

$$||g_{*x} - I|| \leqslant \varepsilon$$

 $sur\ C\ (i.e.\ \forall x\in C)\ pour\ un\ nombre\ \varepsilon>0,\ alors$

$$\mathcal{L}^*(g(C)) \leqslant (1+\varepsilon)^d \mathcal{L}(C).$$

Démonstration. Soit c le centre du cube C et $l=b_k-a_k$ la longueur des côtés. On a bien sûr $d_{\infty}(x,c) \leq l/2$ et la Proposition A.1.3 implique

$$d_{\infty}(g(x) - x, g(c) - c) \leqslant \varepsilon d_{\infty}(x, c)$$

et donc

$$d_{\infty}(g(x), g(c)) \leq (1 + \varepsilon)d_{\infty}(x, c) \leq (1 + \varepsilon)l/2.$$

L'image d'un point de C par g appartient donc au cube fermé, de côtés parallèles aux axes de coordonnées, de centre g(c) dont les côtes sont de longueur $(1+\varepsilon)l$. La mesure de ce cube est $(1+\varepsilon)^d l^d$, tandis que la mesure de C est l^d . Le résultat s'ensuit aussitôt. \square

Définition 4.1.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et $f:\Omega \to \mathbb{R}^d$ est une application de classe C^1 . Le *jacobien* de f, noté J_f est défini par la relation suivante,

$$J_f(x) = \det(f_{*x}).$$

Lemme 4.1.6. Soient U, V des sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^d et φ une bijection entre U et V telle que φ et φ^{-1} soient classe C^1 . S'il existe un nombre C > 0 et un ensemble borélien $B \subset U$ tel que $|J_{\varphi}(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in B$, alors $\mathcal{L}(\varphi(B)) \leqslant C\mathcal{L}(B)$.

Démonstration. Rappelons une dernière fois que φ et φ^{-1} étant mesurables, $B \subset U$ est un ensemble borélien si et seulement si $\varphi(B)$ est également un ensemble borélien. De plus, puisque $\varphi^{-1} \circ \varphi = I$ implique $\varphi_{*\varphi(x)}^{-1} \circ \varphi_{*x} = I \ \forall x \in U, \ J_{\varphi}(x)$ est non-nul $\forall x \in U$. Supposons d'abord que $W \subset U$ est un ensemble ouvert de U dont l'adhérence est un

Supposons d'abord que $W \subset U$ est un ensemble ouvert de U dont l'adhérence est un compact inclus dans U et $|J_{\varphi}(x)| \leq C$ pour tout $x \in W$. Soit $\varepsilon > 0$; puisque l'adhérence de W est compacte, $\varphi_{*\varphi(x)}^{-1}$ est borné sur W et les dérivées partielles de φ sont uniformément continues sur W. Il existe donc M > 0 tel que

$$\|\varphi_{*\varphi(x)}^{-1}\| \leqslant M \quad \forall x \in W \tag{4.1}$$

et un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\|\varphi_{*x} - \varphi_{*y}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \tag{4.2}$$

quels que soient $x, y \in W$ tels que $|x - y| \leq \delta$.

Par le Lemme 1.4.34, W peut s'écrire comme l'union dénombrable de cubes dyadiques deux à deux disjoints, $W = \bigcup_k C_k$. En subdivisant si nécessaire ces cubes, on peut supposer que la longueur de leurs côtés est inférieure à 2δ . Si C est un de ces cubes, soient c sont centre et $g: U \to \mathbb{R}^d$ l'application $g(x) = \varphi_{*\varphi(c)}^{-1}(\varphi(x))$. La règle d'enchaînement des différentielles (inversée) implique

$$g_{*x} - I = \varphi_{*\varphi(c)}^{-1} \circ \varphi_{*x} - I = \varphi_{*\varphi(c)}^{-1} \circ (\varphi_{*x} - \varphi_{*c}),$$

Les inégalités (4.1) et (4.2) permettent d'écrire

$$||g_{*x} - I|| \le ||\varphi_{*\varphi(c)}^{-1}|| ||\varphi_{*x} - \varphi_{*c}|| \le \varepsilon,$$

pour tout $x \in C$. Par le Lemme 4.1.4, $\mathcal{L}(g(C)) \leq (1+\varepsilon)^d \mathcal{L}(C)$. De plus, comme $\varphi(C) = \varphi_{*c}(g(C))$, la Proposition 4.1.3 implique $\mathcal{L}(\varphi(C)) = |\det(\varphi_{*c})|\mathcal{L}(g(C))$. Ainsi,

$$\mathcal{L}(\varphi(C)) = C\mathcal{L}(g(C)) \leqslant C(1+\varepsilon)^d \mathcal{L}(C).$$

Puisque C est un cube dyadique arbitraire,

$$\mathcal{L}(\varphi(W)) = \sum_{k} \mathcal{L}(\varphi(C_k)) \leqslant \sum_{k} C(1+\varepsilon)^d \mathcal{L}(C_k) = C(1+\varepsilon)^d \mathcal{L}(W).$$

Le nombre ε étant arbitraire, on a $\mathcal{L}(\varphi(W)) \leq C\mathcal{L}(W)$.

Supposons maintenant que W est un sous-ensemble ouvert arbitraire de U tel que $|J_{\varphi}(x)| \leq C \ \forall x \in W$. Soit $(W_k)_k$ une suite croissante d'ensembles ouverts de W telle que $W = \bigcup_k W_k$ et l'adhérence de W_k est un ensemble compact $\forall k$. On a $\mathcal{L}(\varphi(W_k)) \leq C\mathcal{L}(W_k)$ pour tout k et donc

$$\mathcal{L}(\varphi(W)) = \lim_{k} \mathcal{L}(\varphi(W_k)) \leqslant C \lim_{k} \mathcal{L}(W_k) = C\mathcal{L}(W). \tag{4.3}$$

Finalement, étant donné un ensemble borélien $B \subset U$ tel que $|J_{\varphi}(x)| \leq C \ \forall x \in B$, soit $\varepsilon > 0$. Si W est un ensemble ouvert contenant B, soit $W_{\varepsilon} = \{x \in W : |J_{\varphi}(x)| < C + \varepsilon\}$. L'inégalité (4.3) implique

$$\mathcal{L}(\varphi(B)) \leqslant \mathcal{L}(\varphi(W_{\varepsilon})) \leqslant (C + \varepsilon)\mathcal{L}(W_{\varepsilon}) \leqslant (C + \varepsilon)\mathcal{L}(W).$$

Puisque ε est arbitraire, la régularité de la mesure de Lebesgue permet de conclure. \square

Théorème 4.1.7. Soient U,V deux sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^d et $\varphi:U\to V$ une bijection telle que φ et φ^{-1} soient de classe C^1 . Tout sous-ensemble borélien $B\subset U$ satisfait l'éqalité

$$\mathcal{L}(\varphi(B)) = \int_{B} |J_{\varphi}(x)| \, d\mathcal{L}(x)$$

et toute fonction (Borel-)mesurable $f: V \to \mathbb{R}$ vérifie

$$\int_{V} f d\mathcal{L} = \int_{U} f(\varphi(x)) |J_{\varphi}(x)| d\mathcal{L}(x),$$

dans le sens où, si l'une des intégrales existe, alors les deux existent et sont égales.

Démonstration. Supposons d'abord que B est un sous-ensemble borélien de U tel que $\mathcal{L}(B) < \infty$. Pour tout k > 0, soit $B_{k,j}$ l'ensemble

$$B_{k,j} = \{ x \in B : \frac{j-1}{k} \leqslant |J_{\varphi}(x)| \leqslant \frac{j}{k} \}.$$

Le Lemme 4.1.6 implique $\mathcal{L}(\varphi(B_{k,j})) \leq (j/k)\mathcal{L}(B_{k,j})$. Puisque, si $y = \varphi(x)$,

$$|J_{\varphi^{-1}}(y)J_{\varphi}(x)| = |\det(\varphi_{*y}^{-1} \circ \varphi_{*x})| = |\det(I)| = 1,$$

on a aussi, si j > 1, $|J_{\varphi^{-1}}(y)| \leq k/(j-1) \ \forall y \in \varphi(B_{k,j})$. Le Lemme 4.1.6 appliqué à φ^{-1} implique alors $\mathcal{L}(\varphi^{-1}(\varphi(B_{k,j}))) \leq k/(j-1)\mathcal{L}(\varphi(B_{k,j}))$. Au total les inégalités

$$\frac{j-1}{k}\mathcal{L}(B_{k,j}) \leqslant \mathcal{L}(\varphi(B_{k,j})) \leqslant \frac{j}{k}\mathcal{L}(B_{k,j})$$
(4.4)

sont vérifiées pour tout k. De plus, par définition de $B_{k,i}$, on a

$$\frac{j-1}{k}\mathcal{L}(B_{k,j}) \leqslant \int_{B_{k,j}} |J_{\varphi}(x)| \, d\mathcal{L}(x) \leqslant \frac{j}{k}\mathcal{L}(B_{k,j}) \tag{4.5}$$

Les inégalités (4.4) et (4.5) impliquent

$$\left| \mathcal{L}(\varphi(B_{k,j})) - \int_{B_{k,j}} |J_{\varphi}(x)| \, d\mathcal{L}(x) \right| \leqslant \frac{j}{k} \mathcal{L}(B_{k,j}) - \frac{j-1}{k} \mathcal{L}(B_{k,j}) = \frac{1}{k} \mathcal{L}(B_{k,j}).$$

Comme $B = \bigcup_j B_{k,j}$, on obtient

$$\left| \mathcal{L}(\varphi(B)) - \int_{B} |J_{\varphi}(x)| \, d\mathcal{L}(x) \right| \leqslant \sum_{j} \frac{1}{k} \mathcal{L}(B_{k,j}) = \frac{1}{k} \mathcal{L}(B).$$

Le nombre k étant arbitraire, la première partie du théorème est démontrée lorsque $\mathcal{L}(B)$ est fini.

Si $B \subset U$ est un ensemble borélien arbitraire, soit $(B_k)_k$ une suite croissante d'ensembles boréliens de mesure finie telle que $\bigcup_k B_k = B$. En prenant la limite sur k dans l'égalité $\mathcal{L}(\varphi(B_k)) = \int_{B_k} |J_{\varphi}(x)| d\mathcal{L}(x)$, on obtient $\mathcal{L}(\varphi(B)) = \int_B |J_{\varphi}(x)| d\mathcal{L}(x)$.

Démontrons la seconde partie. Si f est la fonction caractéristique d'un ensemble borélien C de V, en posant $B = \varphi^{-1}(C)$, la seconde formule se déduit de la première. La linéarité de l'intégrale et le théorème de la convergence monotone implique que l'égalité reste vérifiée pour les fonctions boréliennes positives. Le cas général, où f est une fonction borélienne, s'obtient en décomposant f en ses parties positive et négative, f^+ et f^- . \Box

À titre d'application, calculons la mesure d'une boule de \mathbb{R}^d .

Exemple 4.1.8. Il est clair que $\mathcal{L}(B(x,r)) = \mathcal{L}(B(x,\leqslant r)) = \mathcal{L}(B(\leqslant r))$. Pour tout $d \in \mathbb{N}_0$ et tout $\varepsilon > 0$, posons $V_d(r) = \mathcal{L}(B(\leqslant r))$. Le changement de variable linéaire x = ry de \mathbb{R}^d donne $V_d(r) = r^d V_d(1)$. Si d > 2, on obtient, par réduction,

$$V_d(1) = \int_{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |(x_1, x_2)| \le 1\}} V_{d-2}(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \, dx_1 dx_2.$$

En recourant de nouveau à la formule $V_{d-2}(r) = r^{d-2}V_{d-2}(1)$, on a

$$V_d(1) = V_{d-2}(1) \int_{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |(x_1, x_2)| \le 1\}} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{d/2 - 1} dx_1 dx_2$$
$$= V_{d-2}(1) 2\pi (-\frac{1}{d}) [(1 - r^2)^{d/2}]_0^1 = \frac{2\pi}{d} V_{d-2}(1).$$

Au final, on obtient

$$V_1(r) = 2r, \quad V_2(r) = \pi r^2$$

et

$$V_{2d+1}(r) = \frac{2(2\pi)^d}{(2d+1)(2d-1)\cdots 3}r^{2d+1}, \quad V_{2d}(r) = \frac{\pi^d}{d!}r^{2^d},$$

ou encore

$$V_d(r) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)} r^d. \tag{4.6}$$

En particulier, $\lim_d V_d(1) = 0$ et si $C_d = \mathcal{L}([-1,1]^d)$, $V_d(1)/C_d$ décroît vers 0.

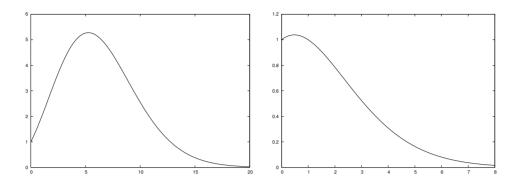


FIGURE 4.1 – Panneau de gauche : représentation de $V_d(1)$ comme une fonction continue de d. Panneau de droite : représentation de $V_d(1)/C_d$ comme une fonction continue de d.

4.2 Inégalité isodiamétrique

Notre but ici est de montrer que la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable A est inférieure à celle de la boule euclidienne de même diamètre que A. Pour ce faire nous présenterons divers outils, dont l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Inégalité isodiamétrique via la symétrisation de Steiner

Une première méthode utilise la symétrisation de Steiner.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2.1. Si l'application $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ est Lebesgue-mesurable, alors

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \le y \le f(x)\}$$

est un ensemble Lebesque-mesurable de \mathbb{R}^{d+1}

Démonstration. Soit

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},\$$

et définissons

$$g: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to [0, \infty] \cup \{\infty\} \quad (x, y) \mapsto f(x) - y.$$

Cette application est Lebesgue-mesurable et donc

$$A = \{(x, y) : y \geqslant 0\} \cap \{(x, y) : g(x, y) \geqslant 0\}$$

est également Lebesgue-mesurable.

Voici une preuve plus géométrique.

Démonstration. Posons

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < \infty\} \quad \text{et} \quad E_{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = \infty\}.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_0$, posons en outre

$$E_{j,k} = \{ x \in \mathbb{R}^d : \frac{j}{k} \le f(x) < \frac{j+1}{k} \},$$

de manière à avoir $E = \bigcup_{j \geqslant 0} E_{j,k}$ pour tout k. Définissons maintenant dans \mathbb{R}^{d+1} ,

$$B_k = (\bigcup_{j \ge 0} E_{j,k} \times [0, \frac{j}{k}]) \bigcup (E_{\infty} \times [0, \infty])$$

et

$$C_k = (\bigcup_{j \ge 0} E_{j,k} \times [0, \frac{j+1}{k}]) \bigcup (E_{\infty} \times [0, \infty])$$

pour enfin avoir $B = \bigcup_k B_k$ et $C = \bigcap_k C_k$. Puisque B_k et C_k sont mesurables pour tout indice k, il en va de même pour B et C. Qui plus est, puisqu'on a $B_k \subset A \subset C_k$ pour tout k, on a également $B \subset A \subset C$.

Maintenant si étant donné r > 0, $B_m(r)$ désigne la boule centrée à l'origine et de rayon r de \mathbb{R}^m , on a pour tout indice k,

$$\mathcal{L}((C \setminus B) \cap B_{d+1}(r)) \leqslant \mathcal{L}((C_k \setminus D_k) \setminus B_{d+1}(0,r))$$

$$\leqslant \frac{1}{k} \mathcal{L}(B_d(r)),$$

ce qui prouve que $\mathcal{L}((C \setminus B) \cap B_{d+1}(r))$ est nul pour tout r > 0 et donc $\mathcal{L}(C \setminus B) = 0$. Ainsi, $\mathcal{L}^*(A \setminus B) = 0$, ce qui implique que $A \setminus B$ est mesurable.

Remarquons d'abord qu'un ensemble de diamètre donné n'est en général pas inclus dans une boule de même diamètre. Un exemple simple est donné par le triangle équilatéral de diamètre égal à deux.

Étant donné $e, u \in \mathbb{R}^d$ avec |e| = 1, soit la droite

$$L_{eu} = \{u + te : t \in \mathbb{R}\}$$

et l'hyperplan

$$P_e = \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, e \rangle = 0 \}.$$

Définition 4.2.2. Étant donné $e \in \mathbb{R}^d$ tel que |e| = 1, la symétrisation de Steiner d'une partie A de \mathbb{R}^d par rapport à l'hyperplan P_e est l'ensemble

$$S_e(A) = \bigcup_{\substack{u \in P_e \\ A \cap L_e, u \neq \varnothing}} \{u + te : |t| \leqslant \frac{1}{2} \ell(A \cap L_{e,u})\},$$

où $\ell(C)$ désigne la longueur de la courbe C.

Si on considère $A \cap L_{e,u}$ comme une partie de \mathbb{R} , on peut écrire $\ell(A \cap L_{e,u}) = \mathcal{L}(A \cap L_{e,u})$. Intuitivement, $S_e(A)$ est une union de segments de direction e centrés en des points de l'hyperplan orthogonal à e (on prend bien sûr les droites intersectant A). D'une certaine maniè, on symétryse « la moitié de A » par rapport à P_e pour définir $S_e(A)$.

Proposition 4.2.3. Étant donné $e \in \mathbb{R}^d$ tel que |e| = 1, pour toute partie A de \mathbb{R}^d , on a $-\operatorname{diam}(S_e(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$.

— si A est mesurable, alors $S_e(A)$ l'est également et dans ce cas, on a $\mathcal{L}(S_e(A)) = \mathcal{L}(A)$.

Démonstration. Pour la première partie, le résultat est évident si diam $(A) = \infty$. Dans le cas contraire, on peut en outre supposer que A est fermé. De fait, si ce résultat est obtenu pour les fermés, puisque $S_e(A) \subset S_e(\bar{A})$, on aura

$$\operatorname{diam}(S_e(A)) \leq \operatorname{diam}(S_e(\bar{A})) \leq \operatorname{diam}(\bar{A}) = \operatorname{diam}(A).$$

En d'autre termes, il nous suffit d'établir l'inégalité lorsque A est compact. Si B est une boule centrée à l'origine contenant A, on constate directement que l'on a également $S_e(A) \subset B$, ce qui montre que $S_e(A)$ est borné. Pour $\varepsilon > 0$, soit x et x' deux points de $S_e(A)$ tels que

$$\operatorname{diam}(S_E(A)) < |x - '| + \varepsilon.$$

Considérons la projection orthogonale x_{\perp} (resp. x'_{\perp}) de x (resp. x') sur P_e pour pouvoir écrire

$$x = x_{\perp} + \langle x, e \rangle e$$
 et $x' = x'_{\perp} + \langle x', e \rangle e$

et considérons les nombres

$$r = \inf\{t \in \mathbb{R} : x_{\perp} + te \in A\}, \quad s = \sup\{t \in \mathbb{R} : x_{\perp} + te \in A\},\$$

 $r' = \inf\{t \in \mathbb{R} : x'_{\perp} + te \in A\}, \quad s' = \sup\{t \in \mathbb{R} : x'_{\perp} + te \in A\}.$

Supposons avoir $s'-r \geqslant s-r'$ (le cas s'-r < s-r' se traite de même). Il vient

$$s' - r \geqslant \frac{1}{2}(s' - r) + \frac{1}{2}(s - r') = \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(s' - r')$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\ell(A \cap L_{e,x_{\perp}}) + \frac{1}{2}\ell(A \cap L_{e,x_{\perp}'})$$

Puisque $x \in S_e(A)$ et $|\langle x, e \rangle| = |x - x_{\perp}|$, on a $|\langle x, e \rangle| \leq \ell(A \cap L_{e,x_{\perp}})/2$. De la même manière, $|\langle x', e \rangle| \leq \ell(A \cap L_{e,x_{\perp}})/2$. On peut donc écrire

$$s' - r \geqslant |\langle x, e \rangle| + |\langle x', e \rangle| \geqslant ||\langle x, e \rangle| - |\langle x', e \rangle||,$$

ce qui donne

$$(\operatorname{diam}(S_{e}(A) - \varepsilon)^{2} \leq |x - x'|^{2} = |x_{\perp} - x'_{\perp}|^{2} + |\langle x, e \rangle - \langle x', e \rangle|^{2}$$
$$\leq |x_{\perp} - x'_{\perp}|^{2} + |s' - r|^{2}$$
$$\leq |(x_{\perp} + re) - (x'_{\perp} + s'e)|^{2} \leq \operatorname{diam}^{2}(A)$$

puisque $x_{\perp} + re$ et $x'_{\perp} + s'e$ sont des points de A. On a donc ainsi obtenu l'inégalité sur les diamètres.

Pour la seconde inégalité, vu que la mesure de Lebesgue est invariante par rotation, on peut supposer avoir $e=(0,\ldots,0,1)$, de sorte que $P_e=\mathbb{R}^{d-1}$. L'application

$$f: \mathbb{R}^{d-1} \to [0, \infty[\quad x \mapsto \mathcal{L}(A \cap L_{e.x}))$$

est mesurable et $\mathcal{L}(A) = \int f dx$, vu le théorème de Funini. Puisque

$$S_e(A) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : -\frac{f(x)}{2} \leqslant t \leqslant \frac{f(x)}{2}\} \setminus \{(x,0) : A \cap L_{e,x} = \varnothing\},$$

le lemme précédent montre que $S_e(A)$ est mesurable et on a finalement

$$\mathcal{L}(S_e(A)) = \int f dx = \mathcal{L}(A),$$

comme il devait être montré.

Remarque 4.2.4. Pour prouver l'inégalité isodiamétrique et le fait que \mathcal{L} sur \mathbb{R}^d est égal à la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^d à une constante multiplicative près (théorème 6.2.23), nous n'avons besoin que de la seconde partie du résultat lorsque e est un vecteur de base, i.e. un vecteur de la forme $[e]_k = \delta_{k,j}$ pour un $j \in \{1, \ldots, d\}$. L'invariance par rotation n'est donc pas nécessaire. Qui plus est, puisque \mathcal{H}^d est trivialement invariant par rotation, cela prouve que \mathcal{L} l'est également.

Théorème 4.2.5 (inégalité isodiamétrique). Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d , on a

$$\mathcal{L}^*(A) \leqslant \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^d \mathcal{L}(B),$$

où B est la boule (fermée) centrée à l'origine et de rayon unité.

Démonstration. On peut bie sûr supposer que A est de diamètre fini. Pour $k \in \{1, \ldots, d\}$, soit $e_k \in \mathbb{R}^d$ le k-ième vecteur unité, i.e. $[e_k]_j = \delta_{j,k}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$ et posons

$$A_1 = S_{e_1}(A)$$
 et $A_k = S_{e_k}(A_{k-1}),$

pour tout $k \in \{2, \ldots, d\}$, pour définir $A^* = A_d$. Montrons que A_k est symétrique par rapport à P_{e_1}, \ldots, P_{e_k} . C'est évidemment vrai pour k = 1; supposons que A_k avoir montré la symétrie de A_k . Il est clair que A_{k+1} est symétrique par rapport à $P_{e_{k+1}}$. Pour $j \in \{1, \ldots, k\}$, soit R_j la réflexion orthogonale par rapport à P_{e_j} . Pour $x \in P_{e_{k+1}}$, puisque $R_j(A_k) = A_k$ par hypothèse de récurrence,

$$\ell(A_k \cap L_{e_{k+1},x}) = \ell(A_k \cap L_{e_{k+1},S_i(x)}),$$

ce qui permet d'affirmer que l'on a

$$\ell(\{t: x + te_{k+1} \in A_{k+1}\}) = \ell(\{t: S_j(x) + te_{k+1} \in A_{k+1}\})$$

et donc $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$. En conséquence, A^* est symétrique par rapport à P_{e_k} pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$ et donc par rapport à l'origine. Qui plus est, le processus de symétrisation implique que l'on a diam $(A^*) \leq \text{diam}(A)$ et $\mathcal{L}(A^*) = \mathcal{L}(A)$.

Pour tout x de A^* , on a $-x \in A^*$ et donc $2|x| \leq \operatorname{diam}(A^*)$, ce qui prouve que l'on a

$$A^* \subset \frac{\operatorname{diam}(A^*)}{2} B$$

et donc

$$\mathcal{L}^*(A^*) \leqslant \mathcal{L}(\frac{\operatorname{diam}(A^*)}{2}B) = (\frac{\operatorname{diam}(A^*)}{2})^d \mathcal{L}(B).$$

Maintenant, \bar{A} est mesurable et

$$\mathcal{L}^*(A) \leqslant \mathcal{L}(\bar{A}) = \mathcal{L}((\bar{A})^*) \leqslant (\frac{\operatorname{diam}((\bar{A})^*)}{2})^d \mathcal{L}(B)$$
$$\leqslant (\frac{\operatorname{diam}(\bar{A})}{2})^d \mathcal{L}(B) = (\frac{\operatorname{diam}(A)}{2})^d \mathcal{L}(B),$$

ce qui suffit.

Inégalité isodiamétrique via l'inégalité de Brunn-Minkowski

Notre but ici est de montrer que la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable A est inférieure à celle de la boule euclidienne de même diamètre que A. Pour ce faire, nous utiliserons l'inégalité de Brunn-Minkowski. Nous aurons besoin de quelques résultats classique d'intégration qui seront démontrés dans la suite.

Lemme 4.2.6. Si A et B sont deux ensembles mesurables non vides de \mathbb{R} tels que A+B est mesurable, alors

$$\mathcal{L}(A+B) \geqslant \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B).$$

 $D\acute{e}monstration$. Supposons d'abord que A et B sont compacts. Quitte à translater A et B par des nombres (éventuellements distincts), on peut supposer avoir

$$\sup A = \inf B = 0.$$

En effet, les translations préservent la mesure de Lebesgue (et si A est translaté de x et B de x', A+B est translaté de x+x'). On a donc $A \cap B = \{0\}$ et $A+B \supset A \cup B$. De là,

$$\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(A \cup B) \leqslant \mathcal{L}(A + B),$$

ce qui suffit lorsque A et B sont compacts.

Supposons maintenant que A et B sont de mesure finie. Soit $\varepsilon > 0$ et K, K' deux compacts inclus dans A et B respectivement pour lesquels on a

$$\mathcal{L}(A) < \mathcal{L}(K) + \varepsilon/2$$
 et $\mathcal{L}(B) < \mathcal{L}(K') + \varepsilon/2$.

Il vient alors

$$\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) < \mathcal{L}(K) + \mathcal{L}(K') + \varepsilon \leqslant \mathcal{L}(K + K') + \varepsilon \leqslant \mathcal{L}(A + B) + \varepsilon$$

ce qui suffit dans ce cas.

Enfin, si par exemple A est de mesure infinie, A+B contient un translaté de A et est donc également de mesure finie.

Proposition 4.2.7 (inégalité de Prekopa-Leindler). Soit $\theta \in [0,1]$ et $f,g,h: \mathbb{R}^d \to [0,\infty[$ des fonctions mesurables telles que

$$h(\theta x + (1 - \theta)x') \geqslant f^{\theta}(x)g^{1-\theta}(x'),$$

pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$. On a

$$\int h \, dx \geqslant (\int f \, dx)^{\theta} (\int g \, dx)^{1-\theta}.$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas d=1 et supposons dans un premier temps que f et g sont bornés. Sans restriction, on peut en outre supposer avoir $||f||_{\infty} = ||g||_{\infty} = 1$. Pour $t \in [0,1[$, si x et x' vérifient f(x) > t et g(x') > t, on a $h(\theta x + (1-\theta)x') > t$ par hypothèse et le lemme 4.2.6 appliqué à $A = \{x : f(x) > t\}$ et $B = \{x : g(x) > t\}$, permet d'écrire,

$$\mathcal{L}(x:h(x)>t) \geqslant \mathcal{L}(\theta A + (1-\theta)B) \geqslant \theta \mathcal{L}(A) + (1-\theta)\mathcal{L}(B).$$

De là, en utilisant le principe de Cavalieri, on obtient

$$\int h \, dx \geqslant \int_0^1 \mathcal{L}(\{x : h(x) > t\}) \, dt$$

$$\geqslant \theta \int_0^1 \mathcal{L}(\{x : f(x) > t\}) \, dt + (1 - \theta) \int_0^1 \mathcal{L}(\{x : g(x) > t\}) \, dt$$

$$= \theta \int f \, dx + (1 - \theta) \int g \, dx$$

$$\geqslant (\int f \, dx)^{\theta} (\int g \, dx)^{1 - \theta},$$

grâce à l'inégalité arithmético-géométrique.

Pour le cas général (lorsque d=1), posons, pour $k \in \mathbb{N}_0$,

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et définissons g_k de manière analogue. Puisque $f_k \leqslant f$ et $g_k \leqslant g$, les hypothèses sont satisfaites pour f_k et g_k . On a donc

$$\int h \, dx \geqslant (\int f_k \, dx)^{\theta} (\int g_k \, dx)^{1-\theta}.$$

et le théorème de la convergence monotone permet de conclure.

Supposons maintenant avoir prouvé le résultat pour d-1 ($d \ge 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, définissons les fonctions suivantes sur \mathbb{R}^{d-1} :

$$f_t(x) = f(x,t), \quad g_t(x) = g(x,t) \quad \text{et} \quad h_t(x) = h(x,t),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^{d-1}$. Par le théorème de Fubuni, ces fonctions sont mesurables pour presque tout t. Par hypothèse, pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $t = \theta t_1 + (1 - \theta)t_2$ et tous $x, x' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$h_t(\theta x + (1 - \theta)x') \geqslant f_{t_1}(x)^{\theta} + g_{t_2}(x')^{1 - \theta}.$$

L'hypothèse de récurrence fournit alors la relation

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} h_t(x) \, dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_{t_1}(x) \, dx \right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} g_{t_2}(x) \, dx \right)^{1-\theta}.$$

Considérons maintenant les trois fonctions

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_t(x) dx, \quad t \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g_t(x) dx \quad \text{et} \quad t \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d-1}} h_t(x) dx;$$

l'inégalité pour d=1 permet d'écrire, grâce au théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} h_t(x) \, dx \right) dt$$

$$\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_t(x) \, dx \right) dt \right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} g_t(x) \, dx \right) dt \right)^{1-\theta}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \, dx \right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g \, dx \right)^{1-\theta},$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque 4.2.8. Sous les hypothèses du théorème précédent, on a $||h||_1 \ge ||f||_1^{\theta} ||g||_1^{1-\theta}$.

Théorème 4.2.9 (inégalité de Brunn-Minkowski). Si A et B sont deux ensembles mesurables non vides de \mathbb{R}^d tels que A+B est mesurable, alors

$$\mathcal{L}(A+B)^{1/d} \geqslant \mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d}.$$

Démonstration. Il nous reste à établir ce résultat lorsque $d \ge 2$. Tout comme dans le cas d = 1, on peut supposer que A et B sont de mesure finie. Soit $\theta \in [0, 1[$ et si A' et B' sont deux parties mesurables de \mathbb{R}^d de mesure finie, soit

$$f = \chi_{A'}, \quad g = \chi_{B'} \quad \text{et} \quad h = \chi_{\theta A' + (1-\theta)B'}.$$

L'inégalité de Prekopa-Leindler permet d'écrire

$$\mathcal{L}(\theta A' + (1 - \theta)B') \geqslant \mathcal{L}(A')^{\theta} + \mathcal{L}(B')^{1 - \theta}$$

Posons

$$A' = \frac{1}{\mathcal{L}(A)^{1/d}}$$
 et $B' = \frac{1}{\mathcal{L}(b)^{1/d}}$

pour avoir

$$\mathcal{L}(\theta A' + (1 - \theta)B') \geqslant 1. \tag{4.7}$$

Maintenant, en posant

$$\theta = \frac{\mathcal{L}(A)^{1/d}}{\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d}},$$

on constate que

$$\theta A' + (1 - \theta)B' = \frac{1}{\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d}} (A + B),$$

de sorte que l'inégalité (4.7) donne lieu à

$$\mathcal{L}(A+B) \geqslant (\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d})^d$$

Voici une preuve plus directe, ne faisant pas intervenir l'inégalité de Prekopa-Leindler.

Démonstration. Supposons d'abord que A et B sont deux intervalles compacts de \mathbb{R}^d . Supposons avoir $A = \prod_{k=1}^d [a_k, b_k]$ et $B = \prod_{k=1}^d [c_k, d_k]$; bien sûr, on a $A + B = \prod_{k=1}^d [a_k + c_k, b_k + d_k]$. Soit $u_k = b_k - a_k$ et $v_k = d_k - c_k$; l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique fournit directement

$$(\prod_{k=1}^d \frac{u_k}{u_k + v_k})^{1/d} + (\prod_{k=1}^d \frac{v_k}{u_k + v_k})^{1/d} \leqslant \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \frac{u_k}{u_k + v_k} + \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \frac{v_k}{u_k + v_k} = 1.$$

En multipliant chaque membre par $(\prod_{k=1}^d u_k + v_k)^{1/d}$, on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^{d} u_k\right)^{1/d} + \left(\prod_{k=1}^{d} v_k\right)^{1/d} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{d} u_k + v_k\right)^{1/d}$$

et donc $\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d} \leqslant \mathcal{L}(A+B)^{1/d}$.

Supposons maintenant que A et B sont une union finie d'intervalles. On peut supposer que soit A, soit B est constitué d'au moins deux intervalles; supposons sans restriction qu'il s'agit de A. Soit $k \in \{1, \ldots, d\}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $A_1 = A \cap \{x : [x]_k \geqslant t_0\}$ et $A_2 = A \cap \{x : [x]_k \leqslant t_0\}$ contiennent chacun un des intervalles de A. Posons alors $B_1(t) = B \cap \{x : [x]_k \geqslant t\}$ et $B_2(t) = B \cap \{x : [x]_k \leqslant t\}$. L'application

$$f: t \mapsto \frac{\mathcal{L}(B_1(t))}{\mathcal{L}(B)}$$

est continue sur \mathbb{R} , vu la continuité des mesures. Qui plus est, puisque $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence d'un nombre s tel que

$$\frac{\mathcal{L}(A_1)}{\mathcal{L}(A)} = \frac{\mathcal{L}(B_1(s))}{\mathcal{L}(B)}.$$

Posons $B_1 = B_1(s)$ et $B_2 = B_2(s)$; vu ce qui a été obtenu précédemment, on a

$$\mathcal{L}(A_k + B_K) \geqslant (\mathcal{L}(A_k)^{1/d} + \mathcal{L}(B_k)^{1/d})^d = \left(\mathcal{L}(A_k)^{1/d} + (\mathcal{L}(B)\frac{\mathcal{L}(A_k)}{\mathcal{L}(A)})^{1/d}\right)^d$$
$$\geqslant \frac{\mathcal{L}(A_k)}{\mathcal{L}(A)}(\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d})^d,$$

pour $k \in \{1, 2\}$. Puisque $A + B \supset (A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2)$, il vient

$$\mathcal{L}(A+B) \geqslant \mathcal{L}(A_1+B_1) + \mathcal{L}(A_2+B_2) \geqslant (\frac{\mathcal{L}(A_1)}{\mathcal{L}(A)} + \frac{\mathcal{L}(A_2)}{\mathcal{L}(A)})(\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d})^d$$

= $(\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d})^d$.

Considérons à présent le cas où A et B sont compacts. Soit $(R_k)_k$ et $(R'_k)_k$ des recouvrements par des intervalles de A et B respectivement. On peut supposer ces recouvrements finis. Posons $R = \bigcup_k R_k$ et $R' = \bigcup_k R'_k$. Nous pouvons affirmer avoir

$$\mathcal{L}(R+R')^{1/d} \geqslant \mathcal{L}(R)^{1/d} + \mathcal{L}(R')^{1/d}$$

et donc

$$\mathcal{L}(R+R')^{1/d} \geqslant \mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d},$$

ce qui suffit.

Considérons enfin le cas général. Si A ou B n'est pas de mesure finie, A+B contenant des translatés de A et B, il n'est pas non plus de mesure finie. Dans ce cas, la formule est donc trivialement vérifiée. Supposons que A et B sont de mesure finie et, étant donné $\alpha>1$, soit K et K' deux compact inclus dans A et B respectivement tels que

$$\mathcal{L}(A) < \alpha^d \mathcal{L}(K)$$
 et $\mathcal{L}(B) < \alpha^d \mathcal{L}(K')$

On a

$$\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d} < (\alpha^{d} \mathcal{L}(K))^{1/d} + (\alpha^{d} \mathcal{L}(K'))^{1/d} = \alpha(\mathcal{L}(K)^{1/d} + \mathcal{L}(K)^{1/d})$$

$$\leq \alpha \mathcal{L}(K + K')^{1/d} \leq \alpha \mathcal{L}(A + B)^{1/d}.$$

On peut conclure en faisant tendre α vers 1.

Remarque 4.2.10. Sous les hypothèse de l'énoncé précédent, nous avons montré que l'on a

$$\mathcal{L}(A+B) \geqslant (\mathcal{L}(A)^{1/d} + \mathcal{L}(B)^{1/d})^d \geqslant \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B).$$

Théorème 4.2.11 (inégalité isodiamétrique). Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d , on a

$$\mathcal{L}^*(A) \leqslant \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^d \mathcal{L}(B),$$

où B est la boule (fermée) centrée à l'origine et de rayon unité.

Démonstration. Supposons d'abord que A est un compact de \mathbb{R}^n . L'inégalité de Brunn-Minkowski appliquée à $\frac{1}{2}A$ et $-\frac{1}{2}A$ permet d'affirmer que l'on a

$$\mathcal{L}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A)^{1/d} \geqslant \mathcal{L}(\frac{1}{2}A)^{1/d} + \mathcal{L}(-\frac{1}{2}A)^{1/d} = \mathcal{L}(\frac{1}{2}A)^{1/d} + \mathcal{L}(\frac{1}{2}A)^{1/d} = \mathcal{L}(A)^{1/d},$$

et donc

$$\mathcal{L}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A) \geqslant \mathcal{L}(A).$$

Majorons le diamètre de $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A$. Si x et x' sont deux points de $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A$, soit x_1, x_2, x_1', x_2' des points de A tels que $x = (x_1 - x_2)/2$ et $x' = (x_1' - x_2')/2$. Il vient alors

$$|x - x'| = \frac{1}{2}(|x_1 - x_2 - (x_1' - x_2')| \le \frac{1}{2}(|x_1 - x_2| + |x_1' - x_2'|) \le \operatorname{diam}(A).$$

De plus, puisque $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A$ est symétrique par rapport à l'origine, il est inclus dans la boule fermée B' centrée à l'origine et de rayon diam(A)/2. On a donc

$$\mathcal{L}(A) \leqslant \mathcal{L}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A) \leqslant \mathcal{L}(B') = (\frac{\operatorname{diam}(A)}{2})^d \mathcal{L}(B).$$

Pour le cas général, on peut bien sûr supposer que le diamètre de A est fini. Ainsi, \bar{A} est compact, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{L}^*(A) \leqslant \mathcal{L}(\bar{A}) \leqslant \left(\frac{\operatorname{diam}(\bar{A})}{2}\right)^d \mathcal{L}(B),$$

ce qui suffit, puisque diam $(\bar{A}) = \text{diam}(A)$.

4.3 L'intégrale de Lebesgue en pratique

Rappels de quelques résultats théoriques

Pour la mesure de Lebesgue, rappelons quelques théorèmes obtenus dans le cadre général. Commençons par les théorèmes de Lebesgue et Levi.

Théorème 4.3.1. Si $(f_k)_k$ est une suite de fonctions mesurables sur un intervalle I qui converge presque partout vers f et s'il existe une fonction g intégrable sur I telle que $|f_k| \leq g$ presque partout pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors f est intégrable et la suite $(\int_I |f - f_k| dx)_k$ tend vers g. En particulier, on g

$$\lim_{k} \int_{I} f_{k} \, dx = \int_{I} f \, dx.$$

Théorème 4.3.2. Si la suite $(f_k)_k$ de fonctions réelles presque partout et intégrables sur un intervalle I est croissante (i.e. telle que $f_k \leq f_{k+1}$) presque partout et si la suite $(\int_I f_k dx)_k$ est majorée, alors la suite $(f_k)_k$ converge presque partout vers une fonction f intégrable sur I et la suite $(\int_I |f - f_k| dx)_k$ converge vers 0. En particulier, on a

$$\lim_{k} \int_{I} f_{k} \, dx = \int_{I} f \, dx.$$

Il existe bien entendu un énoncé similaire si la suite est décoissante avec la suite des intégrales minorée.

Soit n un nombre entier strictement supérieur à 1, n' un nombre entier non nul strictement inférieur à n et n'' = n - n'. Si π est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x' = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n')})$$
 et $x'' = (x_{\pi(n'+1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$

De cette manière, on peut écrire x=(x',x'') et si f est une fonction définie en x, on pose f(x',x'')=f(x). Si E est une partie de \mathbb{R}^n et x' un point de $\mathbb{R}^{n'}$, considérons la projection

$$E_{x'} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n''} : (x', x'') \in E\}.$$

De même, si x'' est un point de $\mathbb{R}^{n''}$, on pose

$$E^{x''} = \{x' \in \mathbb{R}^{n'} : (x', x'') \in E\}.$$

Il s'agit de parties de $\mathbb{R}^{n''}$ et de $\mathbb{R}^{n'}$ respectivement. Enfin, il est naturel d'écrire

$$E_{\mathbb{R}^{n'}} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n''} : \text{ il existe } x' \in \mathbb{R}^{n'} \text{ tel que } (x', x'') \in E\}$$

et

$$E^{\mathbb{R}^{n''}} = \{ x' \in \mathbb{R}^{n'} : \text{ il existe } x'' \in \mathbb{R}^{n''} \text{ tel que } (x', x'') \in E \}.$$

Si f est une fonction définie sur E, pour x'' fixé, on peut ainsi considérer la fonction

$$f(\cdot, x''): E^{x''} \to \mathbb{C} \quad x' \mapsto f(x', x'').$$

De même, pour x' fixé, la fonction

$$f(x',\cdot): E_{x'} \to \mathbb{C} \quad x'' \mapsto f(x',x'')$$

est bien définie.

Présentons maintenant les théorèmes de Fubini et Tonelli.

Théorème 4.3.3. Si f est une fonction intégrable sur E, alors pour presque tout x'' appartenant à $E_{\mathbb{R}^{n'}}$, $x' \mapsto f(x', x'')$ est intégrable sur $E^{x''}$, $x'' \mapsto \int_{E^{x''}} f(x', x'') dx'$ est intégrable sur $E_{\mathbb{R}^{n'}}$ et

$$\int_E f \, dx = \int_{E_{\mathbb{R}^{n'}}} \int_{E^{x''}} f(x', x'') dx' dx''.$$

Théorème 4.3.4. Si f est une fonction mesurable sur une partie E de \mathbb{R}^n telle que $|f(\cdot, x'')|$ est intégrable sur $E^{x''}$ pour presque tout $x'' \in E_{\mathbb{R}^{n'}}$ et si

$$x'' \mapsto \int_{Ex''} |f(x', x'')| dx'$$

est intégrable sur $E_{\mathbb{R}^{n'}}$, alors f est intégrable sur E.

Corollaire 4.3.5. Si g est une fonction intégrable sur $A \subset \mathbb{R}^{n'}$ et h une fonction intégrable sur $B \subset \mathbb{R}^{n''}$, alors la fonction f définie par

$$f: A \times B \to \mathbb{C}$$
 $(x,y) \mapsto g(x)h(y)$

est intégrable sur $A \times B$.

Matrices jacobiennes, jacobiens et changement de variable

Définition 4.3.6. Soit x(x') un changement de variable (CVR) d'ordre $p \ge 1$ entre les ouverts U et U' de \mathbb{R}^n . Les matrices jacobiennes qui lui sont associées sont les matrices

$$\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right) = \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(x'_1, \dots, x'_n)}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right) = \left(\frac{\partial(x'_1, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right)$$

dont les éléments sont donnés par

$$\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)_{j,k} = D_{x'_k} x_j(x') \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right)_{j,k} = D_{x_k} x'_j(x)$$

respectivement, avec $j,k \in \{1,\ldots,n\}$. Les jacobiens qui lui sont associés sont donnés par $\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)$ et $\det\left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right)$; il s'agit donc d'éléments de $C^{p-1}(U')$ et $C^{p-1}(U)$ respectivement.

Les matrices jacobiennes et jacobiens jouissent des propriétés suivantes.

Proposition 4.3.7. Les matrices jacobiennes du changement de variable identité sur l'ouvert U de \mathbb{R}^n coïncident avec la matrice identité sur U, diag (χ_U, \ldots, χ_U) et leurs jacobiens avec la fonction χ_U .

Proposition 4.3.8. Si x(x') et x'(x'') sont deux CVR d'ordre p entre les ouverts U et U' d'une part et U' et U'' d'autre part, leur composition x(x'(x'')) est un CVR d'ordre p entre U et U'' de matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x'')}\right) = \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)_{x'(x'')} \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x'')}\right).$$

Démonstration. Nous savons déjà que x(x'(x'')) est un CVR d'ordre p entre U et U''. La description de la matrice jacobienne résulte aussitôt du théorème de dérivation des fonctions composées. De fait, il vient

$$D_k x_j(x'(x'')) = \sum_{l=1}^n [D_l x_j(x')]_{x'(x'')} D_k x_l'(x''),$$

ce qui suffit.

Le changement de variable x(x'(x'')) de la proposition précédente est en général simplement noté x(x'').

Proposition 4.3.9. Si x(x') est un CVR d'ordre p entre les ouverts U et U' de \mathbb{R}^n , on a

$$\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right) = \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right)_{x(x')}^{-1} \qquad et \qquad \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right) = \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)_{x'(x)}^{-1}.$$

De plus, les jacobiens sont liés par les relations

$$\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)\det\left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right)_{x(x')} = \chi_{U'} \qquad et \qquad \det\left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right)\det\left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)_{x'(x)} = \chi_{U}.$$

En particulier, les jacobiens ne s'annulent pas.

Démonstration. Cela résulte aussitôt des deux propositions précédentes appliquée à la composition des changements de variables x(x') et x'(x). En effet, x(x) = x(x'(x)) est alors le changement de variable identité sur U et x'(x(x')) le changement de variable identité sur U'.

Enfin, rappelons le théorème du changement de variable.

Théorème 4.3.10. Si x(x') est un CVR d'ordre $p \ge 1$ entre les ouverts U et U' de \mathbb{R}^n , alors f est intégrable sur U si et seulement si

$$f(x(x')) \mid \det \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right) \mid$$

est intégrable sur U', auquel cas, on a

$$\int_{U} f \, dx = \int_{U'} f(x(x')) \, | \det \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right) | \, dx'.$$

Remarquons directement que ce résultat implique celui obtenu pour l'intégrale de Darboux. Si on a Dx' > 0, la fonction x' est strictement croissante et si I =]a, b[, il vient

$$\int_{a}^{b} f \, dx = \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x)) |Dx'(x)| \, dx = \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x)) \, Dx'(x) dx.$$

Si Dx' < 0, x' est strictement décroissant et on peut écrire, avec les mêmes notations,

$$\int_{a}^{b} f \, dx = \int_{x'^{-1}(b)}^{x'^{-1}(a)} f(x'(x)) |Dx'(x)| \, dx = \int_{x'^{-1}(a)}^{x'^{-1}(b)} f(x'(x)) \, Dx'(x) dx.$$

Exemples basiques de calcul de mesure

Pour un ensemble mesurable E, posons $|E| = \mathcal{L}(E)$.

Exemple 4.3.11. Calculons par réduction la mesure du disque

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\},\$$

avec R > 0. L'ensemble étant compact, l'intégrabilité ne pose pas de problème. Bien entendu, on a $B_{\mathbb{R}} = [-R, R]$ et pour tout $y \in [-R, R]$,

$$B^y = [-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}].$$

On obtient dès lors

$$|B| = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - y^2} dy = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2(t) dt$$
$$= R^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi R^2,$$

grâce au changement de variable $x(t) = R\sin(t)$.

Exemple 4.3.12. Le cas de la boule de \mathbb{R}^3 se traite de même. Soit $B=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$, avec R>0. On a $B_{\mathbb{R}^2}=[-R,R]$ et pour tout $z\in[-R,R]$, $B^z=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\}$. Cet ensemble étant un disque de rayon $\sqrt{R^2-z^2}$, il vient

$$|B| = \int_{-R}^{R} (\int_{R^z} dx dy) dz = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Soit x un point de \mathbb{R}^n . Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{x\}$ est inclus dans I_{ε} , où I_{ε} est un intervalle de coté $\sqrt[n]{\varepsilon}$ contenant x. Dès lors, $|\{x\}|$ est majorée par ε , ce qui implique $|\{x\}| = 0$ pour tout point, i.e. un point de \mathbb{R}^n est négligeable. Soit l'hyperplan

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_n = 0\},\$$

avec n > 1 et considérons les n - 1 premières composantes. On a $H_{\mathbb{R}^{n-1}} = \{0\}$ (et $H^0 = \mathbb{R}^{n-1}$), ce qui implique |H| = 0.

Exercice 4.3.13. Établir que l'intégrale

$$\int_{]0,\infty[^2} e^{-y(1+x^2)} dx dy$$

est finie et obtenir sa valeur.

Suggestion: L'intégrand est continu et positif sur $E =]0, \infty[^2]$. Qui plus est, on a $E^{\mathbb{R}} =]0, \infty[$ et $E_x =]0, \infty[$, pour tout $x \in E^{\mathbb{R}}$. De là, pour un tel x, la fonction

$$y\mapsto e^{-y(1+x^2)}$$

est intégrable sur $]0,\infty[$ car elle est continue, positive sur cet intervalle et une de ses primitives, à savoir

$$-\frac{e^{-y(1+x^2)}}{1+x^2},$$

admet des limites finies aux bords de l'intervalle. Qui plus est, on a

$$\int_0^\infty e^{-y(1+x^2)} dy = \frac{1}{1+x^2}.$$

On vérifie directement que le membre de droite est intégrable sur $]0,\infty[$ et que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Les théorèmes de Tonelli et Fubini impliquent alors que l'intégrale de départ a un sens et est égale à $\pi/2$.

Permutation de l'ordre d'intégration

En pratique, on est parfois amené à calculer une intégrale sous forme réduite pour laquelle on ne peut appliquer les méthodes de calcul acquises ici. Dans ce cas, une permutation de l'ordre d'intégration peut s'avérer une stratégie payante; il s'agit simplement de considérer l'intégrale sous une autre forme réduite.

Exercice 4.3.14. Établir que, pour tout x > 0, la fonction $y \mapsto e^{-y}/y$ est intégrable sur $]x, \infty[$ et que la fonction

$$x \mapsto \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dy$$

est intégrable sur $]0,\infty[$. Enfin, obtenir la valeur de

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dy dx.$$

Suggestion: Le fonction $y \mapsto e^{-y}/y$ est continue sur $]0, \infty[$ et vérifie

$$\lim_{y \to \infty} y^2 \frac{e^{-y}}{y} = 0,$$

ce qui implique son intégrabilité sur $]x,\infty[$, pour tout x>0. Pour obtenir l'intégrabilité de $x\mapsto \int_x^\infty e^{-y}y^{-1}dy$, on peut appliquer les critères usuels, mais la méthode qui suit permet d'écourter les calculs. Soit $E=\{(x,y):0< x\leqslant y\}$. Pour tout $y>0,\,x\mapsto e^{-y}/y$ est intégrable sur]0,y] (il s'agit d'une fonction simple) et

$$\int_0^y \frac{e^{-y}}{y} dx = e^{-y}.$$

On vérifie alors directement que la fonction $y\mapsto e^{-y}$ est intégrable sur $]0,\infty[$. Par le théorème de Tonelli, $(x,y)\mapsto e^{-y}/y$ est intégrable sur E. Par le théorème de Fubini, on obtient alors l'intégrabilité de $y\mapsto e^{-y}/y$ sur $]x,\infty[$ pour presque tout x>0 (ce que nous savions déjà), l'intégrabilité de $x\mapsto \int_x^\infty e^{-y}y^{-1}dy$ sur $]0,\infty[$ et

$$\int_{0}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} \, dy dx = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{y} \frac{e^{-y}}{y} \, dx dy = \int_{0}^{\infty} e^{-y} \, dy = 1.$$

Exercice 4.3.15. Soit R > 0; permuter l'ordre d'intégration dans

$$\int_0^{2R} \int_{\sqrt{2Rx}-x^2}^{\sqrt{2Rx}} f(x,y) \, dy dx.$$

Suggestion: Remarquons qu'il s'agit là de la réduction de $\int_E f dx dy$, où la projection de E sur l'axe des x est]0, 2R[et où, pour tout x appartenant à cet intervalle, la section de E en x vaut $]\sqrt{2Rx-x^2}, \sqrt{2Rx}[$. Or,

$$\{(x, \sqrt{2Rx - x^2}) : x \in]0, 2R[\}$$

est une partie de la circonférence d'équation $x^2+y^2-2Rx=0$, c'est-à-dire la circonférence de centre (R,0) et de rayon R. De même,

$$\{(x, \sqrt{2Rx}) : x \in]0, 2R[\}$$

est une partie de la parabole $2Rx = y^2$. De là $E_{\mathbb{R}} =]0, 2R[$ et

$$E^{y} = \begin{cases} \left[\frac{y^{2}}{2R}, R - \sqrt{R^{2} - y^{2}} \right] \cup \left[R + \sqrt{R^{2} - y^{2}}, 2R \right] & \text{si } 0 < y < R \\ \left[\frac{y^{2}}{2R}, 2R \right] & \text{si } R \leqslant y < 2R \end{cases}$$

Une autre manière de procéder consiste à écrire

$$E_{\mathbb{R}} = \bigcup_{0 \le x \le 2R} [\sqrt{2Rx - x^2}, \sqrt{2Rx}],$$

pour pouvoir obtenir, grâce à une étude des fonctions $\sqrt{2Rx - x^2}$ et $\sqrt{2Rx}$, $E_{\mathbb{R}} =]0, 2R[$. Pour déterminer E^y , soit $y \in]0, 2R[$ et considérons le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 2R \\ \sqrt{2Rx - x^2} < y < \sqrt{2Rx} \end{array} \right.$$

par rapport à x. Vu la règle régissant le signe d'un trinôme du second degré, l'inégalité $x^2-2Rx+y^2>0$ est vérifiée pour tout x lorsque R< y<2R et pour x appartenant à

$$]-\infty, R-\sqrt{R^2-y^2}[\ \cup\]R+\sqrt{R^2-y^2}, \infty[,$$

lorsque 0 < y < R. Pour $y \in]0, R[$, il faut donc résoudre le système d'inéquations

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 2R \\ x < R - \sqrt{R^2 - y^2} \text{ ou } x > R + \sqrt{R^2 - y^2} \\ \frac{y^2}{2R} < x \end{array} \right. ,$$

ce qui donne

$$E^{y} = \frac{y^{2}}{2R}, R - \sqrt{R^{2} - y^{2}} [\cup] R + \sqrt{R^{2} - y^{2}}, 2R[$$

Pour $y \in]R, 2R[$, c'est le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 2R \\ \frac{y^2}{2R} < x \end{array} \right.,$$

qu'il faut considérer pour obtenir

$$E^y =]\frac{y^2}{2R}, 2R[.$$

Au total, on obtient

$$\int_{0}^{2R} \int_{\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx}} f(x,y) \, dy dx = \int_{0}^{R} \int_{y^2/(2R)}^{R-\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y) \, dx dy$$
$$+ \int_{0}^{R} \int_{R+\sqrt{R^2-y^2}}^{2R} f(x,y) \, dx dy$$
$$+ \int_{R}^{2R} \int_{y^2/(2R)}^{2R} f(x,y) \, dx dy.$$

Remarquons que, dans le calcul de $\int_E f \, dx dy$ par réduction ou par permutation de l'ordre d'intégration, il est essentiel que la fonction f soit intégrable sur E. En particulier, il n'est pas suffisant d'imposer l'intégrabilité de f sur E^y pour presque tout $y \in E_{\mathbb{R}^{n'}}$ et l'intgrabilité de $\int_{E^y} f \, dx$ sur $E_{\mathbb{R}^{n'}}$ (sauf bien sûr si f est une fonction positive, auquel cas f est intégrable sur E, par application du théorème de Tonelli).

Remarque 4.3.16. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Sur son domaine de définition, on a

$$f(x,y) = D_x \frac{-x}{x^2 + y^2} = D_y \frac{y}{x^2 + y^2}$$

et $f(\cdot, y)$ est intégrable sur]0,1[pour tout $y \in]0,1[$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

Cette fonction est intégrable sur [0, 1] et il vient

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

De la même manière, on vérifie que $f(x,\cdot)$ est intégrable sur]0,1[pour tout $x\in]0,1[$, avec

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Puisque cette fonction est intégrable sur [0, 1[, on peut écrire

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Dans ce cas, on ne peut donc permuter les intégrales. La raison en est simple : f n'est pas intégrable sur $]0,1[^2]$. Montrons que l'intégrale $\int_{]0,1[^2]} |f| \, dx dy$ n'est pas finie. Si c'était le cas, l'intégrale pourrait être réduite. Or, pour tout $x \in]0,1[$, on trouve aisément

$$\int_0^1 |f(x,y)| \, dy = \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy + \int_x^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy$$
$$= \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_0^x - \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_x^1$$
$$= \frac{1}{2x} - \frac{1}{1 + x^2}.$$

On peut conclure, cette fonction n'étant pas intégrable sur]0,1[.

Exemples de changement de variable

Si A est une matrice réelle non-singulière de type $n \times n$ et si a est un point de \mathbb{R}^n , x = Ax' + a est un CVR d'ordre infini entre \mathbb{R}^n et lui-même. Une fonction f est donc intégrable sur \mathbb{R}^n si et seulement si $|\det A| f(A \cdot +a)$ l'est, auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + a) \, dx.$$

Il s'ensuit que si E est une partie intégrable de \mathbb{R}^n , alors AE + a également et

$$|AE + a| = \int \chi_{AE+a}(x) \, dx = \int \chi_{AE+a}(Ax' + a) |\det A| \, dx'$$
$$= |\det A| \int \chi_{E}(x') \, dx' = |\det A| \, |E|.$$

En particulier,

- les translations préservent l'intégrabilité et la mesure d'un ensemble,
- les rotations préservent l'intégrabilité et la mesure d'un ensemble.

En conséquence, tout hyperplan de l'espace euclidien est négligeable : cela découle des considérations qui précèdent et de $|\{x: x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}| = 0$ (on peut aussi obtenir ce résultat par induction, en réduisant l'intégrale).

Envisageons le passage aux coordonnées polaires dans le plan. Il nous faut donc considérer le CVR

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

d'ordre infini entre

$$U_{\theta_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0)) : r \geqslant 0 \}$$
 et $U'_{\theta_0} =]0, \infty[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$

 θ_0 étant un nombre quelconque. Le module du jacobien vaut

$$\left| \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right) \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{array} \right| = r.$$

Une demi-droite étant une partie négligeable de \mathbb{R}^2 , U_{θ_0} est égal presque partout à \mathbb{R}^2 et le théorème du changement de variable permet d'affirmer qu'une fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $(r,\theta)\mapsto rf(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$ est intégrable sur U'_{θ_0} , auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, dx dy = \int_0^\infty \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} r f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, d\theta dr.$$

Exemple 4.3.17. Comme application, considérons le disque de rayon R > 0, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Cet ensemble est égal presque partout à

$$\{(x,y): x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{(x,0): x \geqslant 0\}$$

et un passage en coordonnées polaires transforme cet ensemble en l'intervalle $]0, R[\times]0, 2\pi[$. On a donc

$$|B| = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\theta dr = \pi R^2,$$

comme attendu.

Exemple 4.3.18. Calculons la mesure de l'ellipse

$$E_{a,b} = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\},$$

avec a,b>0. Cet ensemble étant compact, il est intégrable. Avec le changement de variable linéaire

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & b \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}\right),$$

l'ellipse devient

$$B_1 = \{(x', y') : x'^2 + y'^2 \le 1\},\$$

c'est-à-dire le disque centré à l'origine et de rayon unité. On a donc

$$|E_{a,b}| = \int_{B_1} ab \, dx' dy' = \pi ab.$$

Remarquons que l'on peut combiner le changement de variable linéaire et le passage aux coordonnées polaires en considérant directement le CVR

$$\begin{cases} x = ar\cos(\theta) \\ y = br\sin(\theta) \end{cases}.$$

Exercice 4.3.19. Étant donné $\gamma > 1$, $0 < c_1 < c_2$ et $0 < c_1' < c_2'$, calculer la mesure de l'ensemble

$$A = \{(v, p) : c_1 \leq pv \leq c_2, \ c'_1 \leq pv^{\gamma} \leq c'_2\}.$$

On vérifie d'abord que

$$\begin{cases} pv = x \\ pv^{\gamma} = y \end{cases}$$

est un CVR d'ordre infini entre $]0,\infty[^2$ et lui-même, qui s'inverse en

$$\begin{cases} v = (y/x)^{1/(\gamma-1)} \\ p = x^{\gamma/(\gamma-1)}y^{-1/(\gamma-1)} \end{cases}$$

Ce CVR transforme A en $[c_1, c_2] \times [c'_1, c'_2]$. De plus, on a

$$\left| \left(\frac{\partial(p,v)}{\partial(x,y)} \right) \right| = \left| \left[\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,v)} \right) \right]_{(p(x,y),v(x,y))} \right|^{-1} = \frac{1}{(\gamma-1)y},$$

ce qui permet d'écrire

$$|A| = \int_{c_1}^{c_2} \int_{c_1'}^{c_2'} \frac{dydx}{(\gamma - 1)y} = \frac{c_2 - c_1}{\gamma - 1} \ln(c_2'/c_1').$$

Une application directe du passage aux coordonnées polaires est l'intégrale d'Euler-Poisson.

Proposition 4.3.20. Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Démonstration. On vérifie trivialement que $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ est une fonction continue, positive et intégrable sur $]0, \infty[$. Le théorème de Tonelli permet alors d'affirmer que la fonction

$$(x,y) \mapsto f(x)f(y) = e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

est intégrable sur $]0,\infty[^2]$. Un passage aux coordonnées polaires procure les égalités

$$\begin{split} (\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} \, dx)^2 &= \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} \, dx \int_0^\infty e^{-\lambda y^2} \, dy \\ &= \int_{]0,\infty[^2} e^{-\lambda (x^2 + y^2)} \, dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r e^{-\lambda r^2} \, d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2} [-\frac{e^{-\lambda r^2}}{2\lambda}]_0^\infty = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\lambda}, \end{split}$$

d'où la conclusion.

Envisageons maintenant le passage aux coordonnées polaires dans l'espace euclidien à trois dimensions. Il nous faut cette fois-ci considérer la CVR

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

d'ordre infini entre

$$U_{\theta_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(r\cos(\theta_0), r\sin(\theta_0), z) : r \geqslant 0, \ z \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad U'_{\theta_0} =]0, \infty[\times]0, \pi[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\times]\theta_0, \theta_0 = [0, \infty] = [0, \infty]$$

 θ_0 étant un nombre quelconque. Le module du jacobien vaut

$$\left| \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \right) \right| = \left| \begin{array}{ccc} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{array} \right| = r^2\sin(\theta).$$

Un demi-plan étant une partie négligeable de \mathbb{R}^3 , U_{θ_0} est égal presque partout à \mathbb{R}^3 et le théorème du changement de variable permet d'affirmer qu'une fonction $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ est intégrable sur \mathbb{R}^3 si et seulement si

$$(r, \theta, \varphi) \mapsto r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))$$

est intégrable sur U'_{θ_0} , auquel cas, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, dx dy dz$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} r^2 \sin(\theta) f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) \, d\varphi d\theta dr.$$

Exemple 4.3.21. Considérons la mesure de la boule B de rayon R > 0,

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}.$$

On constate que la boule B est égale presque partout à

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\} \setminus \{(x, 0, z) : x \ge 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

Par un passage aux coordonnées polaires, cet ensemble se transforme en $]0, R[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. La mesure de la boule vaut donc

$$|B| = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) \, d\varphi d\theta dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exemple 4.3.22. Étant donné trois nombres réels strictement positifs a, b et c, calculer la mesure de l'ellipsoïde

$$E_{a,b,c} = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}.$$

Le changement de variable linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

transforme $E_{a,b,c}$ en la boule de rayon unité. Il s'ensuit que $E_{a,b,c}$ est intégrable (ce que l'on savait déjà puisque $E_{a,b,c}$ est compact) et que l'on a

$$|E_{a,b,c}| = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Exemple 4.3.23. Étant donné deux nombres réels r et R tels que 0 < r < R, calculons la mesure du tore

$$T = \{(x, y, z) : d((x, y, z), C) \leqslant r\},\$$

οù

$$C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}.$$

Le changement de variable à opérer paraîtra plus naturel si on se remémore le représentation géométrique suivante du tore : il s'agit de l'ensemble des points obtenu par la rotation du disque

$$\{(x, y, z) : (x - R)^2 + z^2 \le r^2, y = 0\}$$

autour de l'axe des coordonnées z.

Il suffit ensuite de vérifier que

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi) \\ y = (R + \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi) \\ z = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

est un CVR d'ordre infini entre un ensemble égal à T presque partout et

$$\{(\rho,\theta,\varphi): 0 < \rho < r, \ 0 < \theta < 2\pi, \ 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Le jacobien vaut

$$\left| \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right) \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \cos(\varphi) & -(R + \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & (R + \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \left| -\rho(R + \rho \cos(\theta)) \right|,$$

ce qui permet d'écrire

$$|T| = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(R + \rho \cos(\theta)) d\varphi d\theta d\rho = 2\pi^2 r^2 R.$$

4.4 Longueur d'une courbe

Chemins et courbes

Définition 4.4.1. Un chemin dans \mathbb{R}^d est la donnée d'un intervalle compact I de \mathbb{R} et de d fonctions $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ continues sur I définissant une application continue $\gamma: I \to \mathbb{R}^d$. Ce chemin est noté (γ, I) ; il est C^1 si les fonctions γ_k $(1 \le k \le d)$ appartiennent à $C^1(I)$. Si I = [a, b], l'origine du chemin est le point $\gamma(a)$ et son extrémité, le point $\gamma(b)$. Un lacet est un chemin fermé, c'est-à-dire un chemin dont l'origine est égale à l'extrémité.

Exemple 4.4.2. Étant donné deux points a et b de \mathbb{R}^d , le segment joingant a à b est le chemin $(\gamma, [0, 1])$ défini par

$$\gamma(t) = a + t(b - a),$$

pour $t \in [0, 1]$.

Exemple 4.4.3. Le lacet circonférence unité est le lacet $(\gamma, [0, 2\pi])$ défini par

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

pour $t \in [0, 2\pi]$.

Définition 4.4.4. Une courbe (resp. une boucle) dans \mathbb{R}^d est une partie Γ de \mathbb{R}^d pour laquelle il existe un chemin (resp. un lacet) (γ, I) dans \mathbb{R}^d tel que $\Gamma = \gamma(I)$. L'équation $x = \gamma(t)$ pour $t \in I$ est appelée la représentation paramétrique de Γ . On dit que Γ est déterminé par (γ, I) .

Bien entendu, tout boucle est une courbe, mais il est aussi aisé de montrer que toute courbe est une boucle : étant donné un chemin $(\gamma, [a, b])$ déterminant Γ , le lacet $(\gamma', [0, \pi])$ défini par $\gamma'(t) = \gamma(a + \sin(t)(b - a))$ détermine le même ensemble Γ .

Remarque 4.4.5. Un chemin est une application et une courbe est un ensemble. Pour illustrer cette distinction, remarquons que toute courbe admet une représentation paramétrique sur n'importe quel intervalle compact de \mathbb{R} . De fait, étant donné un chemin $(\gamma, [a, b])$, toute fonction f continue sur un intervalle [c, d] telle que f([c, d]) = [a, b] est telle que $(\gamma(f), [c, d])$ détermine le même ensemble. On peut par exemple prendre $f(t) = a + \frac{t-c}{d-c}(b-a)$.

Exemple 4.4.6. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\{a\}$ est une courbe dans \mathbb{R}^d .

Exemple 4.4.7. Étant donné deux points a et b de \mathbb{R}^d , le segment d'extrémités a et b,

$$\overline{ab} = \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$$

est une courbe dans \mathbb{R}^d . Plus généralement, étant donné un nombre fini de points a_1, \ldots, a_n de \mathbb{R}^d $(n \in \mathbb{N})$, la réunion des segments $\overline{a_k a_{k+1}}$ $(1 \leq k < n)$ est une courbe dans \mathbb{R}^d , appelée courbe polygonale associée aux points a_1, \ldots, a_n et notée $\overline{a_1 \cdots a_n}$.

Exemple 4.4.8. La circonférence unité dans \mathbb{R}^2 ,

$$\{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\} = \{(\cos(t), \sin(t)): t \in [0, 2\pi]\}$$

est une boucle de \mathbb{R}^2 .

Exercice 4.4.9. Pour toute fonction réelle et continue f définie sur un intervalle compact I de \mathbb{R} , l'ensemble $\{(x, f(x)) : x \in I\}$ est une courbe de \mathbb{R}^2 .

Chemin rectifiable

Définition 4.4.10. Étant donné un chemin (γ, I) dans \mathbb{R}^n , soit D_I l'ensemble des découpages de I. Le chemin (γ, I) est rectifiable si l'ensemble

$$\{\sum_{k=1}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| : (a_k)_{k=0}^n \in D_I\}$$

est borné. Dans ce cas, la borne supérieure de cet ensemble est appelée la longueur de (γ, I) , notée L_{γ} .

Lemme 4.4.11. Soit (γ, I) un chemin dans \mathbb{R}^d et $(a_k)_{k=0}^n$ un découpage de I; si $(b_k)_{k=0}^m$ est un découpage de I plus fin que $(a_k)_{k=0}^n$, alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{m} |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})|.$$

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Démonstration. Cela résulte directement de l'inégalité de Minkowski.

Proposition 4.4.12. Étant donné un chemin (γ, I) dans \mathbb{R}^d et un découpage $(a_k)_{k=0}^n$ de I, posons $\gamma^{(k)} = \gamma|_{[a_{k-1}, a_k]}$ $(1 \leq k \leq n)$. Le chemin (γ, I) est rectifiable si et seulement si chacun des chemins $(\gamma^{(k)}, [a_{k-1}, a_k])$ l'est, auquel cas, on a $L_{\gamma} = \sum_{k=1}^n L_{\gamma^{(k)}}$.

Démonstration. La condition est nécessaire. L'union de découpages des intervalles $[a_{k-1}, a_k]$ $(1 \le k \le n)$ définit un découpage de I. Dès lors, si (γ, I) est rectifiable, $(\gamma^{(k)}, [a_{k-1}, a_k])$ également, avec $\sum_{k=1}^n L_{\gamma^{(k)}} \le L_{\gamma}$.

La condition est suffisante. On ajoutant les points a_0, \ldots, a_n à un découpage de I, on obtient un découpage des intervalles $[a_{k-1}, a_k]$ $(1 \le k \le n)$. Le lemme précédent permet alors d'affirmer que si les chemins $(\gamma^{(k)}, [a_{k-1}, a_k])$ sont rectifiables, alors (γ, I) également, avec $L_{\gamma} \le \sum_{k=1}^{n} L_{\gamma^{(k)}}$.

Définition 4.4.13. Étant donné un chemin rectifiable $(\gamma, [a, b])$ dans \mathbb{R}^d , la fonction longueur de $(\gamma, [a, b])$ est définie comme suit :

$$L_{\gamma}: [a,b] \to [0,\infty[t \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} L_{\gamma|_{[a,t]}} & \text{si } t \in]a,b] \\ 0 & \text{si } t=a \end{array} \right..$$

Proposition 4.4.14. Si (γ_1, I) et (γ_2, J) sont deux chemins dans \mathbb{R}^d pour lesquels il existe une fonction $f \in C^0(J)$ strictement monotone telle que f(J) = I et $\gamma_2 = \gamma_1(f)$ alors les chemins (γ_1, I) et (γ_2, J) sont simultanément rectifiables, auquel cas ils ont la même longueur.

Démonstration. Vu le théorème de la fonction inverse, il suffit d'établir que si (γ_1, I) est rectifiable, alors (γ_2, J) l'est également, avec $L_{\gamma_2} \leq L_{\gamma_1}$. Pour tout découpage $(a_k)_{k=0}^n$ de J, $(f(a_k))_{k=0}^n$ est un découpage de I et on a

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma_2(a_k) - \gamma_2(a_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_1(f(a_k)) - \gamma_1(f(a_{k-1}))| \leqslant L_{\gamma_1},$$

ce qui suffit.

Lemme 4.4.15. Étant donné un chemin rectifiable $(\gamma, [0, 1])$ dans \mathbb{R}^d , le chemin $(\gamma', [0, 1])$ défini par $\gamma'(t) = \gamma(1-t)$ est également rectifiable et on a $L_{\gamma} = L_{\gamma}(t_0) + L_{\gamma'}(1-t_0)$ pour tout $t_0 \in [0, 1]$.

Démonstration. Soit f la fonction définie sur [0,1] par f(t)=1-t. On a $\gamma'=\gamma\circ f$ et la Proposition 4.4.14 implique que $(\gamma',[0,1])$ est rectifiable.

Bien entendu, $L_{\gamma} = L_{\gamma}(0) + L_{\gamma'}(1)$ et $L_{\gamma} = L_{\gamma}(1) + L_{\gamma'}(0)$. On peut donc supposer avoir $t_0 \in]0, 1[$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $(a_k)_{k=0}^n$ un découpage de [0, 1] tel que

$$L_{\gamma} - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})|.$$

Quitte à prendre un découpage plus fin, on peut supposer qu'il existe un indice k_0 tel que $a_{k_0} = t_0$. Ainsi, $(a_k)_{k=1}^{k_0}$ est un découpage de $[0, t_0]$, tandis que $(a_k)_{k=k_0}^n$ est un découpage de $[t_0, t_0]$. Dès lors, $(f(a_k))_{k=k_0}^n$ est un découpage de $[t_0, t_0]$ et

$$L_{\gamma} - \varepsilon < \sum_{k=1}^{k_0} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| + \sum_{k_0}^n |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| + \sum_{k_0}^n |\gamma'(a_k) - \gamma'(a_{k-1})|$$

$$\leq L_{\gamma}(t_0) + L_{\gamma'}(1 - t_0).$$

Cela étant, un découpage de $[0, t_0]$ et un découpage de $[t_0, 1]$ définissent un découpage de [0, 1] et par un raisonnement similaire, on obtient

$$L_{\gamma}(t_0) + L_{\gamma'}(1-t_0) - \varepsilon \leqslant L_{\gamma}$$

ce qui suffit pour conclure.

Théorème 4.4.16. Étant donné un chemin rectifiable $(\gamma, [a, b])$ dans \mathbb{R}^d , la fonction longueur de $(\gamma, [a, b])$ est à valeurs dans $[0, L_{\gamma}]$, croissante et continue.

De plus, elle est strictement croissante si et seulement si γ n'est constant sur aucun intervalle inclus dans [a, b].

Démonstration. Seule la continuité n'est pas immédiate. Établissons que la fonction est continue à gauche en tout point $t_0 \in]a,b]$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe un découpage $(a_k)_{k=0}^n$ de $[a,t_0]$ tel que

$$L_{\gamma}(t_0) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})|.$$

Vu la continuité de γ , il existe un point $c \in]a_{n-1}, a_n[$ tel que $|\gamma(a_n)\gamma(c)| < \varepsilon/2$. L'adjonction de c au découpage $(a_k)_{k=0}^n$ définit un découpage $(b_k)_{k=0}^{n+1}$ plus fin de $[a,t_0]$ et il vient

$$L_{\gamma}(t_0) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n+1} |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})|$$

$$< \sum_{k=1}^{n} |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L_{\gamma}(c) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L_{\gamma}(t_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

vu la croissante de $L_{\gamma}(\cdot)$. Dès lors, pout tout $t \in [c, t_0]$, on a $|L_{\gamma}(t_0) - L_{\gamma}(t)| < \varepsilon$.

Vu la Proposition 4.4.14, on peut supposer avoir [a, b] = [0, 1]. Avec les notations du lemme qui précède, on a

$$L_{\gamma}(t_0^+) = L_{\gamma} - L_{\gamma'}((1 - t_0)^-) = L_{\gamma} - L_{\gamma'}(1 - t_0) = L_{\gamma}(t_0).$$

De la même manière, $L_{\gamma}(0^+) = L_{\gamma} - L_{\gamma'}(1^-) = L_{\gamma} - L_{\gamma'} = 0$.

Théorème 4.4.17. Si $(\gamma, [a, b])$ est un chemin dans \mathbb{R}^d tel que chacune des fonctions $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ est continûment dérivable et de dérivée intégrable sur [a, b] (c'est en particulier le cas si le chemin est C^1), alors $(\gamma, [a, b])$ est rectifiable et de longueur donnée par [a, b] [a, b] dt.

Démonstration. Supposons d'abord que le chemin est C^1 . Pour tout découpage $(a_k)_{k=0}^n$ de [a,b], pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, il existe des nombres $a_{k,j} \in]a_{k-1},a_k[$ pour $j \in \{1,\ldots,d\}$ tels que

$$|\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| = (a_k - a_{k-1}) \sqrt{\sum_{j=1}^d (D\gamma_k(a_{k,j}))^2},$$

vu le théorème des accroissements finis. Les fonctions $D\gamma_k$ étant continues, donc bornées sur [a,b], on obtient directement

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} C|a_k - a_{k-1}| = C(b-a),$$

pour une constante C. Il s'ensuit que le chemin est rectifiable.

Puisque $(\gamma, [a, b])$ est rectifiable, soit $((a_k^{(j)})_{k=0}^{n(j)})_j$ une suite de découpages de [a, b] telle que $(\sum_{k=1}^{n(j)} |\gamma(a_k^{(j)}) - \gamma(a_{k-1}^{(j)})|)_j$ converge vers L_{γ} . Vu le Lemme 4.4.11, nous pouvons

supposer que la suite définie par $\varepsilon_j = \sup_{1 \le k \le n} |a_k^{(j)} - a_{k-1}^{(j)}|$ converge vers zéro. Avec les mêmes notations que précdemment, pour $l \in \mathbb{N}_0$, définissons

$$f_l = \sum_{k=1}^{n(l)} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (D\gamma_j(a_{k,j}^{(l)}))^2} \chi_{a_{k-1}^{(l)}, a_k^{(l)}}.$$

Bien sûr, f_l est mesurable pour tout l et la suite de fonctions $(f_l)_l$ converge vers $|D\gamma|\chi_{[a,b]}$. Puisque $|f_l|$ est majoré par une fonction de la forme $C\chi_{[a,b]}$ pour tout l, le théorème de la convergence majorée permet d'affirmer que la suite

$$\int_{a}^{b} f_{l} dx = \sum_{k=1}^{n(l)} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (D\gamma_{j}(a_{k,j}^{(l)}))^{2}} (a_{k}^{(l)} - a_{k-1}^{(l)})$$

converge vers $\int_a^b |D\gamma| dt$, d'où la conclusion dans le cas C^1 .

Passons au cas général. Montrons que le chemin est rectifiable. Par continuité, il existe $\eta>0$ tel que

$$|\gamma(a') - \gamma(a)| + |\gamma(b) - \gamma(b')| < 1,$$

pour tous $a', b' \in [a, b]$ tels que $a' - a < \eta$ et $b - b' < \eta$. Soit maintenant un découpage $(a_k)_{k=0}^n$ de [a, b]; quitte à prendre un découpage plus fin, on peut supposer avoir

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| \le 1 + \sum_{k=2}^{n-1} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})|.$$

Puisqu'on a

$$\sum_{k=2}^{n-1} |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| \le \int_{a_1}^{a_{n-1}} |D\gamma| \, dt \le \int_a^b |D\gamma| \, dt,$$

vu la première partie de la preuve, le chemin est rectifiable.

Maintenant, pour tous a' et b' tels que a < a' < b' < b, nous savons que l'égalité

$$L_{\gamma|_{[a',b']}} = \int_{a'}^{b'} |D\gamma| \, dt$$

est vérifiée. Puisque la fonction longueur est continue et que $|D\gamma|$ est intégrable sur [a,b], la conclusion s'ensuit.

La longueur d'un chemin admet une interprétation très pragmatique.

Proposition 4.4.18. Si $(\gamma, [a, b])$ est un chemin dans \mathbb{R}^d tel que chacune des fonctions $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ est continûment dérivable et de dérivée intégrable sur [a, b], étant donné

- une suite réelle $(\delta_k)_k$ strictement positive qui converge vers zéro,
- pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, un découpage $(a_k^{(j)})_{k=0}^{n(j)}$ de [a,b] subordonné à δ_j , on a

$$L_{\gamma} = \lim_{j} \sum_{k=1}^{n(j)} |\gamma(a_k^{(j)}) - \gamma(a_{k-1}^{(j)})|.$$

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $\eta \in]0, (b-a)/4[$ tel que

$$\int_{a}^{a+\eta} |D\gamma| \, dt + \int_{b-n}^{b} |D\gamma| \, dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour j suffisamment grand, on a $\delta_i < \eta$; il existe donc deux indices $k_1(j)$ et $k_2(j)$ tels que

$$a < a_{k_1(j)}^{(j)} \le a + \eta < a_{k_1(j)+1}^{(j)} \le a_{k_2(j)-1}^{(j)} < b - \eta \le a_{k_2(j)}^{(j)} < b.$$

Tout comme dans la démonstration précédente, on établit que

$$\sum_{k=k_1(j)+1}^{k_2(j)} |\gamma(a_k^{(j)}) - \gamma(a_{k-1}^{(j)})| \to \int_{a+\eta}^{b-\eta} |D\gamma| \, dt,$$

avec j. La conclusion est alors immédiate car, pour j suffisamment grand, il vient successivement

$$L_{\gamma} - \varepsilon = \int_{a}^{b} |D\gamma| \, dt - \varepsilon \leqslant \int_{a+\eta}^{b-\eta} |D\gamma| \, dt - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \sum_{k=k_{1}(j)+1}^{k_{2}(j)} |\gamma(a_{k}^{(j)}) - \gamma(a_{k-1}^{(j)})|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n(j)} |\gamma(a_{k}^{(j)}) - \gamma(a_{k-1}^{(j)})| \leqslant L_{\gamma},$$

ce qui suffit.

Exemple 4.4.19. Pour tout couple de points a et b de \mathbb{R}^d , le segment joignant a et b est rectifiable et de longueur égale à la distance |b-a| entre ces points.

Exemple 4.4.20. Le lacet de circonférence unité est rectifiable et de longueur égale à $\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 + \cos^2} \, dt = 2\pi$. Plus généralement, l'arc de circonférence de rayon R > 0 et de centre (a,b) entre les angles polaires ω_1 et ω_2 , avec $\omega_1 < \omega_2$, à savoir le chemin $(\gamma, [\omega_1, \omega_2])$ avec

$$\gamma(t) = (a + R\cos(t), b + R\sin(t))$$

est rectifiable et de longueur égale à $R(\omega_2 - \omega_1)$.

Exemple 4.4.21. L'arcade de sinusoïde de représentation paramétrique $(x, y) = (t, \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$ est rectifiable et de longueur donnée par $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t)} \, dx$. Il s'agit d'une intégrale elliptique que l'on ne peut calculer aves les outils classiques.

Courbes simples et de Jordan

Définition 4.4.22. Une courbe Γ dans \mathbb{R}^d est dite simple s'il existe une application injective γ sur l'intervalle compact I telle que (γ, I) détermine Γ . L'équation $x = \gamma(t)$ pour $t \in I$ porte alors le nom de représentation paramétrique simple de Γ .

Lemme 4.4.23. Soit Γ est une courbe simple admettant la représentation paramétrique simple $x = \gamma(t)$ pour $t \in I$,

- Pour toute représentation paramétrique simple $x = \gamma'(t)$ pour $t \in J$ de Γ , il existe une fonction $f \in C^0(J)$ strictement monotone telle que f(J) = I et $\gamma' = \gamma(f)$.
- Pour tout intervalle compact J de \mathbb{R} et toute fonction $f \in C^0(J)$ strictement monotone et telle que f(J) = I, le chemin $(\gamma(f), J)$ donne aussi lieu à une représentation paramétrique simple de Γ .

Démonstration. Démontrons le premier point. Soit f la fonction qui à $s \in J$ associe l'unique point $t \in I$ tel que $\gamma'(s) = \gamma(t)$. On vérifie de suite que f est bien défini sur J et tel que f(J) = I.

Supposons qu'il existe une suite $(s_k)_k$ de J qui converge vers s et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(s_k) - f(s)| > \varepsilon$ pour tout k. De la suite $(f(s_k))_k$ de I on peut extraire une sous-suite convergente $(f(s_{l(k)})_k$ qui converge vers un point t du compact I. On doit alors avoir

$$\gamma(t) = \lim_{k} \gamma(f(s_{l(k)})) = \lim_{k} \gamma'(s_{l(k)}) = \gamma'(s),$$

ce qui implique f(s) = t. Cette égalité étant absurde, f doit être continu.

Si f n'était pas strictement monotone, il existerait deux points distincts s_1 et s_2 de J tels que $f(s_1) = f(s_2)$, par le théorème des valeurs intermédiaires. Ce la impliquerait $\gamma'(s_1) = \gamma'(s_2)$, ce qui est absurde, vu l'injectivité de γ' .

Le second point est trivial.

Théorème 4.4.24. Soit $x = \gamma(t)$ pour $t \in I$ une représentation paramétrique simple de la courbe simple Γ dans \mathbb{R}^d ; si le chemin (γ, I) est rectifiable, alors, pour toute représentation paramétrique simple $x = \gamma'(t)$ pour $t \in J$ de Γ , le chemin (γ', J) est rectifiable et on a $L_{\gamma} = L_{\gamma'}$.

Démonstration. Cela résulte directement du lemme précédent et de la Proposition 4.4.14.

La définition suivante fait sens, puisque la longueur d'une courbe simple ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie.

Définition 4.4.25. Une courbe simple Γ dans \mathbb{R}^d est rectifiable si elle admet une représentation paramétrique simple $x = \gamma(t)$ pour $t \in I$ telle que le chemin (γ, I) soit rectifiable. Dans ce cas, la longueur de Γ , notée L_{Γ} , est la longueur du chemin L_{γ} .

Une courbe simple ne peut être fermée. Ainsi, nous ne pouvons, à ce stade, définir la longueur d'un arc de cercle.

Définition 4.4.26. Une courbe Γ dans \mathbb{R}^d est dite de Jordan s'il existe un lacet $(\gamma, [a, b])$ tel que $\Gamma = \gamma([a, b])$, avec γ injectif sur [a, b]. L'équation $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ est appelée une représentation paramétrique de Jordan de Γ .

Théorème 4.4.27. Soit $x = \gamma(t)$ pour $t \in [a,b]$ une représentation paramétrique de Jordan de la courbe de Jordan Γ dans \mathbb{R}^d . Si le lacet $(\gamma,[a,b])$ est rectifiable, alors pour toute représentation paramétrique de Jordan $x = \gamma'(t)$ pour $t \in [c,d]$ de Γ , le lacet $(\gamma',[c,d])$ est rectifiable et on a $L_{\gamma} = L_{\gamma'}$.

Démonstration. Supposons d'abord avoir $\gamma(a) = \gamma'(c)$. Soit f la fonction définie sur c0, d1 qui à c2 associe l'unique point c4 tel que c4 c7. Comme pour le cas d'une courbe

simple, on vérifie directement que f est une fonction continue et strictement monotone sur [c, d] telle que f([c, d]) =]a, b[. En prolongeant f sur [c, d] par

$$f(c) = \lim_{s \to c^+} f(s)$$
 et $f(d) = \lim_{s \to d^-} f(s)$,

on obtient une fonction continue, strictement monotone sur]c, d[, vérifiant f([c, d]) = [a, b] et telle que $\gamma' = \gamma(f)$ sur [c, d]. La conclusion s'ensuit aussitôt.

Si $\gamma(a)$ n'est pas égal à $\gamma'(c)$, soit t_0 l'unique point de]a,b[tel que $\gamma(t_0)=\gamma'(c)$. Soit alors γ'' l'application définie sur $[t_0,t_0+b-a]$ par

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [t_0, b] \\ \gamma(t - b + a) & \text{si } t \in [b, t_0 + b - a] \end{cases}.$$

On vérifie directement que $x=\gamma''(t)$ pour $t\in [t_0,t_0+b-a]$ est une représentation paramétrique de Jordan de Γ telle que $\gamma''(t_0)=\gamma'(c)$. Vue la première partie de la démonstration, on a $L_{\gamma''}=L_{\gamma'}$. Il suffit alors de vérifier que l'on a $L_{\gamma|_{[a,t_0]}}=L_{\gamma''|_{[b,t_0+b-a]}}$ pour conclure.

Définition 4.4.28. Une courbe de Jordan dans \mathbb{R}^d est rectifiable si elle admet une représentation paramétrique de Jordan $x = \gamma(t)$ avec $t \in I$ telle que le lacet (γ, I) soit rectifiable. Dans ce cas, la longueur de Γ , notée L_{Γ} est la longueur du lacet (γ, I) .

Théorème 4.4.29. La longueur d'une courbe simple ou de Jordan rectifiable est indépendante du choix du système d'axes de coordonnées.

Exemple 4.4.30. Étant donnés deux points distincts a et b de \mathbb{R}^d , le segment d'extrémités a et b est une courbe simple rectifiable de longueur égale à |b-a|.

Exemple 4.4.31. Dans \mathbb{R}^2 , la circonférence de rayon R > 0 est une courbe de Jordan rectifiable de longueur égale à $2\pi R$.

Exercice 4.4.32. Vérifier que la longueur de l'arcade de cycloïde construite au moyen de la circonférence de rayon R > 0 est égale à 8R.

Suggestion. Puisque la longueur est invariante par rapport au choix du système d'axes cartésien, nous pouvons adopter le chemin

$$((R(t-\sin(t)), R(1-\cos(t))), [0, 2\pi])$$

pour déterminer cette arcade Γ. Puisque la fonction $t \mapsto R(t - \sin(t))$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , Γ est une courbe simple. Bien entendu, les fonctions $R(t - \sin(t))$ et $R(1 - \cos(t))$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} , ce qui implique que la courbe Γ est rectifiable, avec

$$L_{\Gamma} = \int_{0}^{2\pi} |(R(1 - \cos(t), R\sin(t)))| dt$$

$$= R \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos^{2}(t) - 2\cos(t) + \sin^{2}(t))} dt$$

$$= R \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = R \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4\sin^{2}(\frac{t}{2})} dt$$

$$= 8R$$

^{1.} La démarche est celle du Lemme 4.4.15.

Si y est une fonction réelle et continue sur l'intervalle compact [a,b] de \mathbb{R} , continûment dérivable et de dérivée intégrable sur]a,b[, alors $\Gamma=\{(x,y(x)):x\in[a,b]\}$ est une courbe simple rectifiable dans \mathbb{R}^2 . La représentation paramétrique associée est appelée une représentation paramétrique cartésienne de Γ . La longueur de la courbe Γ est égale à

$$L_{\Gamma} = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (Dy)^2} \, dx.$$

Soit ρ est une fonction continue sur l'intervalle [a,b] de \mathbb{R} , ontinûment dérivable et de dérivée intégrable sur]a,b[. Si, en outre, ρ est à valeurs strictement positives, avec $b-a<2\pi$, alors

$$\Gamma = \{ (\rho(\omega)\cos(\omega), \rho(\omega)\sin(\omega)) : \omega \in [a, b] \}$$

est une courbe simple rectifiable de \mathbb{R}^2 . La représentation paramétrique associée est appelée une représentation paramétrique polaire de Γ . La longueur de la courbe Γ est égale à

$$L_{\Gamma} = \int_{a}^{b} \sqrt{(D\rho\cos(-\rho\sin)^{2} + (D\rho\sin(-\rho\cos)^{2})^{2}} d\omega = \int_{a}^{b} \sqrt{(D\rho)^{2} + \rho^{2}} d\omega.$$

4.5 Aire et volume

Couvertures et surfaces de \mathbb{R}^3

Définition 4.5.1. Une couverture de \mathbb{R}^3 est la donnée

- d'un rectangle 2 compact K de \mathbb{R}^2 ,
- de trois fonctions réelles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de classe C^1 sur un ouvert U contenant K telles que l'application ainsi définie $\varphi: K^{\circ} \to \mathbb{R}^3$ soit injective et qu'il existe deux fonctions réelles ψ_1, ψ_2 de classe C^1 sur un ouvert Ω contenant $\varphi(K^{\circ})$ telles que $\psi(\varphi(u,v)) = (u,v)$ pour tout $(u,v) \in K^{\circ}$.

Cette couverture est simplement notée (φ, K) .

Définition 4.5.2. Une surface de \mathbb{R}^3 est une partie \mathcal{S} de \mathbb{R}^3 pour laquelle il existe une couverture (φ, K) telle que $\mathcal{S} = \varphi(K)$. Dans ce cas, l'équation

$$x = \varphi(u, v) \quad (u, v) \in K$$

est appelée une représentation paramétrique de la surface \mathcal{S} ; on dit aussi que \mathcal{S} est déterminé par la couverture (φ, K) .

Bien sûr, une surface est compacte.

Donnons trois exemples simples.

Exemple 4.5.3. Dans \mathbb{R}^3 , le parallélogramme \mathcal{P} de sommet P et de côtés a et b non-parallèles en P est un ensemble qui peut s'écrire $\mathcal{P} = \varphi(K)$, avec $K = [0,1]^2$ et où $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est défini par $\varphi(u,v) = P + ua + vb$.

Il suffit de vérifier que (φ, K) est une couverture dans \mathbb{R}^3 : K est compact, $\varphi_j(u, v) = P_j + ua_j + vb_j \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ $(j \in \{1, 2, 3\})$. L'injectivité de $\varphi : K^{\circ} \to \mathbb{R}^3$ est assurée par le fait que a et b ne sont pas parallèles. Construisons les fonctions ψ_1 et ψ_2 . Soit $c \in \mathbb{R}^3$ tel

^{2.} Un rectangle est un produit cartésien d'intervalles.

que a, b, c soient linéairement indépendants et définissons la matrice A = (a, b, c). Bien sûr, l'application

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + P$$

est un CVR d'ordre infini entre \mathbb{R}^3 et lui-même; notons son inverse

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y, z) \\ \lambda_2(x, y, z) \\ \lambda_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions $\psi_1 = \lambda_1$ et $\psi_2 = \lambda_2$ conviennent.

Exemple 4.5.4. Dans \mathbb{R}^3 , le triangle \mathcal{T} de sommet P et de côtés a et b non-parallèles en P est un ensemble qui peut s'écrire $\mathcal{T} = \varphi(K)$, avec $K = [0,1]^2$ et où $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est défini par $\varphi(u,v) = P + ua + v(1-u)b$.

Vérifions que (φ, K) est une couverture dans \mathbb{R}^3 : K est compact, $\varphi_j(u, v) = P_j + ua_j + vb_j \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ $(j \in \{1, 2, 3\})$. L'injectivité de $\varphi: K^{\circ} \to \mathbb{R}^3$ est également assurée par le fait que a et b ne sont pas parallèles. On peut choisir $c \in \mathbb{R}^3$ et construire les fonctions λ_j $(j \in \{1, \dots, 3\})$ comme précédemment. Vu l'exemple précédent, les fonctions $\psi_1 = \lambda_1$ et $\psi_2 = \lambda_2/(1-\lambda_1)$ conviennent sur $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{P+a+vb+wc: v, w \in \mathbb{R}\}$ (pour éviter $\lambda_1(x) = 1$).

Exemple 4.5.5. Dans \mathbb{R}^3 , la sphère \mathcal{S} de sommet P et de rayon R > 0 est un ensemble qui peut s'écrire $\mathcal{S} = \varphi(K)$, avec $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ et où $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est défini par

$$\varphi(u, v) = P + R(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u)).$$

On vérifie directement que (φ, K) est une couverture, puisque, par passage aux coordonnées polaires, il existe une application

$$\psi: P + \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$$

telle que $\psi \circ \varphi(u, v) = (u, v)$, pour tout $u \in]0, \pi[$ et $v \in]0, 2\pi[$.

Aire d'une surface

Proposition 4.5.6. Si les couvertures (φ, K) et (φ', K') dans \mathbb{R}^3 déterminent la même surface S, alors on a

$$\iint_K |D_u \varphi \wedge D_v \varphi| \, du dv = \iint_{K'} |D_u \varphi' \wedge D_v \varphi'| \, du dv.$$

Démonstration. Bien sûr K^{\bullet} et K'^{\bullet} sont négligeables; posons

$$\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \setminus (\varphi(K^{\bullet}) \cup \varphi'(K'^{\bullet}))$$

et $U = (\varphi|_K)^{-1}(\mathcal{S}_*)$, $U' = (\varphi'|_{K'})^{-1}(\mathcal{S}_*)$. On vérifie de suite que U et U' sont deux ouverts de K° et K'° respectivement. Cela étant, $\psi \circ \varphi' : U' \to U$ est un CVR d'ordre $p \geqslant 1$ et puisque

$$[D_u \varphi \wedge D_v \varphi]_{\psi \circ \varphi'} \det \frac{\partial (\psi \circ \varphi')}{\partial (u', v')} = D_{u'} \varphi(\psi \circ \varphi') \wedge D_{v'} \varphi(\psi \circ \varphi'),$$

П

avec $\varphi(\psi \circ \varphi') = \varphi'$ sur U', il vient

$$\iint_{U} |D_{u}\varphi \wedge D_{v}\varphi| \, dudv = \iint_{U'} |D_{u}\varphi' \wedge D_{v}\varphi'| \, dudv,$$

ce qui suffit, $K \setminus U$ et $K' \setminus U'$ étant négligeables.

Définition 4.5.7. L'aire d'une surface S dans \mathbb{R}^3 est donnée par

$$\iint_K |D_u \varphi \wedge D_v \varphi| \, du dv,$$

où (φ, K) est une couverture de \mathbb{R}^3 déterminant \mathcal{S} .

Bien entendu, l'aire d'une surface est indépendante du système d'axes de coordonnées. On trouve directement que l'aire du parallélogramme de côtés a et b est donnée par

$$\int_0^1 \int_0^1 |a \wedge b| \, du dv = |a \wedge b|.$$

Remarquons que si le système de coordonnées est tel que a=(B,0,0) et b=(X,H,0), avec B,H>0, on a $|a\wedge b|=BH$; on retrouve donc la formule classique « base fois hauteur » de géométrie plane. L'aire du triangle de côtés a et b est quant à elle donnée par

$$\int_0^1 \int_0^1 |(a - vb) \wedge (1 - u)b| \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^1 |a \wedge (1 - u)b| \, du \, dv$$
$$= |a \wedge b| \int_0^1 (1 - u) \, du = \frac{1}{2} |a \wedge b|$$

et l'aire de la sphère de rayon R est donnée par

$$\begin{split} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |R(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u)) \\ & \wedge R(-\sin(u)\sin(v), \sin(u)\cos(v), 0) | \, du dv \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 |(-\sin^2(u)\cos(v), \sin^2(u)\sin(v), \cos(u)\sin(u))| \, du dv \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sqrt{\sin^4(u) + \sin^2(u)\cos^2(u)} \, du dv \\ & = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin(u) \, du dv = 4\pi R^2. \end{split}$$

Donnons une interprétation géométrique. Soit S une surface dans \mathbb{R}^3 dont (φ, K) est une couverture. Étant donné une suite de nombres réels positifs $(\varepsilon_j)_j$ qui converge vers 0, pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit \mathcal{R}_j un réseau de \mathbb{R}^2 composé de semi-intervalles dont le diamètre est majoré par ε_j . À un intervalle $I =]u, u + h] \times]v, v + l]$ de \mathcal{R}_j tel que $\bar{I} \subset K^\circ$, associons les points de S suivant : $P_1 = \varphi(u, v)$, $P_2 = \varphi(u + h, v)$, $P_3 = \varphi(u + h, v + l)$ et $P_4 = \varphi(u, v + l)$. Considérons alors les triangles \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 de sommets P_1, P_2, P_4 et

 P_2, P_3, P_4 respectivement et la somme σ_I de l'aire de ces deux triangles. Cela étant, si on définit A_i comme suit :

$$A_j = \sum_{\substack{I \in \mathcal{R}_j \\ \bar{I} \subset K^{\circ}}} \sigma_I,$$

le théorème de la convergence dominée permet de montrer que la suite $(A_j)_j$ converge vers l'aire de S.

De fait, avec les notations utilisées ci-dessus, on a

$$\sigma_{I} = \frac{1}{2} \Big(| \big(\varphi(u+h,v) - \varphi(u,v) \big) \wedge \big(\varphi(u,v+l) - \varphi(u,v) \big) | + | \big(\varphi(u+h,v) - \varphi(u+h,v+l) \big) \wedge \big(\varphi(u,v+l) - \varphi(u+h,v+l) \big) | \Big)$$

et vu le théorème des accroissements finis, il existe $h_1, \ldots, h_6 \in]0, h[$ et $l_1, \ldots, l_6 \in]0, l[$ pour lesquels

$$\sigma_{I} = \frac{hl}{2} \Big(|\sum_{j=1}^{3} D_{1} \varphi_{j}(u + h_{j}, v) e_{j} \wedge \sum_{k=1}^{3} D_{2} \varphi_{k}(u, v + l_{k}) e_{k}| + |\sum_{j=1}^{3} D_{2} \varphi_{j}(u + h, v + l_{j+3}) e_{j} \wedge \sum_{k=1}^{3} D_{1} \varphi_{k}(u + h_{k+3}, v + l) e_{k}| \Big).$$

De sorte que σ_I est l'intégrale sur \mathbb{R}^2 de la fonction

$$g_{I} = |\sum_{j=1}^{3} D_{1}\varphi_{j}(u+h_{j},v)e_{j} \wedge \sum_{k=1}^{3} D_{2}\varphi_{k}(u,v+l_{k})e_{k}|\chi_{\mathcal{T}_{1}}$$

$$+ |\sum_{j=1}^{3} D_{2}\varphi_{j}(u+h,v+l_{j+3})e_{j} \wedge \sum_{k=1}^{3} D_{1}\varphi_{k}(u+h_{k+3},v+l)e_{k}|\chi_{\mathcal{T}_{2}}.$$

Cela étant, posons, pour $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$f_j = \sum_{\substack{I \in \mathcal{R}_j \\ \bar{I} \subset K^{\circ}}} g_I.$$

Par le théorème de la convergence dominée appliqué à la suite $(f_j)_j$, l'intégrale de f_j converge vers l'aire de S.

Il convient d'insister sur le fait que dans l'interprétation précédente, les triangles doivent être déterminés par des réseaux du plan.

Remarque 4.5.8. Illustrons l'importance de choisir les triangle sur un réseau par un exemple attribué à Schwarz. Soit S un cylindre droit de révolution. Supposons-le de hauteur H et de rayon R. Étant donnés deux naturels m et n, considérons les m+1 circonférences obtenues à partir des bases et de m-1 plans équidistants. Sur chacune de ces circonférences, on considère n points définissant un n-gone régulier de telle manière que la génératrice du cylindre passant par un de ces points intersecte la circonférence suivante au milieu de l'arc déterminé par deux de ces points (autrement dit, d'une circonférence à l'autre, les n points suivants ont subi une rotation). De cette manière, les points déterminent 2mn triangles égaux de base $2R\sin(\pi/n)$ et de hauteur

$$\sqrt{\frac{H^2}{m^2} + R^2 (1 - \cos(\frac{\pi}{n}))^2}$$
.

La somme de ces surface vaut donc

$$2\pi R \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \sqrt{H^2 + \frac{\pi^4 R^2 m^2}{4n^4} \left(\frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n}\right)^4}.$$

Cette expression ne converge vers $2\pi RH$ que si m/n^2 temps vers 0, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

Exemples de calcul d'aire

Si \mathcal{S} est une surface incluse dans un plan, quitte à effectuer un changement d'axes, on peut supposer que $\varphi_3 = 0$. Dans ce cas, (φ_1, φ_2) établit un CVR d'ordre $p \ge 1$ entre K° et son image dont le module du jacobien est donné par $|D_u \varphi \wedge D_v \varphi|$. On est donc ramené 3 à calculer la mesure d'un compact de \mathbb{R}^2 .

Exercice 4.5.9. Calculer l'aire de la surface plane \mathcal{S} limitée par une arcade de cycloïde et sa base. Suggestion: À un changement d'axes près, on peut supposer que \mathcal{S} est défini par une couverture (φ, K) , avec $K = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ et

$$\varphi(u,v) = \Big(R\big(u - \sin(u)\big), vR\big(1 - \cos(u)\big), 0\Big),$$

pour $(u, v) \in K$. On obtient directement que l'aire demandée est donnée par

$$R^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} (1 - \cos(u))^{2} dv du = 3\pi R^{2}.$$

Considérons l'aire d'une surface déterminée par une représentation cartésienne. Soit K un rectangle de \mathbb{R}^2 et f une fonction de $C^1(U)$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant K. Bien entendu,

$$(x, y, z) = (u, v, f(u, v))$$
 pour $(u, v) \in K$
(resp. $(x, y, z) = (u, f(u, v), v)$ pour $(u, v) \in K$,
 $(x, y, z) = (f(u, v), u, v)$ pour $(u, v) \in K$)

est une représentation paramétrique d'une surface \mathcal{S} de \mathbb{R}^3 , appelée représentation paramétrique cartésienne de \mathcal{S} , dont l'aire est donnée par

$$\iint_K \sqrt{1 + (D_u f)^2 + (D_v f)^2} \, du dv.$$

Définition 4.5.10. Une surface S dans \mathbb{R}^3 est cylindrique si elle est déterminée par une couverture (φ, K) verifiant les conditions suivantes :

- $-K = [a, b] \times [0, 1],$
- e est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 ,
- Γ est une courbe simple ou de Jordan de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 de représentation paramétrique $(x, y, z) = \gamma(u)$, pour $u \in [a, b]$,
- $-g \in C^1([a,b])$ est une fonction réelle telle que g(u) > 0 pour tout $u \in]a,b[$,
- $-\varphi(u,v) = \gamma(u) + vg(u)e$ pour tout $(u,v) \in K$.

On dit dans ce cas que $\mathcal S$ est une surface cylindrique parallèle à e, de base Γ et de hauteur g.

^{3.} L'ensemble $(\varphi_1, \varphi_2)(K^{\bullet})$ est négligeable.

Dans le cas d'une surface cylindrique, comme on a $D_u\varphi = D_u\gamma + vD_uge$ et $D_v\varphi = ge$ sur K, l'aire de la surface est donnée par

$$\int_a^b g |D_u \gamma \wedge e| du.$$

Exemple 4.5.11. L'aire latérale d'un cylindre droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égale à $2\pi RH$. De fait, à un changement de système d'axes près, on peut supposer que la couverture (φ, K) avec

- $K = [0, 2\pi] \times [0, 1],$
- -e = (0,0,1),
- $\gamma(u) = (R\cos(u), R\sin(u), 0) \text{ pour } u \in [0, 2\pi],$
- -g(u) = H pour tout $u \in [0, 2\pi]$
- $-\varphi(u,v) = \gamma(u) + vg(u)e \text{ pour tout } (u,v) \in K.$

définit la surface étudiée. L'aire demandée vaut donc

$$\int_0^{2\pi} RH \, |(-\sin(u), \cos(u), 0) \wedge e| \, du = 2\pi RH.$$

Définition 4.5.12. Une surface S dans \mathbb{R}^3 est conique si elle est déterminée par une couverture (φ, K) verifiant les conditions suivantes :

- $-K = [a, b] \times [0, 1],$
- S est point de \mathbb{R}^3 .
- Γ est une courbe simple ou de Jordan de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 ne contenant pas S et de représentation paramétrique $(x, y, z) = \gamma(u)$, pour $u \in [a, b]$,
- $-\varphi(u,v) = S + v(\gamma(u) S)$ pour tout $(u,v) \in K$.

On dit dans ce cas que S est une surface conique de sommet S et de base Γ .

Dans le cas d'une surface conique, on a $D_u\varphi = vD_u\gamma$, $D_v\varphi = \gamma - S$ pour tout $u \in K$ et l'aire d'une telle surface est donnée par

$$\frac{1}{2} \int_{a}^{b} |D_{u} \gamma \wedge (\gamma - S)| \, du.$$

Exemple 4.5.13. L'aire latérale d'un cône droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égale à $\pi R \sqrt{R^2 + H^2}$. À un changement du système d'axes près, on peut supposer que la surface admet (φ, K) comme couverture, avec

- $-K = [0, 2\pi] \times [0, 1],$
- --S = (0, 0, H),
- $--- \gamma(u) = (R\cos(u), R\sin(u), 0) \text{ pour } u \in [0, 2\pi],$
- $-\varphi(u,v) = S + v(\gamma(u) S)$ pour tout $(u,v) \in K$.

L'aire de la surface vaut donc

$$\frac{R}{2}\int \left|\left(-\sin(u),\cos(u),0\right)\wedge\left(R\cos(u),R\sin(u),-H\right)\right|du=\pi R\sqrt{R^2+H^2}.$$

Définition 4.5.14. Une surface S dans \mathbb{R}^3 est de révolution si, à un changement du système d'axes près, elle est déterminée par une couverture (φ, K) verifiant les conditions suivantes :

$$--K = [a,b] \times [0,2\pi],$$

- Γ est une courbe simple ou de Jordan de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 de représentation paramétrique $(x, y, z) = \gamma(u)$, pour $u \in [a, b]$,
- $\varphi(u,v) = (|\gamma(u) \wedge e| \cos(v), |\gamma(u) \wedge e| \sin(v), \langle \gamma(u), e \rangle)$ pour tout $(u,v) \in K$, avec e = (0,0,1).

On obtient directement que l'aire d'une surface de révolution est donnée par

$$2\pi \int_{a}^{b} |\gamma \wedge e| \sqrt{(D_{u}|\gamma \wedge e|)^{2} + (\langle D_{u}\gamma, e \rangle)^{2}} \, du. \tag{4.8}$$

Le plus souvent, on choisit pour Γ la trace de \mathcal{S} dans le demi-plan $\{(0,y,z): y \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$. Si Γ admet une représentation paramétrique cartésienne, c'est-à-dire du type (x,y,z)=(0,y(u),u) pour $u\in[a,b]$, avec $y\in C^1([a,b])$ et $y(u)\geqslant 0$ pour tout $u\in[a,b]$, la formule (4.8) devient

$$2\pi \int_{a}^{b} y \sqrt{1 + (D_{u}y)^{2}} du.$$

Si Γ admet une représentation paramétrique polaire, c'est-à-dire du type $(x, y, z) = (0, \rho(\omega)\cos(\omega), \rho(\omega)\sin(\omega))$ pour $\omega \in [a, b]$, avec $[a, b] \subset [-\pi/2, \pi/2]$, $\rho \in C^1([a, b])$ et $\rho(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in [a, b]$, la formule (4.8) devient

$$2\pi \int_a^b \rho \cos \sqrt{\rho^2 + (D\rho)^2} \, d\omega.$$

Exercice 4.5.15. Traiter comme des surfaces de révolution les deux exemples précédents.

Exemple 4.5.16. Calculons l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation d'une arcade de cycloïde autour de sa base. Prenons

$$(x, y, z) = (0, R(1 - \cos(u)), R(u - \sin(u)))$$
 pour $(u, v) \in [0, 2\pi]$

comme représentation paramétrique de la cycloïde. On a bien entendu une surface de révolution dont l'aire est donnée par

$$2\pi \int_0^{2\pi} R(1 - \cos(u)) \sqrt{R^2 \sin^2(u) + R^2 (1 - \cos(u))^2} du$$

$$= 8\pi R^2 \int_0^{2\pi} \sin^3(\frac{u}{2}) du = 16\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin(u) (1 - \cos^2(u)) du$$

$$= \frac{64}{3}\pi R^2.$$

Pour terminer cette section, traitons l'aire d'une surface sphérique. On sait que la sphère de centre P et de rayon R>0 dans \mathbb{R}^3 est déterminée par la couverture (φ,K) , avec $K=[0,\pi]\times[0,2\pi]$ et

$$\varphi(u,v) = P + R(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u)). \tag{4.9}$$

Définition 4.5.17. Un fuseau de la sphère de centre P et de rayon R dans \mathbb{R}^3 est une partie S de cette sphère qui, à un changement d'axe près, est déterminé par une couverture de la forme (φ, K) où φ est défini par (4.9) et $K = [0, \pi] \times [\omega_1, \omega_2]$.

L'aire d'une telle surface est par conséquent donnée par

$$2R^2(\omega_2-\omega_1).$$

Définition 4.5.18. Une zone de la sphère de centre P et de rayon R dans \mathbb{R}^3 est une partie S de cette sphère qui, à un changement d'axe près, est déterminé par une couverture de la forme (φ, K) où φ est défini par (4.9) et $K = [\theta_1, \theta_2] \times [0, 2\pi]$.

L'aire d'une telle surface est par conséquent donnée par

$$2\pi R^2(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)).$$

Remarque 4.5.19. Si on remarque que $R\cos(\theta_1)$ et $R\cos(\theta_2)$ sont les ordonnées des « côtés » de la zone, on voit que son aire est égale à celle d'un cylindre droit de même hauteur que la zone et de base circulaire ayant même rayon que la sphère).

Volume d'un corps

Définition 4.5.20. Un corps est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 de mesure finie.

Vu le théorème de changement de variable, si U est un corps et si $(u, v, w) \mapsto \varphi(u, v, w)$ est un CVR d'ordre $p \ge 1$ entre U et un ouvert Ω , la mesure de U est égale à

$$\iiint_{\Omega} |\det(D_u \varphi, D_v \varphi, D_w \varphi)| \, du dv dw.$$

Définition 4.5.21. Une représentation paramétrique d'un corps U est un CVR $(u, v, w) \mapsto \varphi(u, v, w)$ d'ordre $p \ge 1$ entre U et un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 . Dans ce cas, le volume de U est la quantité

$$\iiint_{\Omega} |\det(D_u \varphi, D_v \varphi, D_w \varphi)| \, du dv dw.$$

On déduit de la définition que le volume d'un corps est indépendant de la représentation paramétrique choisie. Il est aussi indépendant du choix du système d'axes de coordonnées.

Remarque 4.5.22. Si la frontière d'un corps U est négligeable, on a $|\bar{U}| = |U|$. On peut dans ce cas parler du volume d'un corps fermé.

Exemple 4.5.23. Le volume du parallélipipède déterminé par le sommet S et les trois vecteurs non-coplanaires a, b, c vaut $|\det(a, b, c)|$. De fait, une représentation paramétrique de ce parallélipipède est donnée par

$$\varphi(u,v,w) = S + ua + vb + wc \quad \text{pour } (u,v,w) \in]0,1[^3.$$

La conclusion s'ensuit.

Exercice 4.5.24. Calculer le volume du corps U limité par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - Ry < 0$ et le cône ouvert de sommet (0,0,R) et de base

$$B = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Suggestion: Puisque U est un ouvert borné, il s'agit bien d'un corps. Il est intéressant d'utiliser la représentation paramétrique suivante pour B:

$$B(\theta, u) = (uR\sin(\theta)\cos(\theta), uR\sin^2(\theta), 0) \quad \text{pour } (\theta, u) \in]0, \pi[\times]0, 1[, \theta]$$

ce qui permet d'avoir la représentation paramétrique suivante pour U:

$$\varphi(\theta, u, v) = \left(uR\sin(\theta)\cos(\theta), uR\sin^2(\theta), vR\left(1 - u\sin(\theta)\right) \right),$$

pour $(\theta,u,v)\in]0,\pi[\times]0,1[\times]0,1[.$ On trouve direct ement

$$D_u \varphi(u, v, w) = (uR\cos(2\theta), uR\sin(2\theta), -uvR\cos(\theta)),$$

$$D_v \varphi(u, v, w) = (R\cos(\theta)\sin(\theta), R\sin^2(\theta), -vR\sin(\theta))$$

et

$$D_w \varphi(u, v, w) = (0, 0, R(1 - u \sin(\theta))).$$

Dès lors, le volume de U est donné par

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^1 u R^3 (1 - u \sin(\theta)) \sin^2(\theta) \, dv du d\theta = R^3 (\frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}).$$

Si le corps cylindrique U admet la représentation paramétrique

$$\varphi(u, v, w) = B(u, v) + wg(u, v)e$$
 pour $(u, v, w) \in \Omega \times]0, 1[$,

son volume est égal à

$$\iint_{\Omega} g(u,v) |\det(D_u B, D_v B, e)| du dv.$$

Exemple 4.5.25. Le volume d'un cylindre droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égal à $\pi R^2 H$. De fait, le corps cylindrique déterminé par $\Omega =]0, 2\pi[\times]0, R[$, $B(u,v) = (v\cos(u),v\sin(u),0), g = H\chi_{\Omega}$ et e = (0,0,1) est égal presque partout au cylindre droit à étudier, à un changement du système d'axes près. Ainsi, le volume est donné par

$$\int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} H \left| \det \begin{pmatrix} -v \sin(u) & v \cos(u) & 0\\ \cos(u) & \sin(u) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| du dv$$
$$= \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} Hv \, du dv = 2\pi H \frac{R^{2}}{2} = \pi H R^{2}.$$

Si le corps conique U admet la représentation paramétrique

$$\varphi(u, v, w) = S + w(B(u, v) - S)$$
 pour $(u, v, w) \in \Omega \times [0, 1]$,

son volume est égal à

$$\frac{1}{3} \iint_{\Omega} |\det(D_u B, D_v B, B - S)| \, du dv.$$

Exemple 4.5.26. Le volume d'un cône droit de hauteur H et de base circulaire de rayon R est égal à $\pi R^2 H/3$. De fait, le corps conique déterminé par $\Omega =]0, 2\pi[\times]0, R[, B(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), 0)$ et S = (0, 0, H) est égal presque partout au cône droit à étudier, à un changement du système d'axes près. Le volume vaut

$$\frac{1}{3} \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} \left| \det \begin{pmatrix} -v \sin(u) & v \cos(u) & 0\\ \cos(u) & \sin(u) & 0\\ v \cos(u) & v \sin(u) & -H \end{pmatrix} \right| du dv$$
$$= \frac{1}{3} \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} Hv \, du dv = \frac{1}{3} 2\pi H \frac{R^{2}}{2} = \frac{1}{3}\pi H R^{2}.$$

Si le corps de révolution U admet la représentation paramétrique

$$\varphi(u, v, w) = (|B(u, v) \wedge e| \cos(w), |B(u, v) \wedge e| \sin(w), \langle B(u, v), e \rangle),$$

pour $(u, v, w) \in \Omega \times]0, 2\pi[$, avec e = (0, 0, 1), son volume est égal à

$$2\pi \iint_{\Omega} |B \wedge e| \left| \det \left(\begin{array}{cc} D_u |B \wedge e| & D_u \langle B, e \rangle \\ D_v |B \wedge e| & D_v \langle B, e \rangle \end{array} \right) \right| du dv.$$

Si en outre on a B(u,v)=(0,y(u,v),z(u,v)) avec y(u,v)>0 pour tout $(u,v)\in\Omega$, cette formule devient

$$2\pi \iint_{\Omega} y(u,v) \left| \det \left(\begin{array}{cc} D_u y & D_u z \\ D_v y & D_v z \end{array} \right) \right| du dv.$$

Exercice 4.5.27. Traiter comme un corps de révolution les deux exemples précédents.

Exemple 4.5.28. Le volume de la boule de rayon R est égal à $4\pi R^3/3$. De fait, le corps de révolution déterminé par $\Omega = |-\pi/2, \pi/2| \times |0, R|$,

$$B(u, v) = (0, v \cos(u), v \sin(u))$$

est égal presque partout à la boule de rayon R à un changement du système d'axes près. Le volume est donné par la formule

$$2\pi \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v \cos(u) \left| \det \begin{pmatrix} -v \sin(u) & v \cos(u) \\ \cos(u) & \sin(u) \end{pmatrix} \right| du dv$$
$$= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) du \int_0^R v^2 dv = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exemple 4.5.29. Le volume du tore

$$T = \{(x, y, z) : d((x, y, z), \mathcal{C}) \le r\},\$$

où $C = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = R^2\}$ avec 0 < r < R vaut $2\pi^2 r^2 R$. De fait, si on se rend compte que le tore ci-dessus est obtenu par rotation du disque

$$\{(x,0,z): (x-R)^2 + z^2 \le r^2\}$$

autour de l'axe des z. Dès lors,

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi) \\ y = (R + \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi) \\ z = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

est un CVR d'ordre infini entre un ensemble égal presque partout à T et

$$\{(\rho, \theta, \varphi) : 0 < \rho < r, \ 0 < \theta < 2\pi, \ 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Cela donne lieu à

$$B(\rho, \theta) = (0, R + \rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)).$$

avec $\Omega =]0, r[\times]0, 2\pi[$, d'où

$$|T| = 2\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho(R + \rho \cos(\theta)) d\theta d\rho = 2\pi^2 r^2 R.$$

Définition 4.5.30. Un conoïde est un corps qui admet une représentation paramétrique du type

$$\varphi(u,v,w) = (wx(u,v),wa,z(u,v)) \quad \text{pour } (u,v,w) \in \Omega \times]0,1[,$$

avec a>0, et $x,z\in C^1(\Omega),$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2.$ La base de ce conoïde est l'ensemble

$$\{(x(u,v), a, z(u,v)) : (u,v) \in \Omega\}.$$

L'interprétation géométrique est simple : c'est l'union des segments d'extrémités

$$B(u, v) = (x(u, v), a, z(u, v))$$
 et $(0, 0, z(u, v))$,

pour $(u, v) \in \Omega$. Le volume d'un tel conoïde est égal à

$$\frac{a}{2} \iint_{\Omega} \left| \det \left(\begin{array}{cc} D_{u}x & D_{u}z \\ D_{v}x & D_{v}z \end{array} \right) \right| du dv.$$

Chapitre 5

Convergence

Dans ce chapitre, nous considérons diverses notions de convergence, introduisons les espaces L^p et présentons leurs propriétés premières. Ces considérations nous permettent d'introduire une définition alternative de l'intégrale.

5.1 Notions de convergence

Dans cette section, nous considérons plusieurs notions de convergence pour les suites d'applications mesurables. Nous ne considérerons que les applications à valeurs réelles; les résultats présentés s'adaptent cependant sans difficulté aux applications à valeurs complexes. Il en va de même pour les applications à valeurs étendues : si $(f_k)_k$ et f sont des applications à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, finies presque partout, il existe un ensemble N de mesure nulle tel que les fonctions $g_k = f_k \chi_{N^c}$ ($\forall k$) et $g = f \chi_{N^c}$ soient finies.

Définition 5.1.1. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, f une application réelle \mathscr{A} -mesurable et $(f_k)_k$ une suite d'applications réelles \mathscr{A} -mesurables sur X. La suite $(f_k)_k$ converge vers f en mesure si

$$\lim_{k} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}) = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Il existe des relations entre la convergence presque partout et la convergence en mesure.

Proposition 5.1.2. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, f une application réelle \mathscr{A} -mesurable et $(f_k)_k$ une suite d'applications réelles \mathscr{A} -mesurables sur X. Si la mesure μ est finie et si la suite $(f_k)_k$ converge vers f presque partout, alors la suite $(f_k)_k$ converge vers f en mesure.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $(A_k)_k$ la suite d'ensembles définie par

$$A_k = \{x \in X : |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}.$$

La suite d'ensembles $(B_k)_k$ définie par $B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$ est une suite décroissante telle que

$$\cap_k B_k \subset \{x \in X : (f_k(x))_k \text{ ne converge pas vers } f(x)\}.$$

Dès lors, $\mu(\cap_k B_k) = 0$ et la continuité des mesures implique $\lim_k \mu(B_k) = 0$. Puisque $A_k \subset B_k$, on a

$$\lim_{k} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}) = \lim_{k} \mu(A_k) = 0,$$

ce qui implique que la suite $(f_k)_k$ converge vers f en mesure.

La convergence presque partout n'implique pas la convergence en mesure.

Remarque 5.1.3. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ et la suite $(f_k)_k$, où $f_k = \chi_{[k,\infty[}$. Cette suite converge partout vers zéro, mais ne converge pas en mesure vers zéro, qui, par la proposition 5.1.4, est la seule limite possible pour la convergence en mesure.

La convergence en mesure n'implique pas la convergence presque partout.

Proposition 5.1.4. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, f une application réelle \mathcal{A} -mesurable et $(f_k)_k$ une suite d'applications réelles \mathcal{A} -mesurables sur X. Si la suite $(f_k)_k$ converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_k)_k$ qui converge vers f presque partout.

 $D\acute{e}monstration$. Puisque la suite converge en mesure, il existe un indice k_1 tel que

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - f_{k_1}(x)| > 1\}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Si l'indice k_{j-1} a été défini, il existe un indice $k_j > k_{j-1}$ tel que

$$\mu(\lbrace x \in X : |f(x) - f_{k_j}(x)| > \frac{1}{j} \rbrace) \leqslant \frac{1}{2^j}.$$

Pour tout indice j, soit l'ensemble

$$A_j = \{x \in X : |f(x) - f_{k_j}(x)| > \frac{1}{i}\}.$$

Si $x \notin \cap_i \cup_{j=i}^{\infty} A_j$, il existe un indice i tel que $x \notin \cup_{j=i}^{\infty} A_j$ et donc tel que $|f(x) - f_{k_j}(x)| \le 1/j$ quel que soit $j \ge i$. Autrement dit, la suite $(f_{k_j})_j$ converge vers f aux points x n'appartenant pas à $\cap_i \cup_{j=i}^{\infty} A_j$. Puisque

$$\mu(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j) \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} \mu(A_j) \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i-1}},$$

pour tout i, on a $\mu(\cap_i \cup_{j=i}^{\infty} A_j) = 0$, ce qui termine la preuve.

La convergence en mesure n'implique pas la convergence presque partout.

Remarque 5.1.5. Soit l'espace mesuré ($[0,1[,\mathcal{B}([0,1[),\mathcal{L}).$ Étant donné un nombre naturel k, définissions j(k) l'unique nombre naturel tel que $2^{j(k)} \leq k < 2^{j(k)+1}$, soit

$$f_k = \chi_{[\frac{k-2^j(k)}{2^j(k)}, \frac{k-2^j(k)+1}{2^j(k)}[}.$$

Il s'agit de fonctions caractéristiques constituant une partition de plus en plus fine de l'intervalle unité. Bien sûr, la suite $(f_k)_k$ ainsi définie converge vers zéro en mesure. Pour tout x, la suite $(f_k(x))_k$ est composée d'un nombre infini de 0 et de 1; elle ne peut donc converger.

Le résultat suivant fournit une autre notion de convergence.

Proposition 5.1.6 (Théorème d'Egoroff). Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, f une application réelle \mathcal{A} -mesurable et $(f_k)_k$ une suite d'applications réelles \mathcal{A} -mesurables sur X. Si la mesure μ est finie et si la suite $(f_k)_k$ converge vers f presque partout, alors pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble A de X appartenant à \mathcal{A} vérifiant $\mu(A^c) < \varepsilon$ tel que la suite $(f_k)_k$ converge vers f uniformément sur A.

 $D\acute{e}monstration$. Soient $\varepsilon > 0$ et pour tout indice k, posons $g_k = \sup_{j \geqslant k} |f - f_j|$. Pour tout indice k fixé, g_k est fini presque partout. La suite $(g_k)_k$ converge vers zéro presque partout et donc, par la Proposition 5.1.2, la suite converge également en mesure. Dès lors, pour tout j, il existe un indice k_j tel que

$$\mu(\lbrace x \in X : g_{k_j}(x) > 1/j \rbrace) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Pour tout indice j, définissons l'ensemble $A_j=\{x\in X:g_{k_j}(x)\leqslant 1/j\}$ et posons $A=\cap_j A_j$. On a

$$\mu(A^c) = \mu(\bigcup_j A_j^c) \leqslant \sum_j \mu(A_j^c) < \sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Soit $\delta > 0$. Si j est un indice tel que $1/j < \delta$, on a pour tout $x \in A$, puisque $A \subset A_j$,

$$|f(x) - f_k(x)| \leq g_{k_j}(x) \leq 1/j < \delta,$$

pour tout indice $k \ge k_j$. Ainsi, la suite $(f_k)_k$ converge uniformément vers f sur A.

La définition suivante est inspirée du théorème d'Egoroff.

Définition 5.1.7. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, f une application réelle \mathscr{A} -mesurable et $(f_k)_k$ une suite d'applications réelles \mathscr{A} -mesurables sur X. La suite $(f_k)_k$ converge vers f presque uniformément si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous ensemble A de X appartenant à \mathscr{A} et satisfaisant $\mu(A^c) < \varepsilon$ tel que $(f_k)_k$ converge uniformément vers f sur A.

Si la suite $(f_k)_k$ converge presque uniformément vers f, alors elle converge aussi presque partout vers la même limite.

Remarque 5.1.8. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, f une application réelle \mathcal{A} -mesurable et $(f_k)_k$ une suite d'applications réelles \mathcal{A} -mesurables sur X. Supposons que la suite $(f_k)_k$ converge vers f presque uniformément, mais pas presque partout. Il existe alors un ensemble B non-négligeable pour lequel $x \in B$ implique que la suite $(f_k(x))$ ne converge pas vers f(x). Supposons avoir $\mu(B) = \delta > 0$ et soit A un ensemble mesurable tel que $\mu(A^c) < \delta/2$ et pour lequel la suite $(f_k)_k$ converge uniformément vers f sur A. En posant $A' = B \setminus A^c$, on a $\delta/2 < \mu(A') \leqslant \delta$ avec $A' \subset A$ et la suite $(f_k)_k$ ne peut converger uniformément vers f sur A'.

Par ce qui précède, le théorème d'Egoroff implique que sur les espaces mesurés finis, la convergence presque uniforme et la convergence presque partout sont équivalentes.

Définissons un dernier type de convergence.

Définition 5.1.9. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $(f_k)_k$ une suite de $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. La suite $(f_k)_k$ converge vers f en moyenne si

$$\lim_{k} \int |f - f_k| \, d\mu = 0.$$

Proposition 5.1.10. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $(f_k)_k$ une suite de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Si la suite $(f_k)_k$ converge vers f en moyenne, alors elle converge également en mesure vers la même limite.

Démonstration. La Proposition 2.3.14 implique

$$\mu(\lbrace x \in X : |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon \rbrace) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int |f - f_k| \, d\mu,$$

ce qui permet de conclure.

Corollaire 5.1.11. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $(f_k)_k$ une suite de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Si la suite $(f_k)_k$ converge vers f en moyenne, il existe une sous-suite convergeant vers f presque partout.

Démonstration. C'est une conséquence directe des Propositions 5.1.4 et 5.1.10.

Ni la convergence presque partout ni la convergence en mesure n'impliquent la convergence en moyenne.

Remarque 5.1.12. Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ et la suite $(f_k)_k$ définie par $f_k = k\chi_{[0,1/k]}$. Cette suite converge vers zéro presque partout et en mesure. Puisque $\int |f_k| d\mathcal{L} = 1$, cette suite ne converge cependant pas en moyenne.

Il existe cependant des hypothèses sous lesquelles les autres convergences impliquent la convergence en moyenne.

Proposition 5.1.13. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $(f_k)_k$ une suite de $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. Si la suite $(f_k)_k$ converge vers f presque partout ou en mesure et s'il existe une application g à valeurs dans $[0, \infty]$ intégrable telle que $|f_k| \leq g$ ($\forall k$) et $|f| \leq g$ presque partout, alors la suite $(f_k)_k$ converge vers f en moyenne.

Démonstration. Supposons d'abord que la suite converge presque partout; la suite $(|f - f_k|)_k$ converge donc vers zéro presque partout. Par hypothèse, $|f - f_k| \leq 2g$ et le théorème de la convergence dominée implique la convergence en moyenne.

Supposons maintenant avoir la convergence en mesure. Par la Proposition 5.1.4, toute sous-suite de la suite $(f_k)_k$ possède une sous-suite convergeant vers f presque partout et donc aussi en moyenne, par la première partie de la démonstration. Si la suite $(f_k)_k$ ne converge pas vers f en moyenne, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (f_{k_j}) tels que $\int |f - f_{k_j}| d\mu \geqslant \varepsilon$ pour tout j. Cependant, nous avons montré qu'il existe une sous-suite de la suite (f_{k_j}) convergeant vers f en moyenne. Nous avons donc une contradiction et par conséquent, la suite $(f_k)_k$ converge vers f en moyenne.

5.2 Les espaces \mathcal{L}^p et L^p

Les espaces L^p sont de première importance en analyse. Ils sont ici introduits et une norme leur est associée

Commençons par introduire un critère permettant de vérifier si un espace linéaire normé est complet.

Proposition 5.2.1. Un espace linéaire normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente.

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace complet et $\sum_k x_k$ une série absolument convergente de E. Soient $(s_k)_k$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_k x_k$ et $(t_k)_k$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_k \|x_k\|$. Si m < n, on a

$$||s_n - s_m|| = ||\sum_{k=m+1}^n x_k|| \le \sum_{k=m+1}^n ||x_k|| = t_n - t_m.$$
 (5.1)

Puisque la série considérée est absolument convergente, la suite $(t_k)_k$ est une suite de Cauchy; par la relation (5.1), il en va de même pour la suite $(s_k)_k$. L'espace E étant complet, la suite $(s_k)_k$ et donc la série $\sum_k x_k$ convergent.

Supposons maintenant que toute série absolument convergente de $(E, \| \cdot \|)$ soit convergente et soit $(x_k)_k$ une suite de Cauchy de E. Puisque la suite est de Cauchy, il existe une sous-suite $(x_{k_j})_j$ vérifiant $\|x_{k_j}-x_{k_{j+1}}\| \le 2^{-j-1}$ pour tout j (pour tout j, il existe k_j tel que $\|x_k-x_l\| \le 2^{-j-1} \ \forall k, l \ge k_j$; il existe ensuite k_{j+1} tel que $\|x_k-x_l\| \le 2^{-j-2} \ \forall k, l \ge k_{j+1}$). Soit $(y_j)_j$ la suite définie par $y_1 = x_{k_1}$ et $y_{j+1} = x_{k_{j+1}} - x_{k_j} \ \forall j \ge 1$; en d'autres termes, la suite $(x_{k_j})_j$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_k y_k$. Cette série est absolument convergente et donc convergente. Ainsi, la suite $(x_{k_j})_j$ converge vers une limite x. La suite $(x_k)_k$ converge également vers x, puisque la quantité $\|x-x_k\| \le \|x-x_{k_j}\| + \|x_{k_j}-x_k\|$ peut être rendue arbitrairement petite par un choix d'indices (k et j) assez grands. L'espace E est donc complet.

Afin de définir, les espaces L^p , nous devons d'abord introduire les espaces \mathcal{L}^p .

Définition 5.2.2. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et p un nombre de $[1, \infty[$. L'espace $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications $f: X \to \mathbb{R}$ \mathscr{A} -mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable.

Proposition 5.2.3. L'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant (2\max\{|f(x)|, g(x)|\})^p \leqslant 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p$$
 pour tout $x \in X$ et donc $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$.

Bien sûr, pour les applications à valeurs complexes, les espaces $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ se définissent de manière analogue (si f est une application à valeurs complexes qui est mesurable, alors |f| l'est également). L'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ est aussi un espace vectoriel.

Nous allons maintenant introduire l'espace \mathscr{L}^{∞} . Pour ce faire, nous aurons besoins de quelques remarques préliminaires.

Définition 5.2.4. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. Un sous-ensemble N de X est localement négligeable (ou localement μ -négligeable si la mesure doit être précisée) si pour tout ensemble $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$, l'ensemble $A \cap N$ est μ -négligeable. Une propriété est vérifiée localement presque partout si l'ensemble des points pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée est localement négligeable.

Bien sûr, tout sous-ensemble μ -négligeable de X est localement négligeable. Si l'espace (X, \mathcal{A}, μ) est σ -fini, alors tout ensemble localement μ -négligeable est également μ -négligeable (pour le voir, il suffit de prendre une partition $(X_k)_k$ de X constituée d'ensembles de mesure finie, d'appliquer la définition à $X_k \cap N$ et de constater que $N = \bigcup_k X_k \cap N$). Remarquons également que l'union de suite d'ensembles localement négligeables est localement négligeable.

Définition 5.2.5. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. Une application $f: X \to \mathbb{R}$ est essentiellement bornée s'il existe un nombre positif c tel que $\{x \in X : |f(x)| > c\}$ est localement μ -négligeable. L'espace $\mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications $f: X \to \mathbb{R}$ qui sont \mathscr{A} -mesurables et essentiellement bornées.

Remarquons qu'il est courant de définir l'espace $\mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ en remplaçant, dans la définition précédente, l'expression « localement négligeable » par « négligeable ». Cette dernière définition plus restrictive demande de modifier certains énoncés, mais reste sans réelle conséquence sur la théorie.

Proposition 5.2.6. L'espace $\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Démonstration. Soient $f, g \in \mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que |f| et |g| n'excèdent c_1 et c_2 respectivement que sur des ensembles localement négligeable seulement. L'ensemble $\{x \in X : |\alpha f(x)| > |\alpha|c_1\}$ est localement négligeable et donc $\alpha f \in \mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. De même, $\{x \in X : |f(x) + g(x)| > c_1 + c_2\}$ est un ensemble localement négligeable, ce qui implique $f + g \in \mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$.

De la même manière, on peut définir l'espace vectoriel $\mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{C})$.

Dans, la suite, puisque les résultats sont valides pour les espaces $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ $(p \in [1, \infty])$, nous utiliserons la notation $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour désigner indifféremment un de ces deux espaces.

Définition 5.2.7. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Si p est un nombre de $[1, \infty[$, nous désignerons $\|\cdot\|_p$ l'application

$$\|\cdot\|_p: \mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto (\int |f|^p \, d\mu)^{1/p}.$$

Si $N_f(c) = \{x \in X : |f(x)| > c\}$, on pose

$$||f||_{\infty} = \inf\{c \geq 0 : N_f(c) \text{ est localement } \mu\text{-négligeable}\}.$$

Remarquons que si $f \in \mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$, alors si $(c_k)_k$ est une suite réelle strictement décroissante telle que $\lim_k c_k = \|f\|_{\infty}$, alors l'ensemble $N_f(c_k)$ est localement μ -négligeable $\forall k$ et $N_f(\|f\|_{\infty})$ est l'union des ensembles $N_f(c_k)$. L'ensemble $N_f(\|f\|_{\infty})$ est donc lui-même localement μ -négligeable et $|f| \leq \|f\|_{\infty}$ localement presque partout.

Nous allons maintenant montrer que les applications $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$ définissent des semi-normes. Pour ce faire, il nous faut introduire la notation suivante.

Définition 5.2.8. Soit p un nombre de $]1, \infty[$; puisqu'on a 0 < 1/p < 1, il existe un nombre réel q tel que 1/p + 1/q = 1. Les nombres p et q sont appelés des *exposants conjugués*. Si p = 1, l'exposant conjugué de p est $q = \infty$; si $p = \infty$, l'exposant conjugué de p est q = 1.

Nous avons donc défini l'exposant conjugué de p lorsque $p \in [1, \infty]$. Remarquons que si p et q sont des exposants conjugués, alors p + q = pq. De plus, si p et q sont finis, p = q(p-1) et q = p(q-1).

Lemme 5.2.9. Soit p un nombre tel que $p \in]1, \infty[$ et q son exposant conjugué. On a, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Démonstration. Le résultat est évident si x ou y est nul. Supposons donc le contraire. En posant $u=x^p$ et $v=y^q$, il suffit de prouver que $\forall u,v\in\mathbb{R}^+_*,\ u^{1/p}v^{1/q}\leqslant u/p+v/q$. Cette inégalité devient, en posant $t=u/v,\ t^{1/p}\leqslant t/p+1/q$. La fonction

$$\mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{t}{p} + \frac{p-1}{p} - t^{1/p}$$

prend la valeur zéro en son minimum global atteint en t=1, ce qui suffit.

Proposition 5.2.10 (Inégalité de Hölder). Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, p un élément de $[1, \infty]$ et q l'exposant conjugué de p. Si $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $g \in \mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$, alors $fg \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ et satisfait $\int |fg| d\mu \leq ||f||_p ||g||_q$.

Démonstration. Supposons d'abord que p=1 et $q=\infty$. Si $f\in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$, par le corollaire 2.3.15, l'ensemble $\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ est σ -fini par μ et si $g\in \mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$, l'ensemble $\{x\in X: g(x)>\|g\|_\infty\}$ est localement μ -négligeable. L'intersection de ces deux ensembles est donc un ensemble μ -négligeable. Ainsi, l'inégalité $|f(x)g(x)|\leqslant \|g\|_\infty |f(x)|$ est vérifiée pour presque tout $x\in X$. Dès lors, $fg\in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$ et

$$\int |fg| \, d\mu \leqslant \int ||g||_{\infty} |f| \, d\mu = ||g||_{\infty} ||f||_{1}.$$

De cette manière, nous avons aussi démontré le cas $p=\infty$ et q=1.

Soient maintenant $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, avec $\in]1, \infty[$. Si $||f||_p = 0$ ou $||g||_q = 0$, alors fg = 0 presque partout et il n'y a plus rien à démontrer. Dans le cas contraire, soit $f_p = f/||f||_p$ et $g_q = g/||g||_q$. Le Lemme 5.2.9 implique

$$|f_p(x)g_q(x)| \le \frac{1}{p}|f_p(x)|^p + \frac{1}{q}|g_q(x)|^q,$$

pour tout $x \in X$. Dès lors, $f_p g_q \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et

$$\int |f_p g_q| \, d\mu \leqslant \frac{1}{p} \int |f_p(x)|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int |g_q(x)|^q \, d\mu = 1.$$
 (5.2)

Bien sûr, $f_pg_q\in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$ implique $fg\in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$ et l'inégalité (5.2) peut se ré-écrire

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| \, d\mu \leqslant 1,$$

ce qui suffit pour conclure.

Proposition 5.2.11 (Inégalité de Minkowski). Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et p un élément de $[1, \infty]$. Si f et g sont des applications de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.

Démonstration. Supposons d'abord que $p = \infty$. Soit $N_1 = \{x \in X : f(x) > ||f||_{\infty}\}$ et $N_2 = \{x \in X : g(x) > ||g||_{\infty}\}$. Nous avons vu que N_1 et N_2 sont localement μ -négligeable et on a donc

$$|f(x) + q(x)| \le |f(x)| + |q(x)| \le ||f||_{\infty} + ||q||_{\infty}$$

pour tout x n'appartenant pas à l'ensemble localement négligeable $N_1 \cup N_2$. Ainsi, $||f + g||_{\infty} \leq ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty}$.

Supposons ensuite que p=1. On a bien sûr $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ pour tout $x \in X$ et

$$||f+g||_1 = \int |f+g| \, d\mu \leqslant \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = ||f||_1 + ||g||_1.$$

Supposons enfin que \in]1, ∞ [. Puisque \mathscr{L}^p est un espace vectoriel, f+g est un élément de $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$. Si $\|f+g\|_p=0$, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, soit q l'exposant conjugué de p. Puisque $|f+g|^p=(|f+g|^{p-1})^q, |f+g|^{p-1}$ appartient à $\mathscr{L}^q(X,\mathscr{A},\mu)$. En utilisant la relation $|f+g|^p\leqslant (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}$ et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int |f+g|^p d\mu \leqslant \int |f| |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\leqslant ||f||_p || |f+g|^{p-1}||_q + ||g||_p || |f+g|^{p-1}||_q$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) || |f+g|^{p-1}||_q$$

$$= (||f||_p + ||g||_p) (\int |f+g|^p d\mu)^{1-1/p}.$$

Cette inégalité peut se ré-écrire, puisque $||f+g||_p \neq 0$, $||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$, ce qui devait être montré.

Corollaire 5.2.12. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$; l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur cet espace.

Démonstration. Nous avons déjà montré que $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel. Le fait que $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme est trivial si on utilise l'inégalité de Minkowski pour démontrer l'inégalité triangulaire.

S'il existe un ensemble non-vide de X appartenant à \mathscr{A} et de mesure nulle pour μ , il existe des applications non-nulles f de $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ telles que $||f||_p = 0$. Les espaces \mathscr{L}^p ne sont ainsi pas normés.

Définition 5.2.13. Étant donné un espace mesuré (X, \mathscr{A}, μ) , soit $\mathscr{L}_0^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ le sousespace de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ consistant en les applications de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ telles que $||f||_p = 0$.

Ainsi, si $p \in [1, \infty[$, $\mathscr{L}_0^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est l'ensemble des applications \mathscr{A} -mesurables dans X s'annulant presque partout; $\mathscr{L}_0^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ est formé de l'ensemble des applications \mathscr{A} -mesurables dans X qui s'annulant localement presque partout. Dans tous les cas, il est clair que $\mathscr{L}_0^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un sous-espace linéaire de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. En définissant la relation d'équivalence $\cdot \sim \cdot$ par $f \sim g$ si et seulement si $f - g \in \mathscr{L}_0^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, il est clair que, si $p \in [1, \infty[$, $f \sim g$ si et seulement si f = g presque partout.

Définition 5.2.14. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$; l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est le quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ par l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Autrement dit, $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est le quotient de l'espace $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ par la relation \sim définie plus haut. Basiquement, $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est obtenu à partir de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ en identifiant les fonctions égales presque partout si $p < \infty$, localement presque partout si $p = \infty$. On constate sans peine que $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace vectoriel. Si f et g sont deux applications de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ telles que $f \sim g$, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Définition 5.2.15. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$; si f est une application de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, notons $\langle f \rangle$ sa classe d'équivalence dans $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. Nous désignerons par $\|\cdot\|_{L^p}$ l'application

$$\|\cdot\|_{L^p}: L^p(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R} \quad \langle f \rangle \mapsto \|f\|_p$$

Proposition 5.2.16. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$; l'espace $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur cet espace.

Démonstration. Nous avons déjà montré que $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace vectoriel. Le fait que $\|\cdot\|_{L^p}$ est une semi-norme découle du fait que $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme pour l'espace $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. De plus, si $\langle f \rangle$ est un élément de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ tel que $\|\langle f \rangle\|_{L^p} = 0$, alors $\langle f \rangle = \langle 0 \rangle$.

Afin d'alléger les notations, il est courant de considérer $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ comme un espace d'applications et de confondre classe et représentant. On peut alors écrire $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et considérer la norme $\|\cdot\|_p$ sur cet espace : $\|f\|_p = \|\langle f \rangle\|_{L^p}$. Dans la suite, nous tenterons d'éviter autant que possible cet abus de notation au demeurant fort utile.

Terminons cette section en comparant les espaces \mathcal{L}^p entre eux.

Proposition 5.2.17. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré fini et p, q tels que $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$; on a $\mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $||f||_p \leqslant ||f||_q \mu(X)^{1/p-1/q}$.

Démonstration. Soit f une application \mathscr{A} -mesurable appartenant à $\mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$. Si $q = \infty$, $|f| \leq ||f||_{\infty}$ presque partout, donc $|f|^p \leq ||f||_{\infty}^p \chi_X$ presque partout et

$$||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p} \leqslant ||f||_{\infty} (\int (\chi_X)^p d\mu)^{1/p} = ||f||_{\infty} \mu(X)^{1/p}.$$

Supposons maintenant que $q < \infty$. Soit r = q/p et s l'exposant conjugué de r. On a $|f|^p \leq |f|^q + \chi_X$ et l'inégalité de Hölder donne, puisque $|f|^p \in \mathcal{L}^r(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$||f||_p^p = \int |f|^p \chi_X d\mu \leqslant ||f|^p ||_r ||\chi_X||_s = (\int |f|^q d\mu)^{p/q} \mu(X)^{1-1/r} = ||f||_q^p \mu(X)^{1-p/q},$$

ce qui suffit pour conclure.

On ne peut rien conclure sur l'inclusion des espaces \mathscr{L}^p si la mesure n'est pas finie. Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ et les fonctions $f_{\alpha}(x) = x^{\alpha}\chi_{]0,1[}(x)$, $g_{\alpha}(x) = x^{\alpha}\chi_{[1,\infty[}(x))$. On a $f_{\alpha} \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ si et seulement si $\alpha p > -1$ et $g_{\alpha} \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ si et seulement si $\alpha p < -1$. Si $1 \leq p < q$ et $\alpha \in]-1/p,-1/q[$, on a donc $f_{\alpha} \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L}) \setminus \mathscr{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$ et $g_{\alpha} \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L}) \setminus \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$.

Exemple 5.2.18. Si X est un ensemble, soit μ la mesure de dénombrement définie par

$$\mu: \mathscr{P}(X) \to [0,\infty] \quad E \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \#E & \text{si E est un ensemble fini} \\ \infty & \text{sinon} \end{array} \right.$$

bien sûr, $\mu(E) = 0$ si et seulement si $E = \emptyset$. On désigne par $l^p(X)$ l'espace normé $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{P}(X), \mu)$. Si X est l'ensemble \mathbb{N}_0 ou \mathbb{Z} , on note de manière générique x. une fonction définie sur un tel ensemble plutôt que $f(\cdot)$. Dans ce cas, étant donné une suite

^{1.} Dans la prochaine section, il est montré qu'il s'agit d'espaces de Banach.

 x_k , la fonction f_n définie par $f_n = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{\{k\}}$ est une fonction simple qui converge vers $x_n = (x_k)_k$; on vérifie directement que l'on a

$$||x.||_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$$

si $p < \infty$ et $||x_{\cdot}||_{\infty} = \sup_{k} |x_{k}|$. En particulier, $l^{1}(\mathbb{N}_{0})$ est l'espace des suites absolument convergentes et $l^{\infty}(\mathbb{N}_{0})$ l'espace des suites bornées. Les théorèmes relatifs aux mesures s'appliquent donc à ces espaces l^{p} .

5.3 Propriétés des espaces \mathcal{L}^p et L^p

Nous allons maintenant nous pencher sur les premières propriétés des espaces L^p . En particulier, les espaces L^p sont des espaces de Banach (c'est une partie du théorème de Riesz-Fischer).

Théorème 5.3.1. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$; l'espace $(L^p(X, \mathscr{A}, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach.

Démonstration. Vu la Proposition 5.2.1, il nous faut montrer que toute série absolument convergente de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est convergente.

Supposons d'abord que $p = \infty$ et soit $(f_k)_k$ une suite d'applications de $\mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$ telle que $\sum_k \|f_k\|_{\infty} < \infty$. Pour tout k, soit $N_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_{\infty}\}$. La série $\sum_k f_k(x)$ converge pour tout x n'appartenant pas à $\bigcup_k N_k$ et l'application $f = \sum_k f_k \chi_{\cap_k N_k^c}$ est bornée et \mathscr{A} -mesurable. L'ensemble $\bigcup_k N_k$ étant localement négligeable, on a

$$||f - \sum_{k=1}^{l} f_k||_{\infty} \le \sum_{k=l+1}^{\infty} ||f_k||_{\infty},$$

pour tout l et donc $\lim_l \|f - \sum_{k=1}^l f_k\|_{\infty} = 0$, ce qui implique que l'espace $L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est complet.

Supposons maintenant que $p \in [1, \infty[$ et soit $(f_k)_k$ une suite d'applications de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\sum_k \|f_k\|_p < \infty$. Soit $g: X \to [0, \infty]$ l'application telle que $g(x) = (\sum_k |f_k(x)|)^p$. L'inégalité de Minkowski permet d'écrire $\|\sum_{k=1}^l |f_k|\|_p \leqslant \sum_{k=1}^l \|f_k\|_p$ pour tout l. Cette inégalité et le théorème de la convergence monotone impliquent alors

$$\int g \, d\mu = \lim_{l} \int (\sum_{k=1}^{l} |f_k|)^p \, d\mu = \lim_{l} \|\sum_{k=1}^{l} |f_k|\|_p^p = \|\lim_{l} (\sum_{k=1}^{l} \|f_k\|_p)^p = (\sum_{k=1}^{l} \|f_k\|_p)^p.$$

Ainsi, g est intégrable et donc, par le corollaire 2.3.17, g(x) est fini pour presque tout x. Il en résulte que la série $\sum_k f_k(x)$ est absolument convergente et donc convergente pour presque tout x. Soit $N = \{x \in X : g(x) < \infty\}$; l'application $f = \sum_k f_k \chi_N$ est mesurable et vérifie $|f|^p \leq g$, ce qui implique que f appartient à $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. Bien sûr, $\lim_l |f(x) - \sum_{k=1}^l f_k(x)| = 0$ et $|f(x) - \sum_{k=1}^l f_k(x)|^p \leq g(x)$ pour presque tout x. Le théorème de la convergence dominée implique $\lim_l \|f - \sum_{k=1}^l f_k\|_p = 0$, ce qui montre que l'espace $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est complet.

Voici un résultat un peu plus précis et ne faisant pas appel à la Proposition 5.2.1.

Théorème 5.3.2. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$; l'espace $(L^p(X, \mathscr{A}, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach. De plus, de toute suite qui converge dans $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, on peut extraire une sous-suite qui converge ponctuellement vers la même limite presque partout $si \ p < \infty$ et localement presque partout $si \ p = \infty$.

Démonstration. Traitons d'abord le cas $p = \infty$. Soit $(f_k)_k$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$ et posons, pour tous nombres k, m, n naturels non nuls,

$$N_k = \{x \in X : |f_k(x)| > ||f_k||_{\infty} \}$$
 et $N_{m,n} = \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > ||f_m - f_n||_{\infty} \}.$

Ces ensembles sont localement négligeables et donc l'ensemble $N=(\cup_k N_k)\cup(\cup_{m,n}N_{m,n})$ est localement négligeable. Posons $g_k=f_k\chi_{N^c}$; cette suite est de Cauchy, donc bornée. Soit f sa limite; cette fonction est également bornée : pour tout $\varepsilon>0$ et tous indices k,l assez grands, on a $|g_k(x)-g_l(x)|<\varepsilon$ et donc $|g_k(x)-f(x)|<\varepsilon$ $(x\in X)$. Par conséquent, f appartient à $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ (on peut remarquer que la suite g_k converge uniformément vers f car elle est uniformément de Cauchy) et, par construction, f_k converge vers f dans cet espace.

Supposons maintenant avoir $p < \infty$ et soit $(f_k)_k$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. On construit aisément une sous-suite $(f_{l_k})_k$ telle que $||f_{l_{k+1}} - f_{l_k}||_p < 2^{-k}$ pour tout indice k. Posons $g_m = (\sum_{k=1}^m |f_{l_{k+1}} - f_{l_k}|)^p$; il s'agit dune fonction de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. De plus, on a

$$\int g_m d\mu = \|\sum_{k=1}^m |f_{l_{k+1}} - f_{l_k}|\|_p^p \leqslant (\sum_{k=1}^m \|f_{l_{k+1}} - f_{l_k}\|_p)^p \leqslant 1.$$

Par le théorème de la convergence monotone, g_m converge presque partout vers une fonction g de $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$. En conséquence, $\sum_{k=1}^m f_{l_{k+1}} - f_{l_k} = f_{l_{m+1}} - f_{l_1}$ converge presque partout; on en déduit que la suite f_{l_k} converge presque partout vers une fonction f. Bien sûr, étant donné un indice $n, |f_{l_n} - f_{l_k}|^p$ est intégrable pour tout k et converge presque partout vers $|f_{l_n} - f|^p$. Puisqu'on a trivialement $|f_{l_n} - f_{l_k}|^p \leqslant g$, le théorème de la convergence dominée implique que la limite $|f_{l_n} - f|^p$ est un élément de $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ et

$$\lim_{k} \int |f_{l_n} - f_{l_k}|^p d\mu = \int |f_{l_n} - f|^p d\mu.$$

En conséquence, puisque la suite f_{l_k} est de Cauchy dans $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout nombre naturel n suffisamment grand, on a $||f_{l_n} - f||_p < \varepsilon$, ce qui suffit pour assurer la convergence de la suite f_{l_k} dans $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Proposition 5.3.3. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$; les fonctions simples de l'espace $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ forment un sous-espace dense de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et définissent donc un sous-espace dense de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Démonstration. Démontrons ce résultat pour $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$; le cas des applications à valeurs complexes s'obtient en considérant séparément les parties réelle et imaginaire.

Supposons d'abord que $1 \leq p < \infty$ et soit f une application de $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{R})$. Par la Proposition 2.1.12, il existe deux suites croissantes $(g_k)_k$ et $(h_k)_k$ de $\mathscr{S}^+(X,\mathscr{A})$ telles que $\lim_k g_k = f^+$ et $\lim_k h_k = f^-$. Pour tout k, l'application $f_k = g_k - h_k$ est une application de $\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$ satisfaisant $|f_k| < |f|$; elle appartient donc à l'espace $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{R})$. Bien sûr, $|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x)|$ et $\lim_k |f(x) - f_k(x)| = 0$ pour tout x. Le théorème de la convergence dominée (appliqué à la suite $(|f - f_k|^p)_k$) implique alors $\lim_k ||f - f_k||_p = 0$, ce qui termine la preuve lorsque $p < \infty$.

Supposons maintenant que $p=\infty$. Soient f une application de $\mathscr{L}^{\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{R})$ et $\varepsilon>0$. Soient $(y_k)_{k=0}^N$ des nombres strictement croissante telle que $(]y_{k-1},y_k])_{k=1}^N$ forme un recouvrement de l'intervalle $[-\|f\|_{\infty},\|f\|_{\infty}]$ subordonné à ε (i.e. telle que $y_k-y_{k-1}\leqslant\varepsilon$). Soit $A_k=f^{-1}(]y_{k-1},y_k]$) et posons $f_{\varepsilon}=\sum_{k=1}^N y_k\chi_{A_k}$. L'application f_{ε} est un élément de $\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$ qui vérifie $\|f-f_{\varepsilon}\|_{\infty}\leqslant\varepsilon$. Puisque ε est arbitraire, la résultat est démontré pour le cas $p=\infty$.

Intéressons-nous maintenant à la séparabilité des espaces L^p .

Définition 5.3.4. Une σ -algèbre $\mathscr A$ sur un ensemble X est dite engendrée de manière dénombrable s'il existe une famille dénombrable $\mathscr C\subset\mathscr A$ telle que $\mathscr A=\sigma(\mathscr C)$.

Puisque la σ -algèbre \mathbb{B} est engendrée par la collection des intervalles du type $]-\infty,x]$, avec $x\in\mathbb{Q}$ (il suffit de constater que pour tout $y\in\mathbb{R},\]-\infty,y]=\cap_{x\in\mathbb{Q},x\geqslant y}]-\infty,x]$), elle est engendré de manière dénombrable. Nous aurons besoin de deux lemmes

Lemme 5.3.5. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré fini et \mathscr{A}_0 une algèbre de sous-ensembles de X telle que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{A}_0)$. Alors \mathscr{A}_0 est dense dans \mathscr{A} au sens où, pour tous $A \in \mathscr{A}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $A_0 \in \mathscr{A}_0$ tel que $\mu(A \triangle A_0) < \varepsilon$.

Démonstration. Soit \mathscr{F} la collection des ensembles A de \mathscr{A} tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble A_0 de \mathscr{A}_0 tel que $\mu(A \triangle A_0) < \varepsilon$. Bien sûr, $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{F}$ et donc $X \in \mathscr{F}$. Puisque $A^c \triangle A_0^c = A \triangle A_0$, si $A \in \mathscr{F}$, alors $A^c \in \mathscr{F}$. Soit maintenant $(A_k)_k$ une suite d'ensembles de \mathscr{F} et posons $A = \bigcup_k A_k$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la continuité des mesures, il existe un nombre l_0 tel que $\mu(A \setminus \bigcup_{k=1}^{l_0} A_k) < \varepsilon/2$. Pour tout $k \leq l_0$, soit B_k un élément de \mathscr{A}_0 tel que $\mu(A_k \triangle B_k) < \varepsilon/(2l_0)$ et posons $B = \bigcup_{k=1}^{l_0} B_k$. On a $B \in \mathscr{A}_0$ et

$$\mu(A\triangle B)\leqslant \mu(A\triangle\bigcup_{k=1}^{l_0}A_k)+\mu((\bigcup_{k=1}^{l_0}A_k)\triangle B)<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^{l_0}\frac{\varepsilon}{2l_0}=\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, $A \in \mathscr{F}$. Nous venons donc de montrer que \mathscr{F} est une σ -algèbre. Comme $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{A} = \sigma(\mathscr{A}_0)$, on a $\mathscr{F} = \mathscr{A}$.

Lemme 5.3.6. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et \mathscr{A}_0 une algèbre de X telle que $\sigma(\mathscr{A}_0) = \mathscr{A}$ et X soit l'union d'une suite d'éléments de \mathscr{A}_0 de mesure finie par μ . Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$, il existe un ensemble $A_0 \in \mathscr{A}_0$ tel que $\mu(A \triangle A_0) < \varepsilon$.

Démonstration. Soit $(X_k)_k$ une suite d'éléments de \mathscr{A}_0 telle que $\mu(X_k) < \infty \ \forall k$ et $X = \bigcup_k X_k$. Quitte à remplacer X_k par $\bigcup_{j=1}^k X_j$, on peut supposer que cette suite est croissante. Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$. La continuité des mesures appliquée à la suite $(A \cap X_k)_k$ implique l'existence d'un indice k_0 tel que $\mu(A \cap X_{k_0}) > \mu(A) - \varepsilon/2$. La mesure $B \mapsto \mu(B \cap X_{k_0})$ étant finie, le Lemme 5.3.5 implique l'existence d'un ensemble $A_0 \in \mathscr{A}_0$ tel que $\mu((A \triangle A_0) \cap X_{k_0}) < \varepsilon/2$. Bien sûr $A_0 \cap X_{k_0} \in \mathscr{A}_0$ et

$$\mu(A\triangle(A_0 \cap X_{k_0})) \leqslant \mu(A\triangle(A \cap X_{k_0})) + \mu((A \cap X_{k_0})\triangle(A_0 \cap X_{k_0}))$$

= $\mu(A \setminus (A \cap X_{k_0})) + \mu((A\triangle A_0) \cap X_{k_0})$
 $< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$

ce qui termine la preuve.

Proposition 5.3.7. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$; si μ est σ -fini et \mathcal{A} est engendré de manière dénombrable, alors $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est séparable.

Démonstration. Soit $\mathscr C$ une famille dénombrable d'ensembles de $\mathscr A$ qui engendre $\mathscr A$ et contient une suite d'ensembles $(X_k)_k$ de mesure finie par μ tels que $X=\cup_k X_k$. Soit $\mathscr A_0$ l'algèbre engendrée par $\mathscr C$; clairement, $\mathscr A_0$ est constitué par des unions finies d'intersections finies d'ensembles qui appartiennent à $\mathscr C$ ou dont le complémentaire appartient à $\mathscr C$. Il en résulte que $\mathscr A_0$ est dénombrable et satisfait les hypothèses du Lemme 5.3.6.

Soit \mathscr{F} la collection des sommes finies $\sum_{k=1}^l d_k \chi_{D_k}$, où $d_k \in \mathbb{Q}$ (si l'espace considéré est $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$; si l'espace est $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{C})$, il suffit de prendre $d_k \in \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) et D_j est un élément de \mathscr{A}_0 satisfaisant $\mu(D_j) < \infty$. Cette collection est dénombrable et $\mathscr{F} \subset \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. Nous allons montrer qu'elle détermine un ensemble dense de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Soient $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $\varepsilon > 0$. Par la Proposition 5.3.3, il existe une application g de $\mathcal{L}(X, \mathcal{A})$ appartenant à $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $||f - g||_p < \varepsilon/3$. Si $g = \sum_k a_k \chi_{A_k}$, avec $A_k \in \mathcal{A}$ et $\mu(A_k) < \infty \ \forall k$, il existe des nombres rationnels $(d_k)_k$ tels que

$$\| \sum_{k} a_{k} \chi_{A_{k}} - \sum_{k} d_{k} \chi_{A_{k}} \|_{p} \leqslant \sum_{k} |a_{k} - d_{k}| \| \chi_{A_{k}} \|_{p} < \varepsilon/3.$$

Le Lemme 5.3.6 peut être invoqué pour obtenir des ensembles $(D_k)_k$ de \mathscr{A}_0 tels que $\|\sum_k d_k \chi_{A_k} - \sum_k d_k \chi_{D_k}\|_p < \varepsilon/3$. Bien sûr $\sum_k d_k \chi_{D_k} \in \mathscr{F}$ et

$$||f - \sum_{k} d_k \chi_{D_k}||_p \le ||f - g||_p + ||g - \sum_{k} d_k \chi_{A_k}||_p + ||\sum_{k} d_k \chi_{A_k} - \sum_{k} d_k \chi_{D_k}||_p < \varepsilon.$$

Cette inégalité démontre la proposition, puisque ε est arbitraire.

5.4 Espaces duaux

Le théorème de Riesz souligne le rôle fondamental joué par les intégrales dans l'étude des fonctionnelles linéaires. L'étude des espaces $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu))^*$ proposée ici est une première étape naturelle et nécessaire avant l'obtention de résultats plus fins.

Si V est un espace vectoriel topologique normé, nous désignerons, comme à l'accoutumée, V^* l'espace dual (topologique) associé à V. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré arbitraire, $p \in [1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Si $g \in \mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$, alors l'inégalité de Hölder implique que fg soit intégrable pour tout f appartenant à $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. Ainsi, l'application T_q définie par

$$T_g: \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C} \quad f \mapsto \int fg \, d\mu$$
 (5.3)

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$. Bien sûr, si f_1 et f_2 appartiennent à $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ et sont égaux presque partout, on a $T_gf_1=T_gf_2$. On peut donc définir une fonctionnelle linéaire T_g sur $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ en posant $T_g\langle f\rangle=T_gf$. Par l'inégalité de Hölder, on a $|T_gf|\leqslant ||g||_q||f||_p$ pour tout $f\in\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$, ce qui implique la continuité de T_g sur $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$, avec $||T_g||\leqslant ||g||_q$.

Proposition 5.4.1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p. L'application

$$T: \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu) \to (L^p(X, \mathcal{A}, \mu))^* \quad g \mapsto T_g,$$

où T_g est l'application définie par la relation (5.3), définit une isométrie de $L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ dans $(L^p(X, \mathscr{A}, \mu))^*$.

Démonstration. Si $q < \infty$ et si g_1 et g_2 sont deux fonctions de $\mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ égales presque partout, alors $T_{g_1} = T_{g_2}$; si $q = \infty$, il en va de même si g_1 et g_2 sont égaux localement presque partout. Ainsi, on peut définir une application T sur $L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ en posant $T_{\langle g \rangle} = T_g$. Cette dernière est clairement linéaire et puisque $||T_g|| \le ||g||_q$ pour tout $g \in \mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$, on a $||T|| \le 1$. Montrons que l'inégalité inverse est également vérifiée.

Supposons d'abord que p=1. Si $g\in \mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ vérifie $\|g\|_\infty=0$, alors $T_g=0$. Si tous les éléments de $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ sont de norme nulle, alors X est localement négligeable et les espaces $L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ et $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ ne contiennent que zéro; dans ce cas, la proposition est trivialement vraie. Sinon, soit $g\in \mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ tel que $\|g\|_\infty>0$ et $\varepsilon>0$ vérifiant $\varepsilon<\|g\|_\infty$. On peut supposer que l'ensemble $E=\{x\in X:|g(x)|>\|g\|_\infty-\varepsilon\}$ n'est pas localement μ -négligeable; il existe alors $A\in\mathscr{A}$ de mesure finie tel que l'ensemble $B=A\cap E$ est de mesure non-nulle. Soit alors $f=\overline{\operatorname{sgn}}(g)\chi_B$. On a $f\in\mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$, $\|f\|_1=\mu(B)$ et

$$T_g f = \int g \overline{\operatorname{sgn}(g)} \chi_B d\mu = \int |g| \chi_B d\mu \geqslant (\|g\|_{\infty} - \varepsilon) \mu(B).$$

Clairement, $|T_g f| = T_g f$ et puisque $|T_g f| \leq ||T_g|| ||f||_1$, l'inégalité précédente implique $||g||_{\infty} \leq ||T_g|| + \varepsilon$. Puisque ε peut être choisi arbitrairement, on peut directement conclure.

Supposons maintenant que $1 . Soit <math>g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ et posons $f = \overline{\operatorname{sgn}}(g)|g|^{q-1}$. On a $|f|^p = |g|^q$ et donc f appartient à $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, avec $||f||_p = (\int |g|^q d\mu)^{1/p}$. Qui plus est

$$T_g f = \int \overline{\operatorname{sgn}(g)} |g|^{q-1} g \, d\mu = \int |g|^q \, d\mu.$$

De l'inégalité $|T_g f| \leq ||T_g|| ||f||_p$, on tire alors

$$\int ||g|^q \, d\mu \le ||T_g|| (\int |g|^q \, d\mu)^{1/p}.$$

Si $||g||_q = 0$, on peut directement conclure, sinon, en divisant chaque membre de la précédente inégalité par $(\int |g|^q d\mu)^{1/p}$, on obtient $||g||_q \leq ||T_g||$, ce qui suffit.

Ce résultat sera complété à la section 7.6.

5.5 Applications

Dans cette section nous envisageons des manières alternatives de définir l'intégrale, démontrons deux résultats d'approximation pour les espaces L^p relatifs à la mesure de Lebesgue et réobtenons une version du théorème de la convergence monotone (corollaire 2.4.8).

Étant donné un espace mesuré, l'intégrale d'une fonction sur cet espace peut être définie de différentes manières, chacune présentant des avantages et des inconvénients. La notion d'application simple à valeurs complexes est une simple généralisation des applications simples.

^{2.} La fonction sg
n est définie par $\operatorname{sgn}(0) = 0$ et $\operatorname{sgn}(z) = z/|z|$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5.5. APPLICATIONS

159

Définition 5.5.1. Une application simple à valeurs complexes f est une application $f: X \to \mathbb{C}$ dont l'image est finie. Si (X, \mathscr{A}) est un espace mesurable, la collection des applications simples mesurables à valeurs complexes est notée $\mathscr{S}(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$.

Comme pour les applications de $\mathscr{S}^+(X,\mathscr{A})$, les applications f de $\mathscr{S}(X,\mathscr{A},\mathbb{C})$ peuvent toujours s'écrire

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k},$$

où les ensembles $(A_k)_k$ sont des éléments de \mathscr{A} deux à deux disjoints et $c_k \in \mathbb{C} \ \forall k$. La mesure d'une application simple à valeurs complexes peut être définie comme suit,

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(A_k).$$

On constate que cette définition de l'intégrale des applications simples à valeurs complexes correspond à la Définition 2.3.9 lorsque $f \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mathbb{C})$. Donnons une définition alternative de l'intégrale d'une application.

Proposition 5.5.2. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré. Une application mesurable définie sur X est intégrable si et seulement s'il existe une suite $(f_k)_k$ d'applications simples de Cauchy dans $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ qui converge presque partout vers f. Dans ce cas, on a $\int f d\mu = \lim_k \int f_k d\mu$.

Démonstration. Montrons que la condition est suffisante. Puisque l'espace $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ est de Banach, il existe $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ tel que $\lim_k \|g - f_k\|_1 = 0$. En particulier $\lim_k \int f_k d\mu = \int g d\mu$. La Proposition 5.1.11 implique également qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_k)_k$ qui converge vers g presque partout. Puisque la suite $(f_k)_k$ converge vers f presque partout, on a f = g presque partout. En particulier, $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $\int f d\mu = \int g d\mu = \lim_k \int f_k d\mu$.

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons donc que f est une fonction intégrable; quitte à décomposer f en sa partie réelle et sa partie imaginaire, nous pouvons supposer que f est à valeurs réelles. Il existe deux suites d'applications $(g_k)_k$ et $(h_k)_k$ de $\mathscr{S}^+(X,\mathscr{A})$ croissantes telles $\lim_k g_k = f^+, \lim_k h_k = f^-$ et $\int f d\mu = \lim_k \int g_k d\mu - \int h_k d\mu$. Pour tout $k, f_k = g_k - h_k$ appartient à $\mathscr{S}(X,\mathscr{A})$ et la suite $(f_k)_k$ converge ponctuellement vers f. Elle converge aussi dans l'espace $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$:

$$\lim_{k} ||f - f_{k}||_{1} = \lim_{k} \int |f - f_{k}| d\mu$$

$$= \lim_{k} \int |f^{+} - g_{k} - (f^{-} - h_{k})| d\mu$$

$$\leq \lim_{k} \int |f^{+} - g_{k}| d\mu + \lim_{k} \int |f^{-} - h_{k}| d\mu$$

$$= \lim_{k} \int f^{+} - g_{k} d\mu + \lim_{k} \int f^{-} - h_{k} d\mu$$

$$= 0$$

Dès lors, la suite $(f_k)_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge ponctuellement vers f et $\int f d\mu = \lim_k \int f_k d\mu$.

Cette définition alternative peut sembler plus générale pour les fonctions intégrables. En effet, on peut définir l'intégrale d'une application définie presque partout sur X comme suit : une application mesurable f définie presque partout sur X est intégrable s'il existe une suite d'applications simples de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ convergeant presque partout vers f. En fait, on peut obtenir l'intégrale d'une fonction définie presque partout à partir de la Définition 2.3.9 de manière naturelle. Si f est une application mesurable définie presque partout sur X et si g est une application définie sur X mesurable égale à f presque partout, il suffit de poser $\langle f \rangle = \langle g \rangle$; en particulier, $\langle f \rangle$ appartient à l'espace $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ si et seulement si $\langle g \rangle$ y appartient. En général, on pose même $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ si $g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ainsi, l'intégrale de l'application f existe si l'intégrale de l'application g existe et $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Nous allons maintenant introduire une définition de l'intégrale permettant de considérer des applications non mesurables.

Définition 5.5.3. Une application dénombrablement simple est une application $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ dont l'image est dénombrable.

Étant donné un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) , l'intégrale d'une application f dénombrablement simple mesurable et à valeurs dans $[0, \infty]$ peut être définie comme suit,

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(f^{-1}\{a_k\}).$$

Si f est une application mesurable dénombrablement simple telle que une des deux intégrales $\int f^+ d\mu$ ou $\int f^- d\mu$ soit finie, on pose $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$. Si f est une application de X dans \mathbb{R} , non nécessairement mesurable, on pose

$$\overline{\int} f \, d\mu = \inf \{ \int g \, d\mu : \ g \text{ est mesurable, dénombrablement simple et } g \geqslant f \ \mu\text{-p.p.} \}.$$

De la même manière,

$$\underline{\int} f\,d\mu = \sup\{\int g\,d\mu:\ g \text{ est mesurable, dénombrablement simple et }g\leqslant f\ \mu\text{-p.p.}\}.$$

L'intégrale de l'application f existe si $\overline{\int} f d\mu = \int f d\mu$. Dans ce cas, on la note $\int f d\mu$.

Proposition 5.5.4. Si $f: X \to \mathbb{R}$ est une application mesurable telle que $f \geqslant 0$ presque partout, alors

$$\int f \, d\mu = \overline{\int} f \, d\mu = \underline{\int} f d\mu.$$

 $D\'{e}monstration$. Si $\underline{\int} f d\mu$ n'est pas fini, aucune des intégrales ne l'est. Nous pouvons donc maintenant supposer le contraire. En particulier, $\{x:f(x)=\infty\}$ est négligeable. Soit t>1 et posons, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $A_k^{(t)}=\{x:t^k\leqslant f(x)< t^{k+1}\}$ et

$$g_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t^k \chi_{A_k^{(t)}}.$$

Les ensembles $A_k^{(t)}$ sont mesurables et g_t est donc une application mesurable dénombrablement simple telle que $g_t \leqslant f \leqslant tg_t$ presque partout. Ainsi,

$$\overline{\int} f \, d\mu \leqslant \int t g_t \, d\mu = t \int g_t \, d\mu \leqslant t \int f \, d\mu.$$

En prenant la limite pour t tendant vers 1^+ dans cette relation, on obtient $\overline{\int} f d\mu \leqslant \underline{\int} f d\mu$, ce qui suffit pour conclure, l'inégalité inverse étant triviale.

Ce résultat montre que si f est une application mesurable à valeurs dans \mathbb{R} positive presque partout, son intégrale, comme définie ici, correspond à l'intégrale de la Définition 2.3.9.

Lemme 5.5.5. Si f est une application mesurable positive et si g est une application intégrable alors

$$\int f + g \, d\mu = \int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f est intégrable et soient h_1 et h_2 deux fonctions mesurables dénombrablement simples telles que $h_1 \leqslant f$ et $h_2 \leqslant g$ μ -presque partout. Bien sûr $h_1 + h_2 \leqslant f + g$ μ -presque partout et

$$\int_{-}^{} f + g \, d\mu \geqslant \int_{-}^{} h_1 + h_2 \, d\mu = \int_{-}^{} h_1 \, d\mu + \int_{-}^{} h_2 \, d\mu$$

et donc $\int f d\mu + \int g d\mu \leq \underline{\int} f + g d\mu$. De la même manière, on montre que $\overline{\int} f + g d\mu \leq \int f d\mu + \int g d\mu$.

Supposons maintenant que $\int f d\mu = \infty$. Soit h une application mesurable dénombrablement simple telle que $h \leqslant g$ μ -presque partout. L'application g étant intégrable, on a $\int f + g d\mu = \infty$. On conclut en remarquant que $\int f + h d\mu = \infty$ et donc $\int f + g d\mu = \infty$. \square

Proposition 5.5.6. Si f est mesurable et si soit f^+ soit f^- est intégrable, alors $\int f d\mu$ existe et $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

Démonstration. Supposons par exemple que f^+ est intégrable. Le Lemme 5.5.5 implique (en prenant $g = -f^+$ et $f = f^-$) $\int f^- - f^+ d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu$, ce qui prouve que $\int -f d\mu$ existe.

Ainsi, lorsque l'on considère des applications mesurables, cette définition de l'intégrale est équivalente la Définition 2.3.9.

En s'inspirant des définitions qui précèdent, il est naturel d'étendre la notion d'intégrabilité aux fonctions non-mesurables.

Définition 5.5.7. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré; l'intégrale étendue d'une application f est, si elle existe, l'intégrale d'une application g mesurable telle que f est égal presque partout à g. Dans ce cas, on pose $\int f d\mu = \int g d\mu$.

On pourrait penser que l'on a ainsi défini une mesure étendue qui à E associe, si il existe, le nombre $\int \chi_E d\mu$. En fait, il n'en est rien.

Proposition 5.5.8. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, \mathscr{A}_{μ} la complétion de \mathscr{A} et $\bar{\mu}$ la complétion de μ . L'intégrale étendue de χ_A existe si et seulement si $A \in \mathscr{A}_{\mu}$ et dans ce cas, $\int \chi_A d\mu = \bar{\mu}(A)$.

Démonstration. Nous allons utiliser les notations introduites pour la définition 1.2.16. Si E appartient à \mathscr{A}_{μ} , il existe deux ensembles $A_I, A_S \in \mathscr{A}$ tels que $A_I \subset E \subset A_S$ et $\mu(A_S \setminus A_I) = 0$. On a donc $\chi_{A_I} = \chi_{A_S}$ presque partout, ce qui implique $\chi_E = \chi_{A_I}$ presque partout. Par la définition 5.5.7, on a alors

$$\bar{\mu}(E) = \mu(A_I) = \int \chi_{A_I} d\mu = \int \chi_E d\mu.$$

Inversement, si $E \subset X$ et $E' \in \mathscr{A}$ vérifient $\chi_E = \chi_{E'}$ presque partout, soit $N \in \mathscr{A}$ tel que $\{x : \chi_E(x) \neq \chi_{E'}(x)\} \subset N$ et $\mu(N) = 0$. En posant $A_I = E' \setminus N$ et $A_S = E' \cup N$, on a $A_I, A_S \in \mathscr{A}, \chi_{A_I} \leq \chi_E \leq \chi_{A_S}$, ce qui implique $A_I \subset E \subset A_S$ et $\mu(A_S \setminus A_I) = \mu(N) = 0$. Puisque $\mu(A_I) = \mu(E')$, on obtient $E \in \mathscr{A}_{\mu}$ et

$$\int \chi_E d\mu = \int \chi_{E'} d\mu = \mu(A_I) = \bar{\mu}(E),$$

ce qui termine la preuve.

Cette définition revient à considérer la complétion de μ . Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et f, g deux applications de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ égales presque partout. Si g est \mathscr{A} -mesurable, g est \mathscr{A}_{μ} -mesurable et puisque la mesure $\bar{\mu}$ est complète, f est également \mathscr{A}_{μ} -mesurable. De là, si $\int g \, d\mu$ existe, on a, selon la définition 5.5.7,

$$\int f \, du = \int g \, d\mu = \int g \, d\bar{\mu} = \int f \, d\bar{\mu},$$

la dernière intégrale existant, en vertu de la proposition 2.3.13 (l'égalité $\int g \, d\bar{\mu} = \int g \, d\mu$ est assurée par la proposition 2.3.6). Maintenant, si f est \mathscr{A}_{μ} -mesurable, par la proposition 2.2.5, il existe deux applications \mathscr{A} -mesurables f_I, f_S telles que $f_I \leqslant f \leqslant f_S$ sur X et $f_I = f_S$ presque partout. On a ainsi, si $\int f \, d\bar{\mu}$ existe,

$$\int f \, d\bar{\mu} = \int f_I \, d\bar{\mu} = \int f_I \, d\mu = \int f \, d\mu,$$

la dernière intégrale ayant un sens selon la définition 5.5.7.

Nous allons maintenant considérer le cas spécifique de la mesure de Lebesgue. Notons \mathscr{A} les ensembles \mathcal{L}^* -mesurables de A et $\mathscr{L}^p(A) = \mathscr{L}^p(A, \mathscr{A}, \mathcal{L}), L^p(A) = L^p(A, \mathscr{A}, \mathcal{L}).$

Définition 5.5.9. Une fonction f (à valeurs complexes ou réelles) définie sur un intervalle [a,b] est une fonction étagée s'il existe des nombres $(x_k)_{k=0}^N$ strictement croissants tels que $x_0 = a$, $x_N = b$ et que f soit constant sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k]$. Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une fonction étagée si, pour tout intervalle]a,b], la restriction de f à]a,b] est une fonction étagée.

Proposition 5.5.10. Soit p tel que $1 \leq p < \infty$. Le sous-espace de $L^p([a,b])$ déterminé par les fonctions étagées de [a,b] est dense dans $L^p([a,b])$.

Démonstration. Bien sûr, toute fonction étagée de [a,b] appartient à $\mathcal{L}^p([a,b])$. Puisque, par la proposition 5.3.3, les fonctions de $\mathcal{L}([a,b])$ forment un sous-espace dense de $L^p([a,b])$, il nous suffit de montrer que pour toute fonction f de $\mathcal{L}([a,b])$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée g de [a,b] telle que $||f-g||_p < \varepsilon$. Pour ce faire, nous allons montrer que si A est un ensemble mesurable de [a,b], il existe une fonction étagée g de [a,b] telle que $||\chi_A-g||_\infty < \varepsilon$. Par définition de la mesure de Lebesgue, il existe une suite d'intervalles semi-ouverts $([a_k,b_k])_k$ telle que $A \subset \bigcup_k [a_k,b_k]$ et $\sum_k (b_k-a_k) < \mathcal{L}(A) + (\varepsilon/2)^p$. Soient l un indice tel que $\sum_{k=l+1}^\infty (b_k-a_k) < (\varepsilon/2)^p$, g la fonction caractéristique de l'ensemble $[a,b] \cap \bigcup_{k=1}^l [a_k,b_k]$ et h la fonction caractéristique de l'ensemble $[a,b] \cap \bigcup_k [a_k,b_k]$. La fonction g est une fonction étagée et

$$\|\chi_A - g\|_p \leq \|\chi_A - h\|_p + \|h - g\|_p$$

$$\leq (\mathcal{L}(\bigcup_k]a_k, b_k] \setminus A))^{1/p} + (\mathcal{L}(\bigcup_{k=l+1}^{\infty}]a_k, b_k]))^{1/p}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui suffit.

Proposition 5.5.11. Soit p tel que $1 \leq p < \infty$. Le sous-espace de $L^p([a,b])$ déterminé par les fonctions de $C^0([a,b])$ est dense dans $L^p([a,b])$.

Démonstration. Bien sûr, tout fonction continue sur [a,b] appartient à $\mathcal{L}^p([a,b])$. Par la Proposition 5.5.10, il est suffisant de montrer que pour toute fonction étagée f de [a,b] et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g de $C^0([a,b])$ telle que $||f-g||_p < \varepsilon$. Soit donc f une fonction étagée de [a,b] et posons $c = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Il est aisé de construire une fonction continue g linéaire par morceaux telle que $\sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\} \le c$ et $\mathcal{L}(\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}) < (\varepsilon/(2c))^p$. On a alors

$$\int_a^b |f - g|^p d\mathcal{L} \leqslant (2c)^p \mathcal{L}(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon^p$$

et donc $||f - g||_p < \varepsilon$, ce qui devait être montré.

Proposition 5.5.12. Soit p tel que $1 \leq p < \infty$. Le sous-espace de $L^p(\mathbb{R})$ déterminé par les fonctions étagées de \mathbb{R} à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Démonstration. Dans la preuve de la Proposition 5.5.10, considérons l'espace \mathbb{R} et non plus l'intervalle [a,b]. Puisque χ_A est un élément de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{L}(A) < \infty$. Il existe donc un sous-ensemble mesurable A' de A tel que $\chi_{A'} = \chi_A$ presque partout et $A' \subset [a,b]$ pour deux nombres a,b. Le résultat s'en suit.

Proposition 5.5.13. Soit p tel que $1 \leq p < \infty$. Le sous-espace de $L^p(\mathbb{R})$ déterminé par les fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Démonstration. D'après la Proposition 5.5.12, il suffit de montrer que, pour toute fonction étagée à support compact f de \mathbb{R} et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue g à support compact telle que $||f - g||_p < \varepsilon$. Si le support de f est inclus dans [a, b], cela découle directement de la Proposition 5.5.11.

Ces deux derniers résultats impliquent que si on considère la mesure de Lebesgue, on peut remplacer les suites d'applications simples par des suites de fonctions étagées à support compact ou de fonctions continues à support compact dans la Proposition 5.5.2.

Le théorème de convergence monotone suivant (à comparer au corollaire 2.4.8) utilise le critère de Cauchy.

Théorème 5.5.14 (Levi). Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_k)_k$ une suite d'applications de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ croissante (resp. décroissante) presque partout. Si la suite $(\int f_k d\mu)_k$ est majorée (resp. minorée), alors la suite $(f_k)_k$ converge presque partout vers une application f de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ et $\lim_k \int |f - f_k| d\mu = 0$.

Démonstration. Remarquons qu'il suffit d'établir le cas où la suite est croissante presque partout : si $(f_k)_k$ est une suite décroissante presque partout, on peut appliquer le résultat à la suite $(-f_k)_k$.

Soit donc $(f_k)_k$ une suite de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ croissante presque partout. Cette suite est de Cauchy. De fait, si $k \leq l$,

$$\int |f_l - f_k| \, d\mu = \int f_l - f_k \, d\mu = |\int f_l \, d\mu - \int f_k \, d\mu|,$$

alors que la suite numérique $(\int f_k d\mu)_k$ converge puisqu'elle est croissante et majorée. L'espace $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ étant de Banach, il existe une application f de $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ telle que $\lim_k \|f - f_k\|_1 = 0$. Par la Proposition 5.1.11, il existe également une sous-suite de la suite $(f_k)_k$ qui converge vers f presque partout; cela implique que la suite $(f_k)_k$ converge presque partout vers f, puisqu'elle est croissante presque partout. Le théorème est donc démontré.

Chapitre 6

Quelques notions supplémentaires concernant les mesures

6.1 Concernant les mesures extérieures et intérieures

Certains auteurs jugent la notion de mesure extérieure suffisante que pour pouvoir développer une théorie de la mesure viable; cela dépend des objectifs à atteindre grâce à cet outil [12]. Si le rôle historique des mesures intérieures est essentiel, elles ont quant à elles une importance plus relative dans la théorie moderne de la mesure.

Mesures extérieures construites à partir de mesures

Nous avons vu qu'une mesure extérieure permet de définir une mesure, en restreignant le domaine de définition. Ici, c'est la démarche inverse qui va être adoptée.

Définition 6.1.1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. La mesure extérieure ν^* associée à μ est l'application

$$\nu^* : \wp(X) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \inf\{\mu(B) : A \subset B \in \mathscr{A}\}. \tag{6.1}$$

La mesure intérieure ν_* associée à μ est l'application

$$\nu_*: \wp(X) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \mathscr{A}\}. \tag{6.2}$$

Pour tout sous-ensemble A de X, on a bien sûr $\nu_*(A) \leq \nu^*(A)$. Ces applications sont des prolongements de μ .

Proposition 6.1.2. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Les applications ν^* et ν_* définies par les relations (6.1) et (6.2) sont des prolongements de la mesure μ .

Démonstration. Considérons par exemple le cas de ν^* , l'autre s'établissant de même. Pour $A \in \mathcal{A}$, puisque A recouvre A, on a $\nu^*(A) \leq \mu(A)$, par définition. Cela étant, pour tout ensemble B de \mathcal{A} tel que $A \subset B$, on a $\mu(A) \leq \mu(B)$, donc $\mu(A) \leq \nu^*(A)$.

La mesure extérieure ainsi définie correspond bien à une mesure extérieure comme définie précédemment.

Proposition 6.1.3. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. L'application ν^* définie par la relation (6.1) est une mesure extérieure, au sens de la Définition 1.3.1 sur X.

Démonstration. Bien sûr l'application ν^* est monotone et $\nu^*(\varnothing) = 0$. Soit $(A_k)_k$ une suite de sous-ensembles de X. Si $\sum_k \nu^*(A_k) = \infty$, l'application est bien sous-additive. Supposons donc que $\sum_k \nu^*(A_k) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$, et pour tout k, soit $B_k \in \mathscr{A}$ un ensemble comprenant A_k et vérifiant $\mu(B_k) \leqslant \nu^*(A_k) + \varepsilon/2^k$. L'ensemble $B = \bigcup_k B_k$ appartient à \mathscr{A} , inclus $\bigcup_k A_k$ et vérifie $\mu(B) \leqslant \sum_k \nu^*(A_k) + \varepsilon$. Dès lors, $\nu^*(\bigcup_k A_k) \leqslant \sum_k \nu^*(A_k) + \varepsilon$, ce qui termine la preuve, puisque ε est arbitraire.

Proposition 6.1.4. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et ν^* l'application définie par la relation (6.1); la sigma-algèbre des ensembles ν^* -mesurables contient \mathscr{A} .

Démonstration. Soit \mathscr{B} la sigma-algèbre des ensembles ν^* -mesurables. Montrons que tout élément M de \mathscr{A} appartient à \mathscr{B} . Pour un ensemble quelconque A de X, soit $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathscr{A}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) < \nu^*(A) + \varepsilon$. On a

$$\nu^{*}(A \cap M) + \nu^{*}(A \cap M^{c}) \leq \nu^{*}(B \cap M) + \nu^{*}(B \cap M^{c})$$

$$= \mu^{*}(B \cap M) + \mu^{*}(B \cap M^{c})$$

$$= \mu(B) < \nu^{*}(A) + \varepsilon,$$

ce qui suffit, ε tant arbitraire.

L'application ν_* définie par la relation (6.2) est une mesure intérieure, au sens de la Définition 6.1.33 sur X.

Proposition 6.1.5. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. L'application ν_* définie par la relation (6.2) est telle que

- $\nu_*(\varnothing) = 0,$
- si A et B sont deux parties de X disjointes, alors $\nu_*(A \cup B) \geqslant \nu_*(A) + \nu_*(B)$,
- pour toute suite d'ensembles décroissante $(A_k)_k$ de X telle que $\nu_*(A_1) < \infty$, on a $\lim_k \nu_*(A_k) = \nu_*(\cap_k A_k)$.

Démonstration. Montrons les deux premières conditions, c'est-à-dire que l'application ν_* est super-additive. On a bien sûr $\nu_*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$. Si A et B sont deux ensembles de X d'intersection vide, on a

$$\nu_*(A \cup B) = \sup \{ \mu(C) : C \subset A \cup B, \ C \in \mathscr{A} \}$$

$$\geqslant \sup \{ \mu(A' \cup B') : A' \subset A, \ B' \subset B, \ A', B' \in \mathscr{A} \}$$

$$= \sup \{ \mu(A') : A' \subset A, \ A' \in \mathscr{A} \} + \sup \{ \mu(B') : B' \subset B, \ B' \in \mathscr{A} \}$$

$$= \nu_*(A) + \nu_*(B).$$

Soit $(A_k)_k$ une suite décroissante de X telle que $\nu_*(A_1) < \infty$. Pour tout nombre naturel k non nul, soit $B_k \in \mathscr{A}$ tel que $B_k \subset A_k$ et $\nu_*(A_k) < \mu(B_k) + 1/k$. Pour un tel indice, soit $B_k' = \bigcup_{j=k}^{\infty} B_j$. La suite $(B_k')_k$ de \mathscr{A} ainsi construite est décroissante et telle que $B_k' \subset A_k$ pour tout k. Il vient

$$\nu_*(\cap_k A_k) \geqslant \mu(\cap_k B_k') = \mu(\overline{\lim_k} B_k) \geqslant \overline{\lim_k} \mu(B_k) \geqslant \overline{\lim_k} \nu_*(A_k) = \lim_k \nu_*(A_k),$$

puisque la limite existe. D'autre part, vu la croissance de ν_* , on a $\nu_*(A_k) \geqslant \nu_*(\cap_j A_j)$ pour tout k, donc

$$\lim_{k} \nu_*(A_k) \geqslant \nu_*(\cap_k A_k),$$

ce qui permet de conclure.

Ces notions permettent d'obtenir, sous certaines conditions, un critère d'appartenance à la σ -algèbre complétée.

Proposition 6.1.6. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et les applications ν^* et ν_* définies par les relations (6.1) et (6.2); considérons un sous-ensemble A de X tel que $\nu^*(A) < \infty$. L'ensemble A appartient à \mathscr{A}_{μ} (la σ -algèbre intervenant dans la Définition 1.2.16) si et seulement si $\nu_*(A) = \nu^*(A)$.

En particulier, si A appartient à \mathcal{A}_{μ} et vérifie $\nu^*(A) < \infty$, on $a \bar{\mu}(A) = \nu_*(A) = \nu^*(A)$.

Démonstration. Si $A \in \mathscr{A}_{\mu}$, il existe $A_I, A_S \in \mathscr{A}$ tels que $A_I \subset A \subset A_S$ et $\mu(A_S \setminus A_I) = 0$. On obtient directement

$$\mu(A_I) \leqslant \nu_*(A) \leqslant \nu^*(A) \leqslant \mu(A_S) = \mu(A_I),$$

ce qui implique $\nu_*(A) = \nu^*(A)$.

Supposons que A est un sous-ensemble de X tel que $\nu_*(A) = \nu^*(A) < \infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe deux ensembles $A_{I,k}, A_{S,k} \in \mathscr{A}$ tels que $A_{I,k} \subset A \subset A_{S,k}$ et $\nu_*(A) \leq \mu(A_{I,k}) + 1/2k$, $\mu(A_{S,k}) \leq \nu^*(A) + 1/2k$. Les ensembles $A_I = \bigcup_k A_{I,k}$ et $A_S = \bigcap_k A_{S,k}$ sont des ensembles de \mathscr{A} tels que $A_I \subset A \subset A_S$. Qui plus est

$$\mu(A_S \setminus A_I) \leqslant \mu(A_{S,k} \setminus A_{I,k}) = \mu(A_{S,k}) - \mu(A_{I,k}) \leqslant 1/k,$$

pour tout k, ce qui implique $\mu(A_S \setminus A_I) = 0$. Ceci prouve que $A \in \mathscr{A}_{\mu}$.

Mesures extérieures régulières

Les mesures extérieures régulières forment une classe importante de mesures extérieures, bénéficiant de nombreuses propriétés. Par exemple, sous certaine conditions, on peut montrer que μ est obtenu par restriction d'une mesure extérieure régulière μ^* à ces ensembles mesurables.

Définition 6.1.7. Une mesure extérieure μ^* sur X est régulière sur une sigma-algèbre \mathscr{A} si pour tout $A \subset X$, il existe un ensemble B de \mathscr{A} contenant A tel que $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. Une mesure extérieure Borel-régulière est une mesure extérieure régulière sur les boréliens pour laquelle tout borélien est mesurable. Une mesure extérieure μ^* sur X est régulière si elle est régulière sur la collection des ensemble μ^* -mesurables.

En particulier, si μ^* est régulier et si μ est la mesure obtenue à partir de μ^* , pour tout $A \subset X$, il existe un ensemble μ -mesurable B tel que $A \subset B$ et $\mu^*(A) = \mu(B)$.

Proposition 6.1.8. Si μ^* est une mesure extérieure régulière sur X, alors pour toute suite croissante $(A_k)_k$ d'ensembles de X, on a

$$\lim_{k} \mu^*(A_k) = \mu^*(\cup_k A_k).$$

Démonstration. Pour tout indice k, soit B_k un ensemble mesurable tel que $A_k \subset B_k$ et $\mu^*(A_k) = \mu^*(B_k)$. Définissons alors $C_k = \cap_{j \geqslant k} B_j$. On a $A_k \subset C_k$ et donc $\mu^*(A_k) \leqslant \mu^*(C_k)$ pour tout k. On a aussi $\mu^*(C_k) \leqslant \mu^*(B_k) = \mu^*(A_k)$, ce qui prouve que l'on a $\mu^*(A_k) = \mu^*(C_k)$. Puisque C_k est mesurable pour tout k, il vient

$$\lim_{k} \mu^{*}(A_{k}) = \lim_{k} \mu^{*}(C_{k}) = \mu^{*}(\cup_{k} C_{k}) \geqslant \mu^{*}(\cup_{k} A_{k}).$$

Puisque $A_k \subset \cup_j A_j$, on a aussi

$$\lim_{k} \mu^*(A_k) \leqslant \mu^*(\cup_j A_j),$$

ce qui permet de conclure.

Une autre manière d'obtenir le résultat précédent consiste à utiliser les limites inférieures.

Proposition 6.1.9. Si μ^* est une mesure extérieure régulière sur X, pour toute suite d'ensemble $(A_k)_k$ de X, on a

$$\mu^*(\underline{\lim}_k A_k) \leqslant \underline{\lim}_k \mu^*(A_k).$$

Démonstration. Pour tout indice k, soit B_k un ensemble μ^* -mesurable contenant A_k tel que $\mu^*(B_k) = \mu^*(A_k)$. L'ensemble $\underline{\lim}_k B_k$ est mesurable et contient $\underline{\lim}_k A_k$, donc

$$\mu^*(\underline{\lim}_k A_k) \leqslant \mu^*(\underline{\lim}_k B_k) = \underline{\lim}_k \mu^*(B_k) = \underline{\lim}_k \mu^*(A_k),$$

comme annoncé. \Box

Corollaire 6.1.10. Si μ^* est une mesure extérieure régulière sur X, alors pour toute suite croissante $(A_k)_k$ d'ensembles de X, on a

$$\lim_{k} \mu^*(A_k) = \mu^*(\cup_k A_k).$$

Démonstration. Le résultat précédent nous procure $\mu^*(\lim_k A_k) \leq \lim_k \mu^*(A_k)$.

Cela étant, puisque $\lim_j A_j$ contient A_k pour tout k, $\mu^*(\lim_j A_j) \geqslant \mu^*(A_k)$ pour tout indice k. En passant à la limite sur k, on obtient l'autre inégalité souhaitée.

Proposition 6.1.11. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré; l'application ν^* définie par la relation (6.1) est régulière sur \mathcal{A} . En particulier, ν^* est régulier.

Démonstration. Étant donné un ensemble A de X, pour $k \in \mathbb{N}_0$, soit $E_k \in \mathscr{A}$ tel que $A \subset E_k$ et $\mu(E_k) < \nu^*(A) + 1/k$. Posons $E = \cap_k E_k$; il s'agit d'un ensemble de \mathscr{A} tel que $\mu(E) < \nu^*(A) + 1/k$ quel que soit k. Puisque A est inclus dans E, on peut alors écrire

$$\mu(E) \leqslant \nu^*(A) \leqslant \mu(E).$$

Par la Proposition 6.1.4, ν^* est régulier.

Proposition 6.1.12. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et ν^* l'application définie par la relation (6.1); si E est ν^* -mesurable et tel que $E = \bigcup_k E_k$ pour une suite d'ensembles $(E_k)_k$ tels que $\nu^*(E_k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, alors il existe $A \in \mathscr{A}$ et un ensemble μ -négligeable N tels que $E = A \cup N$.

Démonstration. Supposons d'abord avoir $\nu^*(E) < \infty$. Puisque ν^* est régulier sur \mathscr{A} , il existe $B \in \mathscr{A}$ tel que $E \subset B$ et $\nu^*(E) = \nu^*(B)$. On a donc

$$\nu^*(B \setminus E) = \nu^*(B) - \nu^*(A) = 0.$$

 \Box

Soit maintenant $C \in \mathscr{A}$ tel que $B \setminus E \subset C$ et $\nu^*(B \setminus E) = \nu^*(C)$. Cela étant, soit $D \in \mathscr{A}$ tel que $E \cap C \subset D$ et $\nu^*(E \cap C) = \mu(D)$. Pour un tel ensemble, on a

$$\mu(D) = \nu^*(E \cap C) \leqslant \nu^*(C) = \nu^*(B \setminus A) = 0.$$

On remarque directement que l'on a

$$E = (B \setminus C) \cup (E \cap C).$$

Puisque l'ensemble $A=B\setminus C$ appartient à $\mathscr A$ et que $N=E\cap C$ est μ -négligeable, on peut conclure dans le cas $\nu^*(E)<\infty$.

Si $\nu^*(A) = \infty$, considérons les ensembles E_k de l'énoncé. Pour chaque indice k, il existe $A_k \in \mathscr{A}$ et un ensemble μ -négligeable N_k tels que $E_k = A_k \cup N_k$. Il vient

$$E = \bigcup_k E_k = \bigcup_k (A_k \cup N_k) = (\bigcup_k A_k) \cup (\bigcup_k N_k),$$

avec $\cup_k A_k \in \mathscr{A}$ et où $\cup_k N_k$ est μ -négligeable.

Proposition 6.1.13. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et ν^* l'application définie par la relation (6.1); si $X = \bigcup_k X_k$ avec $\nu^*(X_k) < \infty$ pour tout indice k, alors la mesure obtenue à partir de ν^* est la mesure $\bar{\mu}$.

Démonstration. Soit ν la mesure obtenue à partir de ν^* . Bien entendu, par hypothèse, pour tout ensemble A ν^* -mesurable, on a $A = \bigcup_k A_k$, avec $\nu^*(A_k) < \infty$. Par la Proposition 6.1.12, il existe alors $M \in \mathscr{A}$ et un ensemble négligeable N tels que $A = M \cup N$. Soit $B \in \mathscr{A}$ un ensemble μ -négligeable tel que $N \subset B$ et posons $A_S = M \cup B$ et $A_I = M$. On a $A_I \subset A \subset A_S$, avec A_I et A_S appartenant à \mathscr{A} . De plus, il vient

$$\mu(A_S \setminus A_I) = \mu(B) = 0.$$

Ainsi, par définition de $\bar{\mu}$, A appartient à \mathscr{A}_{μ} et

$$\bar{\mu}(A) = \mu(A_I) = \mu(M) = \nu^*(M) = \nu(M) = \nu(M \cup B) = \nu(A).$$

Maintenant, si A appartient à \mathscr{A}_{μ} , il existe deux ensembles A_I et A_S de \mathscr{A} tels que $A_I \subset A \subset A_S$ et $\mu(A_S \setminus A_I) = 0$. Ces ensembles sont également ν^* -mesurables et

$$\nu^*(A \setminus A_I) \leqslant \nu^*(A_S \setminus A_I) = \mu(A_S \setminus A_I) = 0.$$

Dès lors, $A \setminus A_I$ est ν^* -mesurable, ce qui implique que A est également ν^* -mesurable. De là, il vient

$$\bar{\mu}(A) = \mu(A_I) = \nu(A_I) \leqslant \nu(A) \leqslant \nu(A_S) = \mu(A_S) = \bar{\mu}(A),$$

comme il devait être montré.

Proposition 6.1.14. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et ν^* l'application définie par la relation (6.1); si μ est obtenu à partir d'une mesure extérieure régulière μ^* , alors on a $\mu^* = \nu^*$ sur X.

Démonstration. Étant donné une partie A de X, soit $B \in \mathscr{A}$ tel que $A \subset B$ et $\mu^*(A) = \mu(B)$. On a

$$\nu^*(A) \leqslant \nu^*(B) = \mu(B) = \mu^*(A).$$

Cela étant, pour tout ensemble B de \mathscr{A} tel que $A \subset B$, on a bien entendu

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) = \mu(B),$$

ce qui implique $\mu^*(A) \leq \nu^*(A)$, par définition de ν^* .

Mesures extérieures de Radon

Définition 6.1.15. Une mesure extérieure borélienne μ^* sur un espace localement compact séparé est une mesure de Radon si elle est Borel-régulière et si $\mu^*(K) < \infty$ pour tout ensemble compact K.

Étant donné une mesure extérieure μ^* sur X et un ensemble A de X, soit

$$\mu_A^*: \wp(X) \to [0, \infty] \quad B \mapsto \mu^*(A \cap B).$$

On vérifie directement que cette application est une mesure extérieure.

Théorème 6.1.16. Soit μ^* une mesure Borel-régulière sur X; si $A \subset X$ est mesurable et vérifie $\mu^*(A) < \infty$, alors μ_A^* est une mesure extérieure de Radon.

Démonstration. On a bien sûr $\mu_A^*(K) < \infty$ pour tout compact K. De plus, si B est mesurable, alors $A \cap B$ également, μ_A^* est une mesure extérieure borélienne.

Soit B un borélien tel que $A \subset B$ et $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. Puisque A est mesurable et de mesure extérieure finie, on a

$$\mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) - \mu^*(A) = 0.$$

On a dès lors, pour tout ensemble C,

$$\mu_B^*(C) = \mu^*(B \cap C) = \mu^*(A \cap B \cap C) + \mu^*((B \cap C) \setminus A)$$

$$\leq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(B \setminus A) = \mu_A^*(C).$$

On peut donc supposer que A est borélien. Maintenant pour $C \subset X$, soit un ensemble borélien D tel que $A \cap C \subset D$ et $\mu^*(A \cap C) = \mu^*(D)$. Posons $E = D \cup A^c$; puisque D et A sont boréliens, E également. On a de plus $C \subset (A \cap C) \cup A^c \subset E$. Puisque $E \cap A = D \cap A$, on a

$$\mu_A^*(C) = \mu^*(A \cap C) = \mu^*(D) \geqslant \mu^*(D \cap A) = \mu^*(E \cap A) = \mu_A^*(E).$$

Ceci montre que μ_A^* est une mesure extérieure de Borel-régulière. On peut conclure, puisque μ_A^* est trivialement une mesure extérieure finie.

Lemme 6.1.17. Soit μ^* est une mesure borélienne sur un espace séparé localement compact X possédant une base dénombrable pour sa topologie et B un ensemble borélien;

- $si \ \mu^*(B) < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé F inclus dans B tel que $\mu^*(B \setminus F) < \varepsilon$,
- si μ^* est une mesure extérieure de Radon, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert U contenant B tel que $\mu^*(U \setminus B) < \varepsilon$.

 $D\acute{e}monstration$. Démontrons la première partie. Par construction, μ_B^* est une mesure borélienne finie. Soit

$$\mathscr{F} = \{A \subset X : A \text{ est mesurable et } (\forall \varepsilon > 0 \ \exists F \text{ ferm\'e tel que } F \subset A \text{ et } \mu_B^*(A \setminus F) < \varepsilon)\}.$$

Bien sûr, tout ensemble fermé de X appartient à \mathscr{F} .

Montrons que \mathscr{F} est stable par intersection dénombrable. Supposons avoir $A_k \in \mathscr{F}$ pour tout indice k et soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque k, il existe un ensemble fermé F_k vérifiant $F_k \subset A_k$ et $\mu_B^*(A_k \setminus F_k) < \varepsilon/2^k$. Soit alors l'ensemble fermé $F = \cap_k F_k$; on a

$$\mu_B^*(\cap_k A_k \setminus F) = \mu_B^*(\cap_k A_k \setminus \cap_k F_k) \leqslant \mu_B^*(\cup_k (A_k \setminus F_k)) \leqslant \sum_k \mu_B^*(A_k \setminus F_k) < \varepsilon,$$

ce qui montre que l'on a $\cap_k A_k \in \mathscr{F}$.

Montrons que \mathscr{F} est stable par union dénombrable. Supposons avoir $A_k \in \mathscr{F}$ pour tout indice k, soit $\varepsilon > 0$ et choisissons les F_k comme précédemment. Puisque $\cup_j F_j$ et $\cup_{j=1}^k F_j$ sont mesurables pour tout k, on a

$$\lim_{k} \mu_{B}^{*}(\bigcup_{j} A_{j} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} F_{j}) = \mu_{B}^{*}(\cup_{j} A_{j}) - \lim_{k} \mu_{B}^{*}((\bigcup_{j} A_{j}) \cap (\bigcup_{j=1}^{k} F_{j}))$$

$$= \mu_{B}^{*}(\cup_{j} A_{j}) - \mu_{B}^{*}((\cup_{j} A_{j}) \cup (\cup_{j} F_{j})) = \mu_{B}^{*}(\cup_{j} A_{j} \setminus \cup_{j} F_{j})$$

$$\leqslant \mu_{B}^{*}(\cup_{j} (A_{j} \setminus F_{j})) \leqslant \sum_{j} \mu_{B}^{*}(A_{j} \setminus F_{j}) < \varepsilon.$$

Il existe donc un nombre naturel k_0 tel que

$$\mu_B^*(\bigcup_j A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{k_0} F_j) < \varepsilon.$$

L'ensemble $\bigcup_{i=1}^{k_0} F_j$ étant fermé, $\bigcup_j A_j$ appartient à \mathscr{F} .

Tout ouvert de X pouvant s'écrire comme une union dénombrable de fermés, \mathscr{F} contient également les ensembles ouverts. Considérons maintenant

$$\mathscr{C} = \{ A \in \mathscr{F} : A^c \in \mathscr{F} \}.$$

Bien sûr, on a $A \in \mathscr{C}$ si et seulement si $A^c \in \mathscr{C}$. Qui plus est, \mathscr{C} contient les ensembles ouverts. Supposons maintenant avoir $A_k \in \mathscr{C}$ pour tout indice k. Nous savons que $\cup_k A_k$ appartient à \mathscr{F} et puisque $A_k^c \in \mathscr{F}$ pour tout k, $(\cup_k A_k)^c = \cap_k A_k^c$ appartient également à \mathscr{F} . En d'autre termes, nous avons montré que l'on a $\cup_k A_k \in \mathscr{C}$, c'est-à-dire que \mathscr{C} est stable par union dénombrable. Ainsi, \mathscr{C} est une σ -algèbre contenant les ouverts et donc les boréliens. On a donc $B \in \mathscr{C}$ et pour $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F inclus dans B tel que

$$\mu^*(B \setminus F) = \mu_B^*(B \setminus F) < \varepsilon,$$

ce qui établit la première partie.

Soit B_k la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon k ($k \in \mathbb{N}_0$). Bien sûr, $B_k \setminus B$ est un borélien tel que $\mu^*(B_k \setminus B) < \infty$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc un ensemble fermé F_k inclus dans $B_k \setminus B$ tel que

$$\mu^*((B_k \setminus F_k) \setminus B) = \mu^*((B_k \setminus B) \setminus F_k) < \varepsilon/2^k.$$

Soit alors l'ensemble ouvert $U = \bigcup_k B_k \setminus F_k$. La relation $B \subset F_k^c$ implique $B_k \cap B \subset B_k \setminus F_k$ et donc

$$B = \cup_k B \cap B_k \subset \cup_k B_k \setminus F_k = U.$$

Finalement, on a

$$\mu^*(U \setminus B) = \mu^*(\cup_k (B_k \setminus F_k) \setminus B) \leqslant \sum_k \mu^*((B_k \setminus F_k) \setminus B) < \varepsilon,$$

ce qui prouve la seconde partie.

172CHAPITRE 6. QUELQUES NOTIONS SUPPLÉMENTAIRES CONCERNANT LES MESURES

Théorème 6.1.18. Si μ^* est une mesure extérieure de Radon sur un espace séparé localement compact X possédant une base dénombrable pour sa topologie, alors

— pour tout $A \subset X$, on a

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert tel que } A \subset U\},$$

— pour tout ensemble mesurable A de X de mesure finie,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ ferm\'e tel que } F \subset A\}. \tag{6.3}$$

Démonstration. Prouvons la première égalité. On a bien entendu

$$\mu^*(A) \leq \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert tel que } A \subset U\}.$$

Si $\mu^*(A) = \infty$, alors l'inégalité inverse est également vérifiée; supposons donc avoir $\mu^*(A) < \infty$. Supposons en outre que A est borélien. Étant donné $\varepsilon > 0$, par le lemme précédent, il existe un ouvert U contenant A tel que $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$. On a bien entendu

$$\mu(U) = \mu(A) + \mu(U \setminus A) < \mu(A) + \varepsilon < \infty,$$

ce qui implique $\inf\{\mu(U)\} \leq \mu(A)$, où l'infimum est pris sur les ouverts de l'énoncé.

Si A n'est pas borélien, soit B un ensemble borélien tel que $A \subset B$ et $\mu^*(A) = \mu(B)$. On a directement

$$\mu^*(A) = \mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert tel que } B \subset U\}$$

 $\geqslant \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert tel que } A \subset U\},$

ce qui procure la première partie de la thèse.

Procédons à la seconde partie de la démonstration. Soit A un ensemble mesurable ; on a trivialement

$$\mu(A) \geqslant \sup{\{\mu(F) : F \text{ ferm\'e tel que } K \subset A\}}.$$

Nous savons que μ_A^* est une mesure de Radon par le théorème 6.1.16. Soit $\varepsilon > 0$; vu la première relation appliquée à μ_A^* et A^c , il existe un ouvert U tel que $A^c \subset U$ et $\mu_A^*(U) < \varepsilon$. En posant $F = U^c$, il vient

$$\mu^*(A \setminus F) = \mu_A^*(F^c) = \mu_A^*(U) < \varepsilon.$$

Puisque F est fermé et contient A, on a obtenu

$$0 \leqslant \mu(A) - \mu(F) < \varepsilon$$

et donc

$$\mu(A)=\sup\{\mu(F): F \text{ ferm\'e tel que } F\subset A\}.$$

Corollaire 6.1.19. Si μ^* est une mesure extérieure de Radon sur \mathbb{R}^d , alors — pour tout $A \subset X$, on a

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert tel que } A \subset U\},$$

— pour tout ensemble mesurable A de X,

$$\mu(A) = \sup{\{\mu(K) : K \text{ compact tel que } K \subset A\}}.$$

Démonstration. La première partie découle du théorème précédent. Pour la seconde partie, si $\mu(A) = \infty$, soit $D_k = \{x : k-1 \le |x| < k\}$. On a $A = \bigcup_k A \cap D_k$ et donc

$$\infty = \mu(A) = \sum_{k} (A \cap D_k) = \infty.$$

Puisque μ^* est une mesure extérieure de Radon, $\mu(A \cap D_k) < \infty$ et il existe un ensemble fermé F_k tel que $F_k \subset A \cap D_k$ et $\mu(A \cap D_k) < \mu(F_k) + 1/2^k$. On a $\cup_j F_j \subset A$ et

$$\lim_{k} \mu(\bigcup_{j=1}^{k} F_j) = \mu(\bigcup_{j} F_j) = \sum_{j} \mu(F_j) \geqslant \sum_{j} (\mu(A \cap D_j) - 1/2^j) = \infty.$$

Puisque $\bigcup_{j=1}^k F_j$ est fermé pour tout k, ceci prouve que la relation (6.3) est vérifiée pour tout ensemble A mesurable.

Soit B_k la boule fermée centrée à l'origine et de rayon k ($k \in \mathbb{N}_0$). Étant donné un ensemble fermé F, posons $K_k = F \cap B_k$. Chaque K_k est compact et on a $\mu(F) = \lim_k \mu(K_k)$. En conséquence, pour tout ensemble mesurable A et tout ensemble fermé F inclus dans A, on a

$$\sup\{\mu(K): K \text{ compact tel que } K \subset A\} \geqslant \mu(F),$$

ce qui implique

 $\sup\{\mu(K): K \text{ compact tel que } K \subset A\} = \sup\{\mu(F): F \text{ ferm\'e tel que } F \subset A\}.$

Mesures intérieures

Il est naturel de souhaiter développer une théorie des mesures intérieures en calquant ce qui a été fait pour les mesures extérieures. Néanmoins, pour dépasser le cas des unions finies, il nous faudra imposer une condition de continuité (relation (6.5), qui est une condition sur les limites). Mais même de cette manière, les propriétés obtenues ne sont souvent pas assez fortes que pour pouvoir définir une théorie efficace [31]. Pour cette raison, le notion de mesure intérieure ne joue qu'un rôle secondaire en théorie de la mesure, même si elle peut avoir un intérêt propre [26, 28].

Définition 6.1.20. Soit X un ensemble quelconque. Une application $\underline{\mu}$ définie sur $\wp(X)$ et à valeurs dans $[0,\infty]$,

$$\mu: \wp(X) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \mu(A)$$

est super-additive sur X si

- $\underline{\mu}(\varnothing) = 0,$
- $\overline{\text{si}} A$ et B sont deux parties de X telles que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) \geqslant \mu(A) + \mu(B)$.

Remarquons que les deux conditions précédentes implique que l'application est positive.

Exemples 6.1.21. L'application μ qui a une partie de A de \mathbb{Z} associe

$$\underline{\mu}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \#A - 1 & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty & \text{si } A \text{ n'est pas fini} \end{cases}$$

est une application super-additive.

Proposition 6.1.22. Toute application super-additive est croissante : si $\underline{\mu}$ est une application super-additive sur X et A, B sont deux sous-ensembles de X tels que $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Démonstration. De fait, avec les notations de l'énoncé, on a

$$\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A) \geqslant \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geqslant \mu(A).$$

Proposition 6.1.23. Toute application super-additive est dénombrablement super-additive : $si \ \underline{\mu}$ est une application super-additive sur X et $(A_k)_k$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints de X, alors

$$\underline{\mu}(\cup_k A_k) \geqslant \sum_k \underline{\mu}(A_k).$$

Démonstration. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\underline{\mu}(\bigcup_{k=1}^{m} A_k) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \underline{\mu}(A_k),$$

pour tout nombre naturel $m \ge 1$. Puisque l'application est monotone, on obtient

$$\underline{\mu}(\cup_k A_k) \geqslant \sum_{k=1}^m \underline{\mu}(A_k)$$

pour ces mêmes nombres m. Un passage à la limite permet alors de conclure. \Box

Définition 6.1.24. Soit $\underline{\mu}$ une application super-additive sur X. Une partie M de X est μ -mesurable si pour tout ensemble A de X tel que $\mu(A) < \infty$, on a

$$\underline{\mu}(A) \leqslant \underline{\mu}(A \cap M) + \underline{\mu}(A \cap M^c).$$

Bien sûr, pour une telle application, on peut remplacer le signe d'inégalité par une égalité dans la relation précédente. Qui plus est, on vérifie directement que M est $\underline{\mu}$ -mesurables si et seulement si M^c l'est.

Théorème 6.1.25. Si $\underline{\mu}$ est une application super-additive sur X alors la collection des ensembles μ -mesurables est une algèbre : si A et B sont deux ensembles de X μ -mesurables,

- $A \cup B$ est μ -mesurables,
- A^c est μ -mesurables,
- $A \setminus B$ est μ -mesurables.

Démonstration. Démontrons le premier point. Si $E \subset X$ vérifie $\mu(E) < \infty$, il vient

$$\underline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E \cap A) + \underline{\mu}(E \cap A^c)$$

$$= \mu(E \cap A \cap B) + \mu(E \cap A \cap B^c) + \mu(E \cap A^c \cap B) + \mu(E \cap A^c \cap B^c).$$
(6.4)

En remplaçant E par $E \cap (A \cup B)$ dans cette égalité, il vient

$$\mu(E\cap (A\cup B))=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap A\cap B^c)+\mu(E\cap A^c\cap B)+\mu(\varnothing).$$

Enfin, en injectant cette identité dans la relation (6.4), on obtient

$$\underline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E \cap (A \cup B)) + \underline{\mu}(E \cap A^c \cap B^c),$$

ce qui suffit.

Le second point a déjà été considéré et pour le troisième point, il suffit de vérifier que l'on a $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$.

Lemme 6.1.26. Si $\underline{\mu}$ est une application super-additive sur X et si A est $\underline{\mu}$ -mesurable, alors pour tous ensembles E et E' tels que $E \subset A$, $E' \subset A^c$ et $\underline{\mu}(E \cup E') < \infty$, on a $\mu(E \cup E') = \mu(E) + \mu(E')$.

Démonstration. De fait, on a

$$\underline{\mu}(E \cup E') = \underline{\mu}((E \cup E') \cap A) + \underline{\mu}((E \cup E') \cap A') = \underline{\mu}(E \cap A) + \underline{\mu}(E' \cap A')$$
$$= \underline{\mu}(E) + \underline{\mu}(E').$$

Proposition 6.1.27. Si $\underline{\mu}$ est une application super-additive sur X et A_1, \ldots, A_n sont n ensembles $\underline{\mu}$ -mesurables de X deux à deux disjoints, alors pour tout ensemble E de X tel que $\mu(E) < \infty$, on a

$$\underline{\mu}(\bigcup_{k=1}^{n} E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(E \cap A_k).$$

Démonstration. Procédons par récurrence. On a

$$\underline{\mu}((E \cap A_1) \cup (E \cap A_2)) = \underline{\mu}((E \cap A_1) \cup (E \cap A_2) \cap A_1)$$

$$+ \underline{\mu}((E \cap A_1) \cup (E \cap A_2) \cap A_1^c)$$

$$= \underline{\mu}((E \cap A_1) + \underline{\mu}((E \cap A_2).$$

Supposons le résultat établi pour l < n et montrons qu'il est toujours satisfait pour l+1. Il vient

$$\underline{\mu}(\bigcup_{k=1}^{l+1} E \cap A_k) = \underline{\mu}(\bigcup_{k=1}^{l+1} E \cap A_k \cap A_{l+1}) + \underline{\mu}(\bigcup_{k=1}^{l+1} E \cap A_k \cap A_{l+1}^c)$$

$$= \underline{\mu}(E \cap A_{l+1}) + \underline{\mu}(\bigcup_{k=1}^{l} E \cap A_k)$$

$$= \underline{\mu}(E \cap A_{l+1}) + \sum_{k=1}^{l} \underline{\mu}(E \cap A_k),$$

ce qui permet de conclure.

Corollaire 6.1.28. Si $\underline{\mu}$ est une application super-additive sur X telle que $\underline{\mu}(X) < \infty$, alors $\underline{\mu}$ est finiment additif sur les ensembles $\underline{\mu}$ -mesurables : si A_1, \ldots, A_n sont n ensembles $\underline{\mu}$ -mesurables de X deux à deux disjoints, alors

$$\underline{\mu}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(A_k).$$

Proposition 6.1.29. Si $\underline{\mu}$ est une application super-additive sur X telle que $\underline{\mu}(X) < \infty$, alors si A et B sont μ -mesurables, on a

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Démonstration. Il vient de suite

$$\underline{\mu}(A \cup B) = \underline{\mu}(A \cup (B \setminus A)) = \underline{\mu}(A) + \underline{\mu}(B \setminus A)$$
$$= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B),$$

comme attendu. \Box

Définition 6.1.30. Soit $\underline{\mu}$ est une application super-additive; une partie A de X est $\underline{\mu}$ -négligeable si A est μ -mesurable et $\mu(A) = 0$.

Proposition 6.1.31. Soit $\underline{\mu}$ est une application super-additive; toute partie d'un ensemble μ -négligeable est μ -négligeable.

Démonstration. Soit A un ensemble $\underline{\mu}$ -négligeable et B une partie de A; par monotonie, on a $\mu(B)=0$.

Montrons que B est μ -mesurable. Si $E \subset X$ vérifie $\mu(E) < \infty$, on a

$$\underline{\mu}(E) \geqslant \underline{\mu}(E \cap B) + \underline{\mu}(E \cap B^c) = \underline{\mu}(E \cap B^c)$$

$$\geqslant \underline{\mu}(E \cap A^c) = \underline{\mu}(E \cap A^c) + \underline{\mu}(E \cap A) = \underline{\mu}(E),$$

puisque A est μ -mesurable.

Le fait d'être nul pour une application super-additive n'implique pas la négligeabilité.

Remarque 6.1.32. Soit $X = \{0, 1, 2\}$ et μ l'application définie sur $\wp(X)$ par

$$\underline{\mu}(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \#A - 1 & \text{si } A \neq \emptyset \end{array} \right..$$

On a bien sûr $\mu(\{0\}) = 0$, mais $\{0\}$ n'est pas μ -mesurable, puisque

$$\mu(\{0,1,2\}) > \mu(\{0\}) + \mu(\{1,2\}).$$

Une mesure intérieure sur X est une application super-additive sur X continue à droite.

Définition 6.1.33. Une application super-additive μ_* sur X est une mesure intérieure si pour toute suite d'ensembles décroissante $(A_k)_k$ de X telle que $\mu_*(A_1) < \infty$, on a

$$\lim_{k} \mu_*(A_k) = \mu_*(\cap_k A_k). \tag{6.5}$$

La condition (6.5) adjointe à la sous-additivité permet d'obtenir des propriétés intéressantes.

Proposition 6.1.34. Soit μ_* une mesure intérieure sur X; si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles μ_* -mesurables, alors $\cup_k A_k$ est aussi μ_* -mesurable. En particulier, la classe des ensembles μ_* -mesurables forme une σ -algèbre.

Démonstration. Soit B une partie de X telle que $\mu_*(B) < \infty$. Pour tout indice, k, soit $S_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$ et posons $S_\infty = \bigcup_k A_k$. Puisque S_k est μ_* -mesurable pour tout k, on a

$$\mu^*(B) \leq \mu_*(B \cap S_k) + \mu_*(B \cap S_k^c) \leq \mu_*(B \cap S_\infty) + \mu_*(B \cap S_k^c),$$

pour tout indice k. Puisque les ensembles $B \cap S_k^c$ déroissent avec k, l'égalité (6.5) permet décrire

$$\mu^*(B) \leqslant \mu_*(B \cap S_{\infty}) + \mu_*(B \cap S_{\infty}^c),$$

ce qui suffit.

Proposition 6.1.35. Soit μ_* une mesure intérieure sur X; si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles μ_* -mesurables deux à deux disjoints, alors, pour tout $B \subset X$ tel que $\mu_*(B) < \infty$, on a

$$\mu_*(B \cap (\cup_k A_k)) = \sum_k \mu_*(B \cap A_k).$$

Démonstration. Soit $S_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$; par définition d'une mesure intérieure, on a

$$\lim_{k} \mu_*(B \setminus S_j) = \mu_*(\cap_k(B \setminus S_k)) = \mu_*(\cap_k(B \cap A_k^c)).$$

De plus, puisque $\cup_i A_i$ et S_k sont μ_* -mesurables, on peut écrire

$$\mu(B) = \mu_*(B \cap (\cup_i A_i)) + \mu_*(B \cap (\cap_i A_i^c)) = \mu_*(B \cap S_k) + \mu_*(B \cap S_k^c),$$

pour tout k. On a donc

$$\mu_*(\cup_j (B \cap A_j)) + \mu_*(\cap_j (B \cap A_j^c)) = \mu_*(B \cap S_k) + \mu_*(B \cap S_k^c)$$
$$= \sum_{j=1}^k \mu_*(B \cap A_j) + \mu_*(B \setminus S_k).$$

En passant à la limite sur k, on obtient

$$\mu_*(\cup_j (B \cap A_j)) + \mu_*(\cap_j (B \cap A_j^c)) = \sum_j \mu_*(B \cap A_j) + \mu_*(\cap_j (B \cap A_j^c)),$$

ce qui permet de conclure.

Corollaire 6.1.36. Soit μ_* une mesure intérieure sur X; si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles μ_* -mesurables, alors, pour tout $B \subset X$ tel que $\mu_*(B) < \infty$, on a

$$\mu_*(B \cap (\cup_k A_k)) \leqslant \sum_k \mu_*(B \cap A_k).$$

Démonstration. Soit $D_1 = A_1$ et $D_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j$. Ces ensembles sont μ_* -mesurables, deux à deux disjoints et tels que $\bigcup_k D_k = \bigcup_k A_k$. Il vient de suite

$$\mu_*(B \cap (\cup_k A_k)) = \mu_*(B \cap (\cup_k D_k)) = \sum_k \mu_*(B \cap D_k) \leqslant \sum_k \mu_*(B \cap A_k),$$

comme annoncé. \Box

Bien sûr, si $\mu_*(X) < \infty$, le résultat précédent implique que l'on a toujours $\mu_*(\cup_k A_k) \le \sum_k \mu_*(A_k)$.

Mesure intérieure construite à partir d'une mesure extérieure

L'approche de Lebesgue reposait originellement sur la construction d'une mesure extérieure et d'une mesure intérieure associée pour définir la mesurabilité. Nous donnons ici les idées de base de cette théorie. Nous suivons les approches de Lebesgue et Carathéodory. Certains résultats sont inspirés de [9]. L'approche est à chaque fois identique : un ensemble mesurable A est un ensemble pour lequel $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. La proposition 6.1.47 montre que l'on peut bien souvent s'affranchir des mesures intérieures.

Définition 6.1.37. Si μ^* est une mesure extérieure finie sur X, la mesure intérieure de Lebesgue associée est l'application μ_* définie sur $\wp(X)$ par

$$\mu_*(A) = \mu^*(X) - \mu^*(A^c).$$

Proposition 6.1.38. Une mesure intérieure de Lebesgue construite à partir d'une mesure extérieure régulière est une mesure intérieure au sens de la définition 6.1.33.

Démonstration. On remarque directement qu'il s'agit d'une application super-additive. L'égalité (6.5) résulte de la proposition 6.1.8.

Originellement, Lebesgue définit un ensemble mesurable comme un ensemble E pour lequel $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Cela revient à exiger l'égalité $\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu^*(X)$. Montrons que cette condition est équivalente à notre définition pour les mesures extérieures régulières finies.

Proposition 6.1.39. Si μ^* est une mesure extérieure régulière sur X finie, alors M est μ^* -mesurable si et seulement si

$$\mu^*(X) = \mu^*(M) + \mu^*(M^c).$$

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Prouvons la suffisance; étant donné une partie A de X, soit B un ensemble μ^* -mesurable contenant A tel que $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. Par définition de la mesurabilité, on a

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap B) + \mu^*(M \cap B^c)$$

et

$$\mu^*(M^c) = \mu^*(M^c \cap B) + \mu^*(M^c \cap B^c).$$

Il vient donc

$$\mu^*(X) = \mu^*(M) + \mu^*(M^c)$$

$$= \mu^*(M \cap B) + \mu^*(M \cap B^c) + \mu^*(M^c \cap B) + \mu^*(M^c \cap B^c)$$

$$\geqslant \mu^*(B) + \mu^*(B^c) = \mu^*(X).$$

On a donc obtenu l'égalité

$$\mu^*(B) + \mu^*(B^c) = \mu^*(M \cap B) + \mu^*(M \cap B^c) + \mu^*(M^c \cap B) + \mu^*(M^c \cap B^c).$$

Vu la sous-additivité de μ^* , on a

$$\mu^*(B^c) \leqslant \mu^*(M^c \cap B) + \mu^*(M^c \cap B^c)$$

et donc

$$\mu^*(B) \geqslant \mu^*(M \cap B) + \mu^*(M \cap B^c).$$

Maintenant, puisque $A\cap M\subset B\cap M$ et $A\cap E^c\subset B\cap E^c$, on a

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \cap E^c) \leq \mu^*(B) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que M est mesurable, puisque A est arbitraire.

Ce résultat est aussi valable pour les mesures intérieures.

Définition 6.1.40. Étant donné une mesure extérieure ou intérieure ν sur X, une application super-additive $\underline{\mu}$ sur X est dite ν -régulière si pour toute partie A de X, il existe un ensemble B inclus dans A qui est à la fois $\underline{\mu}$ -mesurable, ν -mesurable et tel que $\mu(A) = \nu(B)$.

Proposition 6.1.41. Si $\underline{\mu}$ est une application super-additive finie $\underline{\mu}$ -régulière sur X, alors une partie M de X est $\underline{\mu}$ -mesurable si et seulement si

$$\mu(X) = \mu(M) + \mu(M^c).$$

 $D\acute{e}monstration$. La condition est évidemment nécessaire; prouvons la suffisance. Soit M_1 et M_2 deux ensembles $\underline{\mu}$ -mesurables tels que $M_1 \subset M$, $M_2 \subset M^c$ et $\underline{\mu}(M_1) = \underline{\mu}(M)$, $\underline{\mu}(M_2) = \underline{\mu}(M^c)$. Pour tout ensemble A, soit M_A une partie de A $\underline{\mu}$ -mesurable telle que $\underline{\mu}(M_A) = \underline{\mu}(A)$. On a

$$\mu(M_1) + \mu(M_1^c) = \mu(X) = \mu(M) + \mu(M^c)$$

et l'égalité $\underline{\mu}(M_1) = \underline{\mu}(M)$ implique $\underline{\mu}(M_1^c) = \underline{\mu}(M^c)$.

On a $M_2 \subset M^c \subset M_1^c$, donc

$$\underline{\mu}(M_A \cap M_1^c) - \underline{\mu}(M_A \cap M^c) \leqslant \underline{\mu}(M_A \cap M_1^c) - \underline{\mu}(M_A \cap M_2) = \underline{\mu}(M_A \cap (M_1^c \setminus M_2))$$

$$\leqslant \underline{\mu}(M_1^c \setminus M_2) = \underline{\mu}(M_1^c) - \underline{\mu}(M_2) = \underline{\mu}(M^c) - \underline{\mu}(M^c)$$

$$= 0$$

Nous venons donc de montrer que l'on a $\underline{\mu}(M_A \cap M^c) = \underline{\mu}(M_A \cap M_1^c)$. En conséquence, on peut écrire

$$\underline{\mu}(A \cap M) + \underline{\mu}(A \cap M^c) \geqslant \underline{\mu}(M_A \cap M_1) + \underline{\mu}(M_A \cap M^c)$$

$$= \underline{\mu}(M_A \cap M_1) + \underline{\mu}(M_A \cap M_1^c) = \underline{\mu}(M_A)$$

$$= \underline{\mu}(A),$$

ce qui suffit. \Box

Introduisons la construction d'une mesure intérieure selon Carathéodory.

Définition 6.1.42. Une mesure intérieure μ_* sur X est une mesure intérieure de Carathéodory s'il existe une mesure extérieure μ^* sur X telle que

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu^*(M) : M \subset A, M \text{ est } \mu^*\text{-mesurable}\},\$$

pour tout $A \subset X$.

Si μ_* est une mesure intérieure de Carathéodory, nous noterons systématiquement μ^* la mesure extérieure associée. Bien sûr, si A est μ^* -mesurable, on a $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Lemme 6.1.43. Soit μ_* une mesure intérieure de Carathéodory sur X; si M est μ^* -mesurable, alors M est également μ_* -mesurable.

 $D\acute{e}monstration$. Si A est une partie de X, on a

$$\begin{split} \mu_*(A) &= \sup\{\mu^*(M'): \ M' \subset A \text{ et } M' \ \mu^*\text{-mesurable}\} \\ &= \sup\{\mu^*(M' \cap M) + \mu^*(M' \cap M^c): \ M' \subset A \text{ et } M' \ \mu^*\text{-mesurable}\} \\ &\leqslant \sup\{\mu^*(M' \cap M): \ M' \subset A \text{ et } M' \ \mu^*\text{-mesurable}\} \\ &+ \sup\{\mu^*(M'' \cap M^c): \ M'' \subset A \text{ et } M'' \ \mu^*\text{-mesurable}\} \\ &= \sup\{\mu^*(M'): \ M' \subset A \cap M \text{ et } M' \ \mu^*\text{-mesurable}\} \\ &+ \sup\{\mu^*(M''): \ M'' \subset A \cap M^c \text{ et } M'' \ \mu^*\text{-mesurable}\} \\ &= \mu_*(A \cap M) + \mu_*(A \cap M^c), \end{split}$$

ce qui suffit.

Lemme 6.1.44. Toute mesure intérieure de Carathéodory μ_* sur X est μ^* -réqulière.

Démonstration. Si $\mu_*(A) = \infty$, M = X convient. Si $\mu_*(A) < \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit M_k un ensemble μ^* -mesurable inclus dans A tel que

$$\mu_*(A) < \mu^*(M_k) + 1/k.$$

Soit $M = \bigcup_k M_k$; cet ensemble est μ^* -mesurable, inclus dans A et tel que $\mu^*(M_k) \leqslant \mu^*(M)$ pour tout indice k. On a ainsi

$$\mu_*(A) \leqslant \mu^*(M) = \mu_*(M).$$

De plus, nous savons que M_k est μ_* -mesurable pour tout k, ce qui implique que M est également μ_* -mesurable. \Box

Proposition 6.1.45. Toute mesure intérieure de Carathéodory est une mesure intérieure au sens de la définition 6.1.33.

Démonstration. Étant donné une mesure intérieure de Carathéodory μ_* sur X, seule l'égalité (6.5) n'est pas évidente. Soit $(A_k)_k$ une suite d'ensemble de X décroissante. Pour tout indice k, soit $M_k \subset A_k$ une partie μ_* -mesurable, μ^* -mesurable et telle que $\mu_*(A_k) = \mu^*(M_k)$. On peut écrire

$$\mu_*(\cap_k A_k) = \mu_*(\overline{\lim_k} A_k) \geqslant \mu_*(\overline{\lim_k} M_k) = \mu^*(\overline{\lim_k} M_k)$$
$$\geqslant \overline{\lim_k} \mu^*(M_k) = \overline{\lim_k} \mu_*(A_k) = \lim_k \mu_*(A_k) \geqslant \mu_*(\cap_k A_k),$$

ce qui suffit. \Box

Nous pouvons à présent comparer les approches de Lebesgue et Carathéodory.

Proposition 6.1.46. Une mesure extérieure μ^* sur X finie est régulière si et seulement si

$$\mu^*(X) - \mu^*(A^c) = \mu_*(A),$$

pour tout $A \subset X$, où μ_* est la mesure extérieure de Carathéodory.

Démonstration. Supposons que μ^* est régulier et étant donné A, soit M un ensemble μ^* mesurable contenant A^c tel que $\mu^*(A^c) = \mu^*(M)$. Soit aussi M' un ensemble μ^* -mesurable
tel que $M' \subset A$ et $\mu_*(A) = \mu^*(M')$. On a

$$\mu^*(X) - \mu^*(A^c) = \mu^*(X) - \mu^*(M) = \mu^*(M^c) \leqslant \mu_*(A),$$

puisque M^c est un ensemble μ^* -mesurable inclus dans A. Cela étant, on a aussi

$$\mu_*(A) = \mu^*(M') = \mu^*(X) - \mu^*(M'^c) \leqslant \mu^*(X) - \mu^*(A^c),$$

ce qui montre la nécessité de la condition.

Montrons que la condition est suffisante. Étant donné un ensemble A de X, soit $M \subset A^c$ un ensemble μ^* -régulier tel que

$$\mu^*(X) - \mu^*(A) = \mu_*(A^c) = \mu^*(M),$$

ce qui implique

$$\mu^*(A) = \mu^*(X) - \mu^*(M) = \mu^*(M^c).$$

Autrement dit, nous avons trouvé un ensemble M' μ^* -mesurable contenant A et tel que $\mu^*(A) = \mu^*(M')$, ce qui montre que μ^* est régulier.

Proposition 6.1.47. Si μ^* est une mesure extérieure régulière finie sur X, soit μ_* la mesure intérieure de Carathéodory associée : les conditions suivantes sont équivalentes :

- A est μ_* -mesurable,
- A est μ^* -mesurable,
- $-\mu_*(A) = \mu^*(A).$

Démonstration. Puisque X est μ^* -mesurable, on a $\mu^*(X) = \mu_*(X)$. Supposons que A soit μ_* -mesurable et soit M_1 , M_2 deux ensembles μ^* -mesurables tels que $M_1 \subset A$, $M_2 \subset A^c$ et $\mu^*(M_1) = \mu_*(A)$, $\mu^*(M_2) = \mu_*(A^c)$. On a

$$\mu^*(X) = \mu_*(X) = \mu_*(A) + \mu_*(A^c)$$

$$= \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2)$$

$$= \mu^*(X) - \mu^*(M_1^c) + \mu^*(X) - \mu^*(M_2^c).$$

On a donc

$$\mu^*(X) = \mu^*(M_1^c) + \mu^*(M_2^c) \geqslant \mu^*(A^c) + \mu^*(A) \geqslant \mu^*(X),$$

ce qui permet de conclure, grâce à la proposition 6.1.39.

Nous savond déjà que si A est μ^* -mesurable alors $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Supposons que A soit tel que $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. On a

$$\mu_*(A) + \mu_*(A^c) = \mu^*(A) + \mu_*(A^c) = \mu^*(A) + (\mu^*(X) - \mu^*(A))$$
$$= \mu^*(X) = \mu_*(X),$$

ce qui montre que A est μ_* -mesurable et termine la démonstration.

La mesure intérieure de Lebesgue

À titre d'application, présentons la mesure de Lebesgue via une mesure intérieure. À partir de la mesure extérieure, Lebesgue pose, étant donné un ensemble A de \mathbb{R} inclus dans l'intervalle]a,b[,

$$\mathcal{L}_*(A) = b - a - \mathcal{L}^*(]a, b[\backslash A).$$

Il définit les ensembles mesurables comme étant ceux pour lesquels la mesure inférieure est égale à la mesure supérieure. Dans ce cas, vu la symétrie de l'égalité précédente, il est clair que la mesure extérieure ne joue qu'un rôle auxiliaire.

Définition 6.1.48. La mesure intérieure de Lebesgue est l'application

$$\mathcal{L}_*: \wp(\mathbb{R}) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \sup \{\mathcal{L}^*(K): K \subset A, K \text{ est compact}\}.$$

On a bien entendu $\mathcal{L}_*(A) \leqslant \mathcal{L}^*(A)$ pour tout ensemble A, avec l'égalité si A est compact.

Remarque 6.1.49. Il pourrait sembler plus intuitif de partir de la définition de \mathcal{L}^* pour poser

$$\mathcal{L}_*(A) = \sup\{\sum_k \operatorname{Vol}(I_k) : \cup_k I_k \subset A, \ I_k \text{ est un intervalle compact}\}.$$

Cependant, avec cette définition, les irrationnels de [0,1] seraient de mesure intérieure nulle.

Proposition 6.1.50. L'application \mathcal{L}_* est mesure intérieure.

 $D\acute{e}monstration$. L'application est super-additive. Si A et B sont deux ensembles disjoints de \mathbb{R} , soit K_1 et K_2 deux ensembles compacts inclus dans A et B respectivement. La distante entre K_1 et K_2 étant strictement positive, on a

$$\mathcal{L}^*(K_1) + \mathcal{L}^*(K_2) = \mathcal{L}^*(K_1 \cup K_2) \leqslant \mathcal{L}_*(A \cup B),$$

puisque $K_1 \cup K_2$ est un compact de $A \cup B$. On a donc obtenu

$$\mathcal{L}_*(A) + \mathcal{L}_*(B) \leqslant \mathcal{L}_*(A \cup B).$$

Soit maintenant une suite décroissante d'ensembles $(A_k)_k$ telle que $\mu_*(A_1) < \infty$. Étant donné $\varepsilon > 0$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit K_k un compact de A_k tel que $\mu_*(A_k) < \mu^*(K_k) + \varepsilon/k$. L'ensemble $\overline{\lim}_k K_k$ est un compact de $\cap_k A_k$ et

$$\lim_{k} \mu_{*}(A_{k}) \leqslant \overline{\lim_{k}} \mu^{*}(K_{k}) + \frac{\varepsilon}{k} \leqslant \mu^{*}(\overline{\lim_{k}} K_{k}) \leqslant \mu_{*}(\cap_{k} A_{k}).$$

Aussi, on a $\mu_*(\cap_k A_k) \leqslant \mu_*(A_k)$ pour tout k et donc $\mu_*(\cap_k A_k) \leqslant \lim_k \mu_*(A_k)$.

La définition suivante est naturelle.

Définition 6.1.51. Un ensemble A est Lebesgue-mesurable si $\mathcal{L}_*(A) = \mathcal{L}^*(A)$.

Lemme 6.1.52. Les intervalles sont Lebesgue-mesurables et on a $\mathcal{L}_*(I) = \mathcal{L}^*(I) = \operatorname{Vol}(I)$, pour tout intervalle I de \mathbb{R} .

Démonstration. Supposons que I soit un intervalle d'extrémités $a, b \in \mathbb{R}$, avec a < b. Nous savons déjà que $\mathcal{L}^*(I) = b - a$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, soit $I_{\varepsilon} = [a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2]$. Cet intervalle est compact et on a $\mathcal{L}^*(I_{\varepsilon}) = b - a - \varepsilon$. Ainsi, on doit avoir

$$\mathcal{L}_*(I) \geqslant \mathcal{L}^*(I_{\varepsilon}) = b - a - \varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, on obtient $\mathcal{L}_*(I) \geqslant b - a$.

Si I est un intervalle non borné, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un intervalle compact I_k inclus dans I tel que $\mathcal{L}^*(I_k) > k$, ce qui implique $\mathcal{L}_*(I) = \infty$.

Proposition 6.1.53. Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles Lebesgues-mesurables deux à deux disjoints, alors $\cup_k A_k$ est Lebesgue-mesurable et

$$\mathcal{L}_*(\cup_k A_k) = \mathcal{L}^*(\cup_k A_k) = \sum_k \mathcal{L}^*(A_k).$$

Démonstration. On a bien entendu

$$\mathcal{L}^*(\cup_k A_k) \leqslant \sum_k \mathcal{L}^*(A_k).$$

Supposons avoir $\mathcal{L}_*(A_k) < \infty$ pour tout k. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit K_k un compact inclus dans A_k tel que

$$\mathcal{L}^*(K_k) > \mathcal{L}_*(A_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Les ensembles K_k sont deux à deux disjoints et par conséquent, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathcal{L}^*(\bigcup_{k=1}^{k_0} K_k) = \sum_{k=1}^{k_0} \mathcal{L}^*(K_k) \geqslant \sum_{k=1}^{k_0} \mathcal{L}_*(A_k) - \varepsilon.$$

Puisque $\bigcup_{k=1}^{k_0} K_k$ est un compact de $\bigcup_k A_k$, il est Lebesgue-mesurable, donc

$$\mathcal{L}_*(\cup_k A_k) \geqslant \mathcal{L}^*(\bigcup_{k=1}^{k_0} K_k) \geqslant \sum_{k=1}^{k_0} \mathcal{L}_*(A_k) - \varepsilon.$$

En faisant tendre k_0 vers l'infini, on obtient

$$\mathcal{L}_*(\cup_k A_k) \geqslant \sum_k \mathcal{L}^*(A_k),$$

 ε étant arbitraire.

Si $\mathcal{L}_*(A_{k_0}) = \infty$, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe un compact $K_{k_0,l}$ de A_{k_0} tel que $\mathcal{L}^*(K_{k_0,l}) > l$. Si, pour $k \neq k_0$, K_k est un compact de A_k , on obtient

$$\mathcal{L}_*(\cup_k A_k) \geqslant \mathcal{L}^*(K_{k_0,l} \cup \bigcup_{k=1}^{k_0-1} K_k) > l,$$

ce qui implique $\mathcal{L}_*(\cup_k A_k) = \infty$.

Lemme 6.1.54. Les ensembles ouverts sont Lebesque-mesurables

Démonstration. Cela résulte de la Proposition A.2.2 et de la Proposition 6.1.53.

La mesure intérieure proposée ici est celle de Carathéodory.

Proposition 6.1.55. On a

$$\mathcal{L}_*(A) = \sup\{\mathcal{L}^*(M) : M \subset A, M \text{ est } \mathcal{L}^*\text{-mesurable}\}.$$
(6.6)

Démonstration. Cela résulte de la régularité de la mesure de Lebesgue. Soit \mathcal{L}_* la mesure intérieure de Lebesgue telle que proposée dans la Définition 6.1.48 et posons

$$\mu_*(A) = \sup \{ \mathcal{L}^*(M) : M \subset A, M \text{ est } \mathcal{L}^*\text{-mesurable} \}.$$

On a bien entendu $\mathcal{L}_*(A) \leq \mu_*(A)$, par définition. Supposons d'abord $\mu_*(A)$ fini. Étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, soit M_k un ensemble \mathcal{L}^* -mesurable tel que $M_k \subset A$ et

$$\mathcal{L}^*(M_k) > \mu_*(A) - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Par régularité, pour M_k fixé, étant donné $l \in \mathbb{N}^*$, il existe un compact $K_{k,l}$ inclus dans M_k tel que

$$\mathcal{L}^*(K_{k,l}) > \mathcal{L}^*(M_k) - \frac{1}{2^{l+1}}.$$

On a donc

$$\mathcal{L}^*(K_{k,k}) > \mu_*(A) - \frac{1}{2^k}$$

et

$$\mathcal{L}_*(A) \geqslant \sup_k \mathcal{L}^*(K_{k,k}) \geqslant \mu_*(A),$$

comme attendu.

Si $\mu_*(A) = \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble \mathcal{L}^* mesurable M_k de A tel que $\mathcal{L}^*(M_k) > 2k$ et donc un compact K de M tel que $\mathcal{L}^*(K_k) > k$, ce qui implique $\mathcal{L}_*(A) = \infty$.

Lemme 6.1.56. Tout ensemble \mathcal{L}^* -mesurable est Lebesgue-mesurable.

Démonstration. Vu la relation (6.6), si A est \mathcal{L}^* -mesurable, on a directement l'égalité $\mathcal{L}_*(A) = \mathcal{L}^*(A)$.

Montrons maintenant que \mathcal{L}_* peut aussi prendre la forme d'une mesure intérieure de Lebesgue, au sens de la Définition 6.1.37.

Proposition 6.1.57. Si A est une ensemble inclus dans un ensemble ouvert borné U, alors on a

$$\mathcal{L}_*(A) = \mathcal{L}^*(U) - \mathcal{L}^*(U \setminus A).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact de A tel que

$$\mathcal{L}^*(K) > \mathcal{L}_*(A) - \varepsilon.$$

On peut écrire

$$\mathcal{L}^*(U) - \mathcal{L}^*(U \setminus A) \geqslant \mathcal{L}^*(U) - \mathcal{L}^*(U \setminus K) = \mathcal{L}^*(K) > \mathcal{L}_*(A) - \varepsilon.$$

ce qui procure $\mathcal{L}_*(A) \leqslant \mathcal{L}^*(U) - \mathcal{L}^*(U \setminus A)$.

Maintenant, pour $\varepsilon > 0$, soit Ω un ouvert de U comprenant $U \setminus A$ et tel que

$$\mathcal{L}_*(\Omega) < \mathcal{L}_*(U \setminus A) + \varepsilon.$$

Puisque $U \setminus \Omega$ est une partie de A, on a

$$\mathcal{L}^*(U) - \mathcal{L}^*(U \setminus A) < \mathcal{L}^*(U) - \mathcal{L}^*(\Omega) + \varepsilon = \mathcal{L}^*(U \setminus \Omega) + \varepsilon = \mathcal{L}_*(U \setminus \Omega) + \varepsilon$$

$$\leq \mathcal{L}_*(A) + \varepsilon,$$

ce qui termine la démonstration.

On retrouve la Proposition 6.1.47 dans le cas de la mesure de Lebesgue.

Proposition 6.1.58. Un ensemble borné est \mathcal{L}^* -mesurable si et seulement s'il est Lebesgue-mesurable.

Démonstration. Nous savons déjà qu'un ensemble \mathcal{L}^* -mesurable est Lebesgue-mesurable. Si l'ensemble borné A vérifie $\mathcal{L}_*(A) = \mathcal{L}^*(A)$, alors, vu la Proposition 6.1.57, on a

$$\mu^*(A) + \mu^*(U \setminus A) = \mu^*(U),$$

pour un ensemble ouvert U assez grand. Il en résulte que A est \mathcal{L}^* -mesurable.

6.2 La mesure de Hausdorff

La mesure de Hausdorff peut être vue comme une généralisation de la mesure de Lebesgue. Elle joue un rôle important en analyse fonctionnelle [12], en analyse multifractale [13] et en géométrie [18].

Définition

Par souci de simplicité, nous nous limiterons ici aux espaces euclidiens, même si la plupart des considérations présentées ici peuvent être transposées aux espaces métrisables sépar'es.

Étant donné une partie A de \mathbb{R}^d et $\varepsilon > 0$, soit $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A)$ l'ensemble des recouvrements de A par des ensembles de diamètre au plus ε :

$$\mathcal{R}_{\varepsilon}(A) = \{(E_k)_k : A \subset \cup_k E_k \text{ et } \operatorname{diam}(E_k) \leqslant \varepsilon \ \forall k\}.$$

Pour $h \geqslant 0$, on définit alors l'application $\mathcal{H}^h_{\varepsilon}$ par

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}: \wp(\mathbb{R}^{d}) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \inf\{\sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(E_{k}): (E_{k})_{k} \in \mathcal{R}_{\varepsilon}\}.$$
 (6.7)

Pour h=0, il faut soit convenir qu'une somme vide vaut 0, soit poser $\mathcal{H}^0_{\varepsilon}(\varnothing)=0$.

Lemme 6.2.1. L'application définie par (6.7) est une mesure extérieure.

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ et h > 0, \varnothing peut être recouvert par un ensemble de diamètre nul donc $\mathcal{H}^h_{\varepsilon}(\varnothing) \leq 0$.

Si on a $A \subset B$ et $(E_k)_k \in \mathcal{R}_{\varepsilon}(B)$, alors $(E_k)_k \in \mathcal{R}_{\varepsilon}(A)$ et donc $\mathcal{H}_{\varepsilon}^h(A) \leqslant \mathcal{H}_{\varepsilon}^h(B)$.

Enfin, si $(A_k)_k$ est une suite de parties de \mathbb{R}^d , soit $\delta > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit $(E_{k,j})_j$ une suite de $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A_k)$ telle que

$$\sum_{j} \operatorname{diam}^{h}(E_{k,j}) < \mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(A_{k}) + \delta/2^{k}.$$

La suite définie par $(E_{k,j})_{k,j}$ appartient à $\mathcal{R}_{\varepsilon}(\cup_k A_k)$ et on a trivialement

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(\cup_{k}A_{k}) \leqslant \sum_{k}\sum_{j}\operatorname{diam}^{h}(E_{k,j}) < \sum_{k}\mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(A_{k}) + \delta,$$

ce qui permet de conclure.

Définition 6.2.2. Étant donné $h \ge 0$, la mesure extérieure de Hausdorff d'exposant h est l'application

$$\mathcal{H}^h: \wp(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A).$$

Puisque $0 < \varepsilon \leq \delta$ implique $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A) \subset \mathcal{R}_{\delta}(A)$, on a $\mathcal{H}_{\delta}^{h}(A) \leq \mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(A)$ pour de tels nombres. On en déduit que l'on a

$$\mathcal{H}^h(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{\varepsilon}^h(A),$$

pour tout ensemble A.

Proposition 6.2.3. L'application \mathcal{H}^h est une mesure extérieure métrique.

Démonstration. On constate directement que $\mathcal{H}^h(\varnothing) = 0$; tout aussi aisément, $A \subset B$ implique $\mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A) \leqslant \mathcal{H}^h(B)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\mathcal{H}^h(A) \leqslant \mathcal{H}^h(B)$. De la même manière, si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles, on a

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(\cup_{k}A_{k})\leqslant\sum_{k}\mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(A_{k})\leqslant\sum_{k}\mathcal{H}^{h}(A_{k}).$$

Ainsi, \mathcal{H}^h est une mesure extérieure.

Si maintenant A et B sont deux ensembles tels que d(A, B) > 0, soit $\delta = d(A, B)$. Pour $0 < \varepsilon < \delta$, si $(E_k)_k$ appartient à $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A \cup B)$, on a soit $E_k \cap A = \emptyset$, soit $E_k \cap B = \emptyset$ pour tout indice k. Dès lors, on a, pour un tel nombre ε , $\mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A \cup B) = \mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A) + \mathcal{H}^h_{\varepsilon}(B)$. On a donc $\mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A) + \mathcal{H}^h_{\varepsilon}(B) \leq \mathcal{H}^h(A \cup B)$ et un passage à la limite permet de conclure. \square

Remarque 6.2.4. Nous avons incidemment montré que $\mathcal{H}^h_{\varepsilon}$ est aussi une mesure extérieure métrique.

Définition 6.2.5. La mesure de Hausdorff d'exposant $h \ge 0$ est l'application \mathcal{H}^h restreinte aux ensembles \mathcal{H}^h -mesurables.

Le résultat géométrique suivant nous sera utile par la suite.

Lemme 6.2.6. Si A est une partie bornée de \mathbb{R}^d , A et son enveloppe convexe ont le même diamètre.

Démonstration. Soit B l'enveloppe convexe de A; on a bien sûr diam $(A) \leq \text{diam}(B)$. Soit maintenant x et x' deux points de B. Il existe dès lors $p \in \mathbb{N}$ nombres positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \ q \in \mathbb{N}$ nombres positifs $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_q$ tels que $\sum_{k=1}^q \lambda'_k = 1, \ p$ points x_1, \ldots, x_p de A et q points x'_1, \ldots, x'_q de A pour lesquels on a

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$$
 et $x' = \sum_{k=1}^{q} \lambda'_k x'_k$.

On a donc

$$|x - x'| = |x - \sum_{k=1}^{q} \lambda'_k x'_k| = |\sum_{k=1}^{q} \lambda'_k (x - x'_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{q} \lambda'_k |x - x'_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \lambda'_k |\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (x_j - x'_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{q} \lambda'_k \sum_{j=1}^{p} \lambda_j |x_j - x'_k|$$

$$\leqslant \operatorname{diam}(A) \sum_{k=1}^{q} \lambda'_k \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \operatorname{diam}(A),$$

ce qui suffit.

Corollaire 6.2.7. On peut remplacer les suites d'ensembles définissant $\mathcal{R}_{\varepsilon}$ par les suites d'ensembles convexes pour définir l'application $\mathcal{H}_{\varepsilon}^h$ (et donc l'application \mathcal{H}^h).

Si par contre on choisit de boules pour recouvrir l'ensemble, on obtient une mesure différente, que nous allons introduire ici. Étant donné une partie A de \mathbb{R}^d et $\varepsilon > 0$, soit

$$\mathcal{R}'_{\varepsilon}(A) = \{(B_k)_k : B_k \text{ est une boule telle que } \operatorname{diam}(B_k) \leqslant \varepsilon \ \forall k \text{ et } A \subset \cup_k B_k \}.$$

On pose alors, pour $h \geqslant 0$,

$$\mathcal{B}^h_{\varepsilon}: \wp(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \inf\{\sum_k \operatorname{diam}^h(B_k): (B_k)_k \in \mathcal{R}'_{\varepsilon}\}.$$

Comme pour la mesure extérieure de Hausdorff, on montre que l'application précédente est une mesure extérieure métrique.

Définition 6.2.8. Étant donné $h \ge 0$, la mesure extérieure de Hausdorff-Besicovitch d'exposant h est l'application

$$\mathcal{B}^h: \wp(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{B}^h_{\varepsilon}(A).$$

Les deux mesures extérieures sont équivalentes au sens suivant.

Proposition 6.2.9. Quel que soit $h \ge 0$, on a

$$\mathcal{H}^h \leqslant \mathcal{B}^h \leqslant 2^h \mathcal{H}^h$$
.

Démonstration. On déduit directement des définitions que l'on a toujours $\mathcal{H}^h(A) \leq \mathcal{B}^h(A)$, pour tout ensemble A.

Si maintenant $(E_k)_k$ est une suite de $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A)$, soit B_k une boule contenant E_k telle que diam $(B_k) = 2 \operatorname{diam}(E_k)$ pour tout k. On a $(B_k)_k \in \mathcal{R}'_{2\varepsilon}(A)$ et $\sum_k \operatorname{diam}^h(B_k) = 2^h \sum_k \operatorname{diam}^h(E_k)$, ce qui implique $\mathcal{B}_{2\varepsilon}(A) \leqslant 2^h \mathcal{H}_{\varepsilon}(A)$.

188CHAPITRE 6. QUELQUES NOTIONS SUPPLÉMENTAIRES CONCERNANT LES MESURES

On peut directement remarquer que \mathcal{H}^0 est la mesure de dénombrement, qui à un ensembe associe son cardinal (on constate aussi directement que cette mesure est définie sur $\wp(\mathbb{R}^d)$).

Proposition 6.2.10. Dans \mathbb{R} , on a $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^*$.

Démonstration. Soit A une partie de \mathbb{R} et $\varepsilon > 0$; on a

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}(R_k) : (R_k)_k \in \mathscr{C}_A\}$$

$$\leqslant \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}(R_k) : (R_k)_k \in \mathscr{C}_A, \operatorname{diam}(R_k) \leqslant \varepsilon \ \forall k\} = \mathcal{H}^1_{\varepsilon},$$

ce qui montre que $\mathcal{L}^* \leqslant \mathcal{H}^1$.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, posons $I_j = [j\varepsilon, (j+1)\varepsilon]$ et remarquons que l'on a trivialement, pour tout $(R_k)_k \in \mathscr{C}_A$, diam $(R_k \cap I_j) \leqslant \varepsilon$ et $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{diam}(R_k \cap I_j) \leqslant \operatorname{diam}(R_k)$, quel que soit $k \in \mathbb{N}_0$. On peut donc écrire

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf\{\sum_k \operatorname{Vol}(R_k) : (R_k)_k \in \mathscr{C}_A\}$$

$$\geqslant \inf\{\sum_k \sum_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{Vol}(R_k \cap I_k) : (R_k)_k \in \mathscr{C}_A\} \geqslant \mathcal{H}^1_{\varepsilon}(A),$$

comme attendu. \Box

Pour les ensembles compacts, on peut ne considérer que les recouvrements finis pour la définition de \mathcal{H}^h .

Lemme 6.2.11. Si K est un ensemble compact, on peut remplacer les suites d'ensembles définissant $\mathcal{R}_{\varepsilon}$ par les suites finies d'ensembles recouvrant K pour définir l'application $\mathcal{H}_{\varepsilon}^h$ (et donc l'application \mathcal{H}^h).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; étant donné $\delta > 0$ suffisamment petit, posons $\varepsilon' = (\varepsilon^h - \delta/4)^{1/h}$ (on suppose avoir $\varepsilon' > 0$) et soit $(E_k)_k$ une suite de $\mathcal{R}_{\varepsilon'}(K)$ telle que

$$\sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(E_{k}) < \mathcal{H}_{\varepsilon'}^{h}(K) + \delta/2.$$

Pour un indice k fixé, soit Q_k un intervalle compact dont l'intérieur contient E_k et tel que $\operatorname{diam}^h(Q_k) \leqslant \operatorname{diam}^h(E_k) + \delta/2^{k+1}$. La famille formée des Q_k° constitue un recouvrement ouvert de K; on peut donc en extraire un recouvrement fini. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^N Q_k^{\circ}$ et

$$\mathcal{H}^h_{\varepsilon}(K) \leqslant \sum_{k=1}^N \operatorname{diam}^h(Q_k) \leqslant \sum_k \operatorname{diam}^h(E_k) + \varepsilon/2 < \mathcal{H}^h_{\varepsilon'}(K) + \varepsilon \leqslant \mathcal{H}^h_{\varepsilon}(K) + \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

Premières propriétés

Donnons les propriétés de base de la mesure extérieure de Hausdorff. La mesure extérieure de Hausdorff est Borel-régulière.

Proposition 6.2.12. Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d , il existe un ensemble $G \in \mathscr{G}_{\delta}$ contenant A tel que $\mathcal{H}^h(G) = \mathcal{H}^h(A)$.

Démonstration. Si $H^h(A) = \infty$, $G = \mathbb{R}^d$ convient. Dans le cas contraire, pour $j \in \mathbb{N}_0$, puisque $\mathcal{H}^h_{2/j}(A) \leqslant \mathcal{H}^h_{1/j}(A)$, il existe unse suite d'ouverts $(U_{j,k})_k$ de $\mathcal{R}_{2/j}(A)$ telle que

$$\sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(U_{j,k}) < \mathcal{H}_{1/j}^{h}(A) + 1/j.$$

L'ensemble $G = \bigcap_j \bigcup_k U_{j,k}$ appartient à \mathscr{G}_{δ} et, puisque $(U_{j,k})_k$ appartient à $\mathcal{R}_{2/j}(G)$,

$$\mathcal{H}_{2/j}^h(G) \leqslant \mathcal{H}_{1/j}^h(A) + 1/j.$$

En passant à la limite, on obtient $\mathcal{H}^h(G) \leq \mathcal{H}^h(A)$. L'inégalité inverse résulte de l'inclusion $A \subset G$.

Corollaire 6.2.13. Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d , il existe un ensemble borélien B contenant A tel que $\mathcal{H}^h(B) = \mathcal{H}^h(A)$.

 $D\acute{e}monstration.$ De fait, les éléments de \mathscr{G}_{δ} sont boréliens.

Remarque 6.2.14. La mesure extérieure de Hausdorff \mathcal{H}^h n'est pas de Radon lorsque h n'est pas entier (nous verrons que pour h entier, la mesure extérieure de Hausdorff s'identifie à la mesure de Lebesgue).

Proposition 6.2.15. Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d tel que $\mathcal{H}^h(A) < \infty$, il existe un ensemble $F \in \mathscr{F}_{\sigma}$ contenu dans A tel que $\mathcal{H}^h(F) = \mathcal{H}^h(A)$.

Démonstration. Vu la proposition 6.2.12 (et la démonstration associée), il existe une suite d'ouverts $(U_k)_k$ contenant A tels que $\mathcal{H}^h(A) = \mathcal{H}^h(\cap_k U_k)$. Par la proposition 1.1.14, il existe une suite croissante $(F_{k,j})_j$ de fermés telle que $U_k = \bigcup_j F_{k,j}$. Par continuité, on a

$$\lim_{i} \mathcal{H}^{h}(A \cap F_{k,j}) = \mathcal{H}^{h}(A \cap U_{k}) = \mathcal{H}^{h}(A).$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un indice j_k tel que

$$\mathcal{H}^h(A \setminus F_{k,j_k}) < \varepsilon/2^k$$
.

Définissons alors l'ensemble fermé $F=\cap_k F_{k,j_k}$ pour avoir

$$\mathcal{H}^h(F) \geqslant \mathcal{H}^h(A \cap F) \geqslant \mathcal{H}^h(A) - \sum_k \mathcal{H}^h(A \setminus F_{k,k_j}) \geqslant \mathcal{H}^h(A) - \varepsilon.$$

Puisque $F \subset \cap_k U_k$, on a $\mathcal{H}^h(F \setminus A) \leqslant \mathcal{H}^h(\cap_k U_k \setminus A) = 0$. Par la proposition 6.2.12, il existe un ensemble G de \mathscr{G}_{δ} contenant $F \setminus A$ tel que $\mathcal{H}^h(G) = 0$. De là, $F \setminus G$ est un élément de \mathscr{F}_{σ} inclus dans A tel que

$$\mathcal{H}^h(F \setminus G) \geqslant \mathcal{H}^h(F) - \mathcal{H}^h(G) \geqslant \mathcal{H}^h(A) - \varepsilon.$$

190CHAPITRE 6. QUELQUES NOTIONS SUPPLÉMENTAIRES CONCERNANT LES MESURES

Ainsi, étant donné $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un ensemble F_k de \mathscr{F}_{σ} inclus dans A tel que

$$\mathcal{H}^h(F_k) \geqslant \mathcal{H}^h(A) - 1/k$$
.

En posant $F = \bigcup_k F_k$, nous avons construit un ensemble de \mathscr{F}_{σ} inclus dans A tel que

$$\mathcal{H}^h(A) \geqslant \mathcal{H}^h(F) \geqslant \mathcal{H}^h(F_k) \geqslant \mathcal{H}^h(A) - 1/k,$$

pour tout k, ce qui suffit.

D'après le résultat qui suit, l'estimation de la mesure de Hausdorff par un recouvrement d'ensembles suffisamment petits est efficace.

Proposition 6.2.16. Si A est un ensemble \mathcal{H}^h -mesurable de mesure finie, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite de boréliens $(B_k)_k$ vérifiant $0 < \operatorname{diam}(B_k) \leqslant \delta$ pour tout indice k, on a

$$\mathcal{H}^h(A \cap \bigcup_k B_k) < \sum_k \operatorname{diam}^h(B_k) + \varepsilon.$$

Démonstration. Par définition de \mathcal{H}^h , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathcal{H}^h(A) < H^h_{\delta}(A) + \varepsilon/2 \leqslant \sum_k \operatorname{diam}^h(R_k) + \varepsilon/2,$$
 (6.8)

pour toute suite $(R_k)_k$ de $\mathcal{R}_{\delta}(A)$.

Cela étant, étant donné une suite de boréliens $(B_k)_k$ vérifiant $0 < \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta$ pour tout indice k, soit $(E_k)_k$ une suite de $\mathcal{R}_{\delta}(A \setminus \cup_k B_k)$ telle que

$$\mathcal{H}^h(A \setminus \cup_k B_k) > \sum_k \operatorname{diam}^h(E_k) - \varepsilon/2.$$

Bien sûr, $(\cup_k B_k) \cup (\cup_k E_k)$ appartient à $\mathcal{R}_{\delta}(A)$ et

$$\mathcal{H}^h(A) < \sum_k \operatorname{diam}^h(B_k) + \sum_k \operatorname{diam}^h(E_k) + \varepsilon/2,$$

vu (6.8), valide pour ce recouvrement particulier. On a dès lors

$$\mathcal{H}^{h}(A \cap \bigcup_{k} B_{k}) = \mathcal{H}^{h}(A) - \mathcal{H}^{h}(A \setminus \bigcup_{k} B_{k})$$

$$< \sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(B_{k}) + \sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(E_{k}) + \varepsilon/2 - \sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(E_{k}) + \varepsilon/2$$

$$= \sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(B_{k}) + \varepsilon,$$

comme annoncé. \Box

Considérons à présent les propriétés d'invariance par dilatation.

Proposition 6.2.17. Étant donné un ensemble A et une constante c > 0, on a

$$\mathcal{H}^h(cA) = c^h \mathcal{H}^h(A).$$

Démonstration. Si $(E_k)_k$ appartient à $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A)$, alors $(cE_k)_k$ appartient à $\mathcal{R}_{c\varepsilon}(A)$. On a donc

$$\mathcal{H}_{c\varepsilon}^h(cA) \leqslant \sum_k \operatorname{diam}^h(cE_k) = c^h \sum_k \operatorname{diam}^h(E_k),$$

ce qui implique $\mathcal{H}^h_{c\varepsilon}(cA) \leqslant c^h \mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A)$ et donc $\mathcal{H}^h(cA) \leqslant c^h \mathcal{H}^h(A)$, par passage à la limite. En prenant c' = 1/c et A' = cA, on obtient l'inégalité inverse et donc l'égalité.

Définition 6.2.18. Si A est une partie de \mathbb{R}^d , une application $f: A \to \mathbb{R}^m$ est uniformément hölderienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe une constante C > 0 telle que

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant C|h|^{\alpha},\tag{6.9}$$

pour tout $x \in A$ et tout h tel que $x + h \in A$.

Proposition 6.2.19. Si A est une partie de \mathbb{R}^d et $f: A \to \mathbb{R}^m$ est une application uniformément hölderienne d'exposant $\alpha > 0$, alors on a

$$\mathcal{H}^{h/\alpha}(f(A)) \leqslant C^{h/\alpha}\mathcal{H}^h(A),$$

où C > 0 est la constante de Hölder dans l'inégalité (6.9).

Démonstration. Si $(E_k)_k$ est une suite de $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A)$, alors, puisque

$$\operatorname{diam}(f(A \cap E_k)) \leqslant C \operatorname{diam}^{\alpha}(E_k),$$

pour une constante C > 0, la suite $(f(A \cap E_k))_k$ appartient à $\mathcal{R}_{C\varepsilon^{\alpha}}(f(A))$. On a de plus

$$\sum_{k} \operatorname{diam}^{h/\alpha}(f(A \cap E_k)) \leqslant C^{h/\alpha} \sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(E_k),$$

ce qui implique $\mathcal{H}^{h/\alpha}_{C\varepsilon^{\alpha}}(A)\leqslant C^{h/\alpha}\mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A).$

En particulier, si l'application f est lipschitzienne (i.e. uniformément hölderienne d'exposant un), la dernière inégalité devient $\mathcal{H}^h(f(A)) \leq C'\mathcal{H}^h(A)$.

Relation avec la mesure de Lebesgue

Notre but est de montrer ici que la mesure de Hausdorff généralise la mesure de Lebesgue.

Lemme 6.2.20 (recouvrement de Vitali). Si \mathscr{C} est une collection de boules fermées de \mathbb{R}^d telle que $\sup\{\operatorname{diam}(B): B \in \mathscr{C}\} < \infty$, alors il existe une famille dénombrable (éventuellement finie) \mathscr{F} de boules deux à deux disjointes de \mathscr{C} telle que

$$\bigcup_{B\in\mathscr{C}}B\subset\bigcup_{B\in\mathscr{F}}5B.$$

Démonstration. Soit $\Delta = \sup \{ \operatorname{diam}(B) : B \in \mathscr{C} \} < \infty$ et pour $k \in \mathbb{N}_0$, soit

$$\mathscr{C}_k = \{B \in \mathscr{C} : \frac{\Delta}{2^k} < \operatorname{diam}(B) \leqslant \frac{\Delta}{2^{k-1}}\}.$$

Soit \mathcal{P} l'ensemble des familles deux à deux disjointes de \mathscr{C}_1 . On définit la relation \subset sur \mathcal{P} comme suit :

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} \exists B \in \mathcal{B} : A = B.$$

Soit \mathcal{V}_1 un élément maximal de \mathcal{P} ; montrons que \mathcal{V}_1 est dénombrable. Pour $B \in \mathcal{V}_1$, soit $q_B \in \mathbb{Q}^n$ tel que $q_B \in B$. L'application qui à B associe q_B étant injective (les éléments de \mathcal{V}_1 étant disjoints), \mathcal{V}_1 est dénombrable.

Si $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_{k-1}$ ont été construit, soit \mathcal{V}_k une collection maximale obtenue à partir de

$$\{B \in \mathscr{C}_k : B \cap B' = \varnothing \ \forall B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathscr{V}_j\}.$$

Soit alors $\mathscr{V} = \bigcup_k \mathscr{V}_k$; par définition, \mathscr{V} est une famille dénombrable de boules deux à deux disjointes de \mathscr{C} .

Étant donné est un élément B de \mathscr{C} , soit k l'indice tel que $B \in \mathscr{C}_k$. Par construction, il existe $B' \in \bigcup_{j=1}^k \mathscr{V}_k$ tel que $B \cap B' \neq \varnothing$. Puisque $\operatorname{diam}(B') > \Delta/2^k$ et $\operatorname{diam}(B) < \Delta/2^{k-1}$, on a $\operatorname{diam}(B) \leqslant 2\operatorname{diam}(B')$. Si x_0 est un point de $B \cap B'$ et x'_c est le centre de B', pour tout $x \in B$, on a

$$|x - x'_c| \le |x - x_0| + |x_0 - x'_c| \le \operatorname{diam}(B) + \frac{\operatorname{diam}(B')}{2} \le 5 \frac{\operatorname{diam}(B')}{2},$$

ce qui implique que x appartient à 5B'.

Définition 6.2.21. Une collection d'ensemble \mathscr{V} est une classe de Vitali pour un ensemble A si pour tout $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $E \in \mathscr{V}$ tel que $x \in E$ et $0 < \operatorname{diam}(E) \leq \varepsilon$.

Théorème 6.2.22 (recouvrement de Vitali). Soit A une partie \mathcal{H}^h -mesurable de \mathbb{R}^d et \mathscr{V} une classe de Vitali d'ensembles fermés pour A; il existe une suite $(F_k)_k$ d'éléments deux à deux disjoints de \mathscr{V} (éventuellement finie) telle que soit $\sum_k \operatorname{diam}^h(F_k) = \infty$, soit $\mathcal{H}^h(A \setminus \bigcup_k F_k) = 0$.

Si de plus $\mathcal{H}^h(A) < \infty$, pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir les F_k tels que

$$\mathcal{H}^h(A) \leqslant \sum_k \operatorname{diam}^h(F_k) + \varepsilon.$$

 $D\acute{e}monstration$. Soit $\delta > 0$; sans restriction aucune, on peut supposer que $F \in \mathscr{V}$ implique $0 < \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta$. Soit F_1 un élément de \mathscr{V} et si F_1, \ldots, F_{k-1} ont été construits, soit

$$d_k = \sup\{\operatorname{diam}(F) : F \in \mathcal{V}, F \cap \bigcup_{j=1}^{k-1} F_j = \varnothing\}.$$

Si $d_k = 0$, on a $A \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} F_k$ et la première partie du théorème est démontrée. Sinon, soit $F_k \in \mathcal{V}$ disjoint de $\bigcup_{j=1}^{k-1} F_k$ et tel que diam $(F_k) \geqslant d_k/2$.

Supposons que $d_k > 0$ pour tout k et que $\sum_k \operatorname{diam}^h(F_k) < \infty$. Pour tout indice k soit B_k une boule de centre appartenant à F_k et de rayon $3\operatorname{diam}(F_k)$. Montrons que pour tout $k \ge 2$, on a

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} F_j \subset \bigcup_{j \geqslant k+1} B_j \tag{6.10}$$

Si x appartient à $A \setminus \bigcup_{j=1}^k F_j$, il existe $F \in \mathcal{V}$ d'intersection vide avec $\bigcup_{j=1}^k F_j$ tel que $x \in F$. Puisque la suite diam (F_j) tend vers zéro, il existe j_0 tel que diam(F) > 2diam (F_{j_0}) . Dès lors il existe un indice j vérfiant $k < j < j_0$ tel que F intersecte F_j et diam $(F) \le 2 \operatorname{diam}(F_j)$. Pour un tel ensemble, on a $F \subset B_j$, ce qui établit la relation (6.10).

Pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(A \setminus \cup_{j} F_{j}) \leqslant \mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} F_{j}) \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \operatorname{diam}^{h}(B_{j}) = 6^{h} \sum_{j=k+1}^{\infty} \operatorname{diam}^{h}(F_{j}),$$

pour autant que k soit choisit assez grand, pour assurer la relation diam $(B_j) < \varepsilon$ pour j > k. On obtient donc $\mathcal{H}^h_{\varepsilon}(A \setminus \cup_j F_j) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique la première partie du théorème.

Pour la seconde partie, supposons que le nombre δ du début de la preuve est choisit pour correspondre au nombre δ de la proposition 6.2.16. Bien sûr, si $\sum_k \operatorname{diam}^h(F_k) = \infty$, il n'y a rien à montrer. Dans le cas contraire, vu la première partie de la démonstration et la proposition 6.2.16, on a

$$\mathcal{H}^{h}(A) \leqslant \mathcal{H}^{h}(A \setminus \bigcup_{k} F_{k}) + \mathcal{H}^{h}(A \cap \bigcup_{k} F_{k}) = 0 + \mathcal{H}^{h}(A \cap \bigcup_{k} F_{k})$$
$$\leqslant \sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(F_{k}) + \varepsilon,$$

comme annoncé. \Box

Nous pouvons à présent montrer que la mesure extérieure de Hausdorff généralise la mesure de Lebesgue. Plus précisément, pour lex exposants entiers, les mesures de Lebesgue et de Hausdorff sont égales à une constante multiplicative près. Remarquons que cette relation est valide pour les mesures extérieures.

Théorème 6.2.23. Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d , on a

$$\mathcal{L}^*(A) = \frac{\pi^{d/2}}{2^d \Gamma(1 + d/2)} \mathcal{H}^d(A).$$

Démonstration. Posons $c_d = \pi^{d/2}/\Gamma(1+d/2)$ et montrons que l'on a $\mathcal{L}^* \leq c_d \mathcal{H}^d/2^d$. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $(E_k)_k$ une suite de $\mathcal{R}_{\varepsilon}(A)$. L'inégalité isodiamétrique fournit la relation

$$\mathcal{L}^*(A) \leqslant \sum_k \mathcal{L}^*(E_k) \leqslant c_d \sum_k \left(\frac{\operatorname{diam}(E_k)}{2}\right)^d.$$

En prenant l'infimum sur les suites $(E_k)_k$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Pour l'autre inégalité, on peut bien sûr supposer avoir $\mathcal{L}^*(A) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $(R_k)_k$ un recouvrement de A par des intervalles ouverts tel que

$$\sum_{k} \operatorname{Vol}(R_k) < \mathcal{L}^*(A) + \varepsilon.$$

Soit $\delta > 0$; les boules fermées de rayon au plus δ incluses dans R_k définissant une classe de Vitali (pour R_k), il existe une suite $(B_{k,j})_j$ de boules de R_k deux à deux disjointes de rayon au plus δ telle que $\mathcal{H}^d(R_k \setminus \cup_j B_{k,j}) = 0$. En particulier, on a $\mathcal{H}^d_{\delta}(R_k \setminus \cup_j B_{k,j}) = 0$. On a également

$$\sum_{j} \mathcal{L}^*(B_{k,j}) = \mathcal{L}^*(\cup_{j} B_{k,j}) \leqslant \mathcal{L}^*(R_k).$$

Vu le choix de $(R_k)_k$, on a

$$\mathcal{H}_{\delta}^{d}(A) \leqslant \sum_{k} \mathcal{H}_{\delta}^{d}(R_{k}) \leqslant \sum_{k} \mathcal{H}_{\delta}^{d}(R_{k} \setminus \cup_{j} B_{k,j}) + \sum_{k} \mathcal{H}_{\delta}^{d}(\cup_{j} B_{k,j})$$

$$\leqslant \sum_{k} \sum_{j} \operatorname{diam}^{d}(B_{k,j}) = \sum_{k} \sum_{j} 2^{d} \mathcal{L}^{*}(B_{k,j}) / c_{d}$$

$$\leqslant 2^{d} / c_{d} \sum_{k} \mathcal{L}^{*}(R_{k}) < 2^{d} / c_{d} \mathcal{L}^{*}(A) + 2^{d} \varepsilon / c_{d},$$

ce qui permet de conclure.

Ainsi pour les exposants entiers, les mesures de Lebesgue et de Hausdorff coïncident à ceci près que la mesure de Lebesgue du carré unité vaut un, alors que pour la mesure de Hausdorff, c'est la mesure de la boule unité 1 qui vaut 2^{-d} .

On peut énoncer le théorème de recouvrement de Vitali pour la mesure de Lebesgue.

Corollaire 6.2.24 (recouvrement de Vitali). Soit A est un ensemble \mathcal{L} -mesurable de \mathbb{R}^d de mesure finie et \mathcal{V} une classe de Vitali d'ensembles fermés pour A; il existe une suite $(F_k)_k$ d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{V} (éventuellement finie) telle que $\mathcal{L}(A \setminus \bigcup_k F_k) = 0$.

 $D\acute{e}monstration$. Supposons d'abord que A est compact. On peut dès lors supposer que les éléments F_k de l'énoncé sont inclus dans un borélien borné B, ce qui permet d'affirmer que l'on a

$$\sum_{k} \operatorname{diam}^{d}(F_{k}) \leqslant C \sum_{k} \mathcal{L}(F_{k}) \leqslant C \mathcal{L}(B) < \infty,$$

pour une constante C>0 et le théorème de revouvrement de Vitali pour \mathcal{H}^h permet de conclure.

Pourle cas général, étant donné $\varepsilon > 0$, soit K un compact inclus dans A tel que

$$\mathcal{L}(A) < \mathcal{L}(K) + \varepsilon$$
.

Vu la première partie de la démonstration, il existe une suite $(F_k)_k$ vérifiant les hypothèse de l'énoncé pour K; on a donc

$$\mathcal{L}(K \setminus \cup_k F_k) = 0$$

En posant $E = A \cap (\bigcup_k F_k)$, on obtient

$$\mathcal{L}(A \setminus E) = \mathcal{L}(A) - \mathcal{L}(E) < \mathcal{L}(K) - \mathcal{L}(E) + \varepsilon = \mathcal{L}(K \setminus E) + \varepsilon = \varepsilon$$

ce qui suffit. \Box

Dimension de Hausdorff

La dimension topologique, qui à un ensemble associe un nombre entier, peut sembler limitée lorsque l'on considère certains ensembles comme par exemple celui de Cantor. La dimension de Hausdorff peut prendre des valeurs non entières et présente toutes les propriétés naturelles que l'on est en droit d'attendre d'une dimension.

Étant donne une partie A de \mathbb{R}^d , l'application $h \mapsto H^h(A)$ est décroissante, par définition (les ensembles de recouvrement étant de diamètre strictement inférieur à un dans la définition de la mesure extérieure de Hausdorff). Qui plus est, on a le résultat suivant.

^{1.} Voir l'égalité (4.6).

Lemme 6.2.25. Étant donné un ensemble A de \mathbb{R}^d , pour tous $0 \leqslant h < t$ on a

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{h}(A) \geqslant \frac{\mathcal{H}_{\varepsilon}^{t}(A)}{\varepsilon^{t-h}},$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Pour $(E_k)_k \in \mathcal{R}_{\varepsilon}(A)$, on a trivialement

$$\varepsilon^{h-t} \sum_{k} \operatorname{diam}^{t}(E_{k}) \geqslant \sum_{k} \operatorname{diam}^{t}(E_{k}) \operatorname{diam}^{h-t}(E_{k}) = \sum_{k} \operatorname{diam}^{h}(E_{k}),$$

ce qui suffit. \Box

Ainsi, $\mathcal{H}^h(A) \in]0, \infty[$ implique $\mathcal{H}^{h-\delta}(A) = \infty$ et $\mathcal{H}^{h+\delta}(A) = 0$ pour tout $\delta > 0$ tel que $h - \delta \ge 0$.

Définition 6.2.26. La dimension de Hausdorff d'un ensemble A non vide de \mathbb{R}^d est l'unique nombre $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ défini comme suit :

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{h \geqslant 0 : \mathcal{H}^h(A) = 0\}.$$

Afin de différencier l'ensemble vide des ensembles discrets, on pose soit $\dim_{\mathcal{H}}(\varnothing) = -1$, afin de correspondre à la dimension topologique, soit $\dim_{\mathcal{H}}(\varnothing) = -\infty$.

Passons maintenant aux propriétés.

Proposition 6.2.27. Si $A \subset B$, alors $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leqslant \dim_{\mathcal{H}}(B)$.

Démonstration. De fait, on a $\mathcal{H}^h(A) \leq \mathcal{H}^h(B)$ pour tout h.

Lemme 6.2.28. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, on $a \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq d$ et $\dim_{\mathcal{H}}(A) = d$ si A contient un ouvert de \mathbb{R}^d .

Démonstration. Soit C le cube unité de \mathbb{R}^d et étant donné $\varepsilon > 0$, soit k tel que $\sqrt{d}/k \leqslant \varepsilon$. En découpant C en k^d sous-cubes de côté de longueur 1/k, on obtient

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^d(C) \leqslant k^d(\sqrt{d}/k)^d = d^{d/2}.$$

Ainsi, $\mathcal{H}^h(C) = 0$ pour tout h > d. Par conséquent, il en va de même pour $\mathcal{H}^h(\mathbb{R}^d)$, puisque cet espace peut s'exprimer comme une union dénombrable de translatés de C.

Si A contient un ouvert de \mathbb{R}^d , il contient une boule dont la mesure est finie et positive; on a donc $\dim_{\mathcal{H}}(A) \geqslant d$.

On peut préciser le lien existant entre dimensio topologique et dimension de Hausdorff.

Théorème 6.2.29. Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^n , on $a \dim(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq d$.

Démonstration. Nous présentons ici une démonstration proche de l'originale [27]. Si A est tel que $\mathcal{H}^d(A) > 0$, on a, vu le lemme qui précède $\dim_{\mathcal{H}}(A) = d$ et puisque A est une partie de \mathbb{R}^d , $\dim(A) \leq d$. Il reste à montrer que, pour $m \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{H}^{m+1}(A) = 0$ alors $\dim(A) \leq m$. Pour ce faire, soit x_0 un point de A (on peut supposer A non vide), $S(r) = \{x \in A : |x - x_0| = r\}$ et montrons que $\mathcal{H}^{m+1}(A) = 0$ implique $\mathcal{H}^m(S(r)) = 0$ pour presque tout r > 0. On pourra alors conclure par induction.

Considéros d'abord le cas m=0. Soit f l'application définie par $f(x)=|x-x_0|$. On a

$$|f(x+h) - f(x)| = ||x+h - x_0| - |x - x_0|| \le |x+h - x| = |h|,$$

pour tout h, ce qui implique que f est une contraction. Dès lors, $\mathcal{H}^1(A)=0$ implique $\mathcal{H}^1(f(A))=0$, vu la proposition 6.2.19. Cela étant, on a

$$f(A) = \{r : \exists x \in A, |x - x_0| = r\} = \{r : S(r) \neq \emptyset\} = \{r : \#S(r) > 0\}.$$

Dès lors, $\mathcal{H}^1(f(A))$ implique que $\mathcal{H}^0(S(r)) = \#S(r) = 0$ presque partout.

Supposons maintenant avoir m > 0. Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, soit $(E_{k,j})_k$ une suite d'ensembles telle que $A \subset \bigcup_k E_{k,j}$ et

$$\sum_{k} \operatorname{diam}^{m+1}(E_{k,j}) < 1/j. \tag{6.11}$$

Posons $r_{k,j} = \inf\{|x-x_0| : x \in E_{k,j}\}\$ et $R_{k,j} = \sup\{|x-x_0| : x \in E_{k,j}\}\$; on a bien entendu $\dim(E_{k,j}) \geqslant R_{k,j} - r_{k,j}$. Définissons enfin les nombres

$$d_{k,j}(r): \begin{cases} \operatorname{diam}^m(E_{k,j}) & \text{si } r \in [r_{k,j}, R_{k,j}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
.

et $d_j(r) = \sum_k d_{k,j}(r)$. Pour tout R > 0, on a

$$\int_{0}^{R} d_{k,j}(r) dr \leq \int_{r_{k,j}}^{R_{k,j}} \operatorname{diam}^{m}(E_{k,j}) dr = (R_{k,j} - r_{k,j}) \operatorname{diam}^{m}(E_{k,j})$$

$$\leq \operatorname{diam}(E_{k,j}) \operatorname{diam}^{m}(E_{k,j}) = \operatorname{diam}^{m+1}(E_{k,j}).$$

De là, la majoration (6.11) permet d'affirmer que l'on a

$$\int_0^R d_j(r) dr = \sum_k \int_0^R d_{k,j}(r) dr \leqslant \sum_k \operatorname{diam}^{m+1}(E_{k,j}) < 1/j.$$

Ainsi, la suite $(\int_0^R d_j(r) dr)_j$ converge vers zéro, c'est-à-dire que la suite $(d_j(r))_j$ tend vers zéro en moyenne (voir corollaire 5.1.11). Par conséquent, il existe une une sous-suite $(d_{l(j)}(r))_j$ de cette suite qui converge vers zéro, pour presque tout $r \in [0, R]$. Maintenant, on vérifie directement que l'on a

$$\operatorname{diam}^m(E_{k,j}) \cap S(r) \leq d_{k,j}(r)$$

et donc

$$\lim_{j} \sum_{k} \operatorname{diam}^{m}(E_{k,l(j)}) \cap S(r)) = \lim_{j} \sum_{k} d_{k,l(j)}(r) = 0,$$

presque partout. Puisque $\bigcup_k E_{k,l(j)} \cap S(r) = S(r)$, on a $\mathcal{H}^m(S(r)) = 0$ pour presque tout r > 0.

La dimension de Hausdorff est stable au sens suivant.

Proposition 6.2.30. Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles de \mathbb{R}^d , on a

$$\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) = \sup \{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Démonstration. Nous savons déjà que $\dim_{\mathcal{H}}(A_k) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\cup_j A_j)$ pour tout indice k. Si h est tel que $h > \dim_{\mathcal{H}}(A_k)$ pour tout k, $\mathcal{H}^h(A_k) = 0$ pour de tels indices et donc $\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) = 0$. On a ainsi $\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) < h$, ce qui montre que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\cup_k A_k) \leq \sup\{\dim_{\mathcal{H}}(A_k) : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Corollaire 6.2.31. Si A est dénombrable, alors $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$.

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, puisque $\mathcal{H}^h(\{x\}) = 0$ pour tout h > 0, $\dim_{\mathcal{H}}(\{x\}) = 0$. On peut alors conclure grâce au résultat précédent.

Concernant la connexité, on a le résultat suivant.

Proposition 6.2.32. Un ensemble dont la dimension de Hausdorff est strictement inférieure à un est totalement discontinu².

Démonstration. Soit A tel que A tel que $\dim_{\mathcal{H}}(A) < 1$; on peut considérer que A contient au moins deux éléments, x_0 et x_0' . Considérons encore une fois la fonction f définie sur tout l'espace qui à x associe $f(x) = |x - x_0|$. Rappelons que f est une contraction :

$$|f(x+h) - f(x)| = ||x+h - x_0| - |x - x_0|| \le |x+h - x| = |h|.$$

pour tout x, ce qui implique, vu la proposition 6.2.19,

$$\mathcal{H}^1(f(A)) \leqslant \mathcal{H}^1(A) = 0.$$

Autrement dit, f(A) est de longueur nulle et on peut donc trouver un nombre r de $]0, f(x'_0)[$ qui n'appartient pas à f(A). Posons alors

$$U_1 = \{x : |x - x_0| < r\}$$
 et $U_2 = \{x : |x - x_0| > r\}$.

Ces ensembles ouverts sont disjoints et on a $x_0 \in U_1, x_0' \in U_2$ et $A \subset U_1 \cup U_2$.

Considérons maintenant les fonctions hölderienne.

Proposition 6.2.33. Si $f:A\to\mathbb{R}^m$ est une fonction uniformément hölderienne d'exposant $\alpha>0,\ alors$

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leqslant \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(A).$$

Démonstration. De fait, pour $h > \dim_{\mathcal{H}}(A)$, par la proposition 6.2.19, on a $\mathcal{H}^{h/\alpha}(f(A)) = 0$.

En particulier, si f est lipschitzien, $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Définition 6.2.34. Soit A une partie de \mathbb{R}^d ; une application $f:A\to\mathbb{R}^m$ est bi-lipschitienne s'il existe deux constantes non nulles C_1 et C_2 telles que

$$C_1|h| \le |f(x+h) - f(x)| \le C_2|h|,$$

pour tout $x \in A$ et tout h tel que $x + h \in A$.

^{2.} Autrement dit, tous les sous-ensembles de plus d'un élément sont non connexes.

Corollaire 6.2.35. Si l'application $f: A \to \mathbb{R}^m$ est bi-lipschitzienne, alors $\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) = \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration de la proposition 6.2.19.

De la même manière qu'en topologie, on peut affirmer que deux espaces sont équivalents s'il existe un homéomorphisme entre eux, deux ensembles sont équivalets vis-à-vis de la dimension de Hausdorff s'il existe une application bi-lipschitzienne les faisant correspondre.

Considérons maintenant la dimension de Hausdorff-Besicovitch.

Définition 6.2.36. La dimension de Hausdorff-Besicovitch d'un ensemble non vide A de \mathbb{R}^d est définie par

$$\dim_{\mathcal{B}}(A) = \inf\{h \geqslant 0 : \mathcal{B}^h(A) = 0\}.$$

Cette notion n'apporte rien par rapport à la dimension de Hausdorff.

Corollaire 6.2.37. Pour tout ensemble A, on a $\dim_{\mathcal{B}}(A) = \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Démonstration. Cela résulte directement de la proposition 6.2.9.

Comme application, considérons la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor.

Proposition 6.2.38. La dimension de Hausdorff de l'ensemble tryadique de Cantor K vaut $h = \ln(2)/\ln(3)$ et on a $\mathcal{H}^h(K) = 1$.

Démonstration. Soit K_k l'ensemble constitué de 2^k intervalles de longueur $1/3^k$ tel que $K = \bigcap_k K_k$. Bien entendu, K peut être recouvert par les intervalles constitutifs de K_k et donc

$$\mathcal{H}_{1/3^k}^h(K) \leqslant 2^k 3^{-kh} = 1.$$

Soit maintenant $\mathscr C$ une collection dénombrable d'intervalles de longueur non nulle recouvrant K et montrons que

$$\sum_{I \in \mathscr{C}} \operatorname{diam}^h(I) \geqslant 1. \tag{6.12}$$

L'ensemble K étant compact, on peut supposer que les éléments de $\mathscr C$ sont fermés et en nombre fini. On peut en outre supposer que $I \in \mathscr C$ s'écrit $I_1 \cup I_2 \cup I_3$, où I_1 et I_3 sont deux intervalles constitutifs de K_k pour un k et I_2 est l'ensemble ouvert défini par les nombres strictement compris entre ceux de I_1 et ceux de I_3 . Par construction, le diamètre de I_2 n'est pas inférieur à celui de I_1 ou I_3 , donc

$$\operatorname{diam}^{h}(I) \geqslant \left(\frac{3}{2}\left(\operatorname{diam}(I_{1}) + \operatorname{diam}(I_{3})\right)\right)^{h} \geqslant \operatorname{diam}^{h}(I_{1}) + \operatorname{diam}^{h}(I_{3}).$$

Ainsi, le recouvrement optimum est obtenu lorsque les intervalles I de (6.12) sont des intervalles constitutifs d'un des ensemble K_k . Enfin, on peut supposer que dans cette décomposition, chaque élément I appartient au même ensemble K_k (correspondant à l'indice k le plus grand dans le choix des K_k). Pour de tels intervalles, on a $\sum_{I \in \mathscr{C}} \operatorname{diam}^h(I) = 1$, de sorte que l'inégalité (6.12) est vérifiée.

Chapitre 7

Décomposition de mesures

Le but de ce chapitre est d'introduire les mesures signées ainsi que les principaux théorèmes de décomposition, à savoir les théorèmes de Jordan et Lebesgue. Le théorème de Radon-Nikodym est aussi abordé.

7.1 Mesures signées

Dans cette section, nous nous attachons à la définition des mesures signées, ainsi qu'à leurs relations avec les mesures.

Définition 7.1.1. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable. Une application μ définie sur \mathscr{A} et à valeurs sur la droite étendue \mathbb{R} est une mesure signée sur \mathscr{A} si

- $-\mu(\varnothing)=0,$
- si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{A} , alors

$$\mu(\bigcup_{k} A_{k}) = \sum_{k} \mu(A_{k}).$$

Une mesure signée est finie si $\mu(A) \in \mathbb{R}$ quel que soit $A \in \mathscr{A}$.

Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur \mathscr{A} . Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on doit avoir $\mu(A) + \mu(A^c) = \mu(X)$. Ainsi, puisque la somme doit être définie, on ne peut avoir simultanément $\mu(A) = \infty$ et $\mu(A^c) = -\infty$. Par conséquent, s'il existe un ensemble $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = \pm \infty$, alors $\mu(X) = \pm \infty$ et une mesure ne peut prendre au plus qu'une des deux valeurs ∞ ou $-\infty$ sur \mathscr{A} . Un argument similaire montre que si $B \in \mathscr{A}$ est un ensemble tel que $\mu(B)$ est fini, alors $\mu(A)$ est fini pour tout sous-ensemble $A \in \mathscr{A}$ de B.

Exemples 7.1.2. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. L'application ν , définie comme suit,

$$\nu: \mathscr{A} \to \mathbb{R} \quad A \mapsto \int_A f \, d\mu$$

est une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) , par la linéarité de l'intégrale et le théorème de la convergence dominée. Cette mesure est la différence de deux mesures ν_1 et $\nu_2 : \nu(A) = \nu_1(A) - \nu_2(A) \ \forall A \in \mathscr{A}$, où $\nu_1 = \int_A f^+ d\mu$ et $\nu_1 = \int_A f^- d\mu$ (ce qui fournit une preuve alternative du fait que ν est une mesure signée).

D'une manière générale, si μ_1 et μ_2 sont deux mesures sur (X, \mathscr{A}) et si l'une d'elles est finie, alors $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) . Nous verrons que les mesures signées sont toutes de cette forme.

Lemme 7.1.3 (Continuité des mesures signées). Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) . Si $(A_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles de \mathscr{A} , alors

$$\mu(\lim_k A_k) = \mu(\cup_k A_k) = \lim_k \mu(A_k).$$

Si $(A_k)_k$ est une suite décroissante d'ensembles de $\mathscr A$ telle que $\mu(A_{k_0})$ est fini pour un indice k_0 , alors

$$\mu(\lim_k A_k) = \mu(\cap_k A_k) = \lim_k \mu(A_k).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B, \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$ et donc, si $\mu(A)$ est fini (ce qui est le cas si $\mu(B)$ est fini), $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Aussi, si A n'est pas de mesure finie, il en va de même pour B.

Considérons la continuité à gauche; s'il existe un indice k_0 tel que $\mu(A_{k_0})$ n'est pas fini, alors $\mu(A_k)$ n'est fini pour aucun k suffisamment grand et l'égalité est trivialement vérifiée. Sinon, soit les ensembles $B_1 = A_1$ et $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$. On a

$$\mu(\bigcup_{k} A_{k}) = \mu(\bigcup_{k} B_{k}) = \sum_{k} \mu(B_{k}) = \lim_{k} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_{j}) = \lim_{k} \mu(\bigcup_{j=1}^{k} B_{k}) = \lim_{k} \mu(A_{k}),$$

par définition des ensembles B_k .

Pour la continuité à droite, nous pouvons supposer que $\mu(A_1)$ est fini. La suite $(A_1 \setminus A_k)_k$ est croissante et nous venons de montrer que

$$\mu(\bigcup_{k} A_1 \setminus A_k) = \lim_{k} \mu(A_1 \setminus A_k).$$

Puisque $\bigcup_k A_1 \setminus A_k = A_1 \setminus \cap_k A_k$, on a

$$\mu(A_1 \setminus \bigcap_k A_k) = \lim_k \mu(A_1 \setminus A_k)$$

et donc $\mu(\cap_k A_k) = \lim_k \mu(A_k)$, puisque $\mu(A_1)$ est fini.

Nous allons maintenant introduire les ensembles positifs et négatifs qui interviendront dans la décomposition de Hahn.

Définition 7.1.4. Soit μ une mesure signée sur un espace mesurable (X, \mathscr{A}) . Un sous-ensemble B de X est un ensemble positif pour μ si $B \in \mathscr{A}$ et tout sous-ensemble $A \in \mathscr{A}$ de B vérifie $\mu(A) \geqslant 0$. De la même manière, un ensemble B est un ensemble négatif pour μ si $B \in \mathscr{A}$ et tout sous-ensemble $A \in \mathscr{A}$ de B vérifie $\mu(A) \leqslant 0$.

Nous aurons besoin de la construction suivante.

Lemme 7.1.5. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) et $A \in \mathscr{A}$ un sous-ensemble de X tel que $-\infty < \mu(A) < 0$. Il existe un ensemble négatif B inclus dans A satisfaisant $\mu(B) \leq \mu(A)$.

 $D\acute{e}monstration$. Nous allons construire B en enlevant une suite d'ensembles à A. Soient

$$\delta_1 = \sup\{\mu(E) : E \in \mathscr{A}, E \subset A\}$$

et $A_1 \in \mathscr{A}$ un sous-ensemble de A tel que $\mu(A_1) \geqslant \min(\delta_1/2, 1)$ (de cette manière, $\mu(A_1)$ peut être choisi fini). Bien sûr $\delta_1 \geqslant \mu(\varnothing) = 0$; ainsi δ_1 et $\mu(A_1)$ sont positifs. Par induction, on construit les suites $(\delta_k)_k$ et $(A_k)_k$ de la manière suivante,

$$\delta_k = \sup\{\mu(E) : E \in \mathscr{A}, E \subset A \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\}$$

et $A_k \in \mathscr{A}$ est un sous-ensemble de $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ tel que $\mu(A_k) \geqslant \min(\delta_k/2, 1)$ (remarquons que si $\delta_k = \infty$, $\mu(A_k) \geqslant 1$). Enfin, soit $A_\infty = \bigcup_k A_k$ et $B = A \setminus A_\infty$.

Montrons que l'ensemble B possède les propriétés de l'énoncé. Puisque les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et satisfont $\mu(A_k) \geqslant 0 \ \forall k, \ \mu(A_\infty) \geqslant 0$ et donc $\mu(A) = \mu(A_\infty) + \mu(B) \geqslant \mu(B)$. L'ensemble B est un ensemble négatif. De fait, puisque $\mu(A)$ est fini, $\mu(A_\infty)$ est fini et donc $\mu(A_\infty) = \sum_k \mu(A_k)$ entraı̂ne $\lim_k \mu(A_k) = 0$. De là, $\lim_k \delta_k = 0$. Puisque tout sous-ensemble $E \in \mathscr{A}$ de B satisfait $\mu(E) \leqslant \delta_k$ pour tout k, on a $\mu(E) \leqslant 0$, ce qui implique que B est un ensemble négatif.

Le théorème qui suit et ses corollaires donnent la décomposition standard d'une mesure signée.

Théorème 7.1.6 (Théorème de décomposition de Hahn). Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathcal{A}) . Il existe deux sous-ensembles disjoints P et N de X tels que P est un ensemble positif pour μ , N est un ensemble négatif pour μ et $X = P \cup N$.

 $D\acute{e}monstration$. Quitte à considérer $-\mu$, nous pouvons supposer que μ ne prend pas la valeur $-\infty$. Soit

$$\delta = \inf\{\mu(A) : A \text{ est un ensemble négatif pour } \mu\}.$$

L'ensemble intervenant dans le membre de droite n'est pas vide, puisqu'il contient $\mu(\varnothing)$. Soient $(A_k)_k$ une suite d'ensembles négatifs pour μ tels que $\lim_k \mu(A_k) = \delta$ et $N = \bigcup_k A_k$. L'ensemble N est un ensemble négatif pour μ (de fait, si $B \in \mathscr{A}$ est un sous-ensemble de N, il est l'union d'une suite d'ensembles de \mathscr{A} inclus dans les ensembles A_k). Ainsi $\delta \leqslant \mu(N) \leqslant \mu(A_k)$ pour tout k et donc $\delta = \mu(N)$. Puisque $\mu(N)$ ne peut prendre la valeur $-\infty$, $\mu(N)$ est fini.

Soit $P=N^c$; montrons que P est un ensemble positif. Supposons qu'il existe un sous-ensemble $A\in\mathscr{A}$ de P tel que $\mu(A)<0$. Le Lemme 7.1.5 fournit un sous-ensemble négatif B de A. Dès lors, $N\cup B$ est un ensemble négatif tel que $\mu(N\cup B)=\mu(N)+\mu(B)<\mu(N)=\delta$, ce qui contredit la définition de δ . L'ensemble P est donc un ensemble positif, ce qui termine la démonstration.

Définition 7.1.7. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) . Une décomposition de Hahn de la mesure μ est un couple (P, N) d'ensembles disjoints de X tels que P est un ensemble positif pour μ , N est un ensemble négatif pour μ et $P \cup N = X$.

La décomposition de Hahn de μ est essentiellement unique.

Proposition 7.1.8. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) ; si (P_1, N_1) et (P_2, N_2) sont deux décompositions de Hahn de μ , alors $P_1 \Delta P_2$ et $N_1 \Delta N_2$ sont nuls pour μ . En particulier, les ensembles $P_1 \cap N_2$ et $P_2 \cap N_1$ sont nuls pour μ .

Démonstration. De fait, puisqu'on a

$$P_1 \setminus P_2 = ((P_1 \setminus P_2) \cap P_2) \cup ((P_1 \setminus P_2) \cap N_2) = (P_1 \setminus P_2) \cap N_2,$$

l'ensemble $P_1 \setminus P_2$ est un ensemble négatif pour μ . Puisqu'il est également positif par définition, il est de mesure nulle. Par symétrie, $P_2 \setminus P_1$ est également de mesure nulle. On montre de la même manière que la mesure de $N_1 \Delta N_2$ est nulle.

De là, on a

$$\mu(P_1 \cap N_2) = \mu((P_1 \cap N_2) \cup ((P_2 \setminus P_1) \cap N_2)) = \mu(P_2 \cap N_2) = 0.$$

De manière similaire, on a $\mu(P_2 \cap N_1) = 0$.

Remarque 7.1.9. Soit l'espace mesuré $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]))$ et μ la mesure signée définie comme suit, $\mu(A) = \int_A x dx$, $A \in \mathcal{B}([-1,1])$. Les couples ([0,1],[-1,0[) et (]0,1],[-1,0]) sont deux décompositions de Hahn de la mesure signée μ .

Corollaire 7.1.10 (Théorème de décomposition de Jordan). Toute mesure signée est la différence de deux mesures dont au moins une est finie.

Démonstration. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) . Soit (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure signée μ et définissons les applications μ^+ et μ^- de la manière suivante, $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$, $\mu^-(A) = -\mu(A \cap N)$, pour tout $A \in \mathscr{A}$. Il est clair que μ^+ et μ^- sont des mesures. Puisque la mesure signée ne prend au plus qu'une des valeurs ∞ ou $-\infty$, une des valeurs $\mu(P)$ ou $\mu(N)$ et donc une des mesures μ^+ ou μ^- est finie.

Proposition 7.1.11. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathcal{A}) ; si (P, N) est une décompositions de Hahn de μ , alors on a

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap P) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathscr{A}, B \subset A\}$$

et

$$\mu^{-}(A) = -\mu(A \cap N) = \sup\{-\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\},\$$

pour tout $A \in \mathscr{A}$.

Démonstration. Tout sous-ensemble $B \in \mathcal{A}$ de A vérifie

$$\mu(B) = \mu(B \cap P) - \mu(B \cap N) \leqslant \mu(B \cap P) \leqslant \mu(A \cap P).$$

On peut conclure, puisqu'on a trivialement $\mu(A \cap P) = \mu(B)$ pour $B = A \cap P$. Le cas de $A \cap N$ se traite de la même manière.

Définition 7.1.12. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) . La décomposition de la mesure signée μ en deux mesures μ^+ et μ^- , $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est appelée la décomposition de Jordan de la mesure signée μ . La mesure μ^+ est appelée la partie positive de μ et μ^- la partie négative de μ .

La Proposition 7.1.11 nous permet d'affirmer que la décomposition de Jordan est unique.

Remarque 7.1.13. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable. Une mesure signée μ sur (X, \mathscr{A}) peut s'écrire comme la différence de deux mesures (positives) sans que ces mesures soient obtenues à partir de la décomposition de Hahn. On a par exemple $\mu = 2\mu - \mu$. Il faut une condition supplémentaire pouvoir affirmer qu'il s'agit d'une décomposition de Jordan. Elle sera donnée par la Proposition 7.4.6.

La notion de variation totale permet de définir des espaces normés complets. Nous aborderons ce thème dans le cadre des mesures complexes.

Définition 7.1.14. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) . La variation de la mesure signée μ est la mesure $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, où μ^+ et μ^- sont les parties positive et négative de la mesure signée μ . La variation totale de la mesure signée μ est la quantité $||\mu|| = |\mu|(X)$.

Proposition 7.1.15. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) . La variation de μ est la plus petite des mesures ν telles que $|\mu(A)| \leq \nu(A)$ quel que soit $A \in \mathscr{A}$.

Démonstration. Soient ν une mesure telle que $|\mu(A)| \leq \nu(A)$, $\forall A \in \mathscr{A}$ et (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure signée μ . Montrons que $|\mu|(A) \leq \nu(A)$, $\forall A \in \mathscr{A}$. Si $A \subset P$, $|\mu|(A) = \mu^+(A) = |\mu(A)| \leq \nu(A)$. Si $A \subset N$, $|\mu|(A) = \mu^-(A) = |\mu(A)| \leq \nu(A)$. Si $A \in \mathscr{A}$, soient $A_1 = A \cap P$ et $A_2 = A \cap N$. On a $A = A_1 \cup A_2$ et

$$|\mu|(A) = \mu^+(A_1) + \mu^-(A_2) \le \nu(A_1) + \nu(A_2) = \nu(A),$$

ce qui suffit. \Box

7.2 Mesures complexes

Les mesures complexes se définissent par analogie avec les nombres complexes.

Définition 7.2.1. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable. Une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) est une application μ définie sur \mathscr{A} qui peut s'écrire sous la forme $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures signées finies sur (X, \mathscr{A}) . Les mesures signées μ_1 et μ_2 sont respectivement appelées la partie réelle et la partie imaginaire de μ sur (X, \mathscr{A}) .

Bien sûr, une mesure complexe μ sur (X, \mathcal{A}) peut toujours prendre la forme

$$\mu = \mu_{1,1} - \mu_{1,2} + i\mu_{2,1} - i\mu_{2,2},\tag{7.1}$$

où $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,1}$, et $\mu_{2,2}$ sont des mesures finies sur (X, \mathscr{A}) .

Définition 7.2.2. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) . Si, dans la relation (7.1), les mesures $\mu_{1,1}$ et $\mu_{1,2}$ forment la décomposition de Jordan de la partie réelle de μ et les mesures $\mu_{2,1}$ et $\mu_{2,2}$ forment la décomposition de Jordan de la partie complexe de μ , la représentation définie par l'égalité (7.1) est appelée la décomposition de Jordan de la mesure complexe μ .

La notion de variation peut être adaptée aux mesures complexes.

Définition 7.2.3. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) . La variation $|\mu|$ de μ est l'application définie sur \mathscr{A} par

$$|\mu|(A)$$
 = $\sup\{\sum_{k=1}^n |\mu(A_k)| : (A_k)_{k=1}^n \text{ partition finie de } A \text{ en ensembles } \mathscr{A}\text{-mesurables}\}.$

La variation totale de la mesure complexe μ est la quantité $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Une mesure signée finie est une mesure complexe particulière. Il importe donc de vérifier que dans ce cas, les deux notions de variation coïncident.

Proposition 7.2.4. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée finie sur (X, \mathscr{A}) . La variation de μ au sens de la définition 7.1.14 correspond à la variation de μ au sens de la définition 7.2.3.

Démonstration. Montrons que la variation de μ au sens définition 7.1.14 est majorée par la variation de μ au sens la définition 7.2.3. Soit (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure signée finie μ . Si A est un élément de \mathscr{A} , posons $A_1 = A \cap P$ et $A_2 = A \cap N$; $(A_k)_{k=1}^2$ est une partition finie de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables et

$$\mu^+(A) + \mu^-(A) = \mu(A \cap P) - \mu(A \cap N) = |\mu(A_1)| + |\mu(A_2)|,$$

ce qui suffit.

Montrons à présent que l'autre inégalité. Soit A un élément de \mathscr{A} ; pour toute partition finie $(A_k)_{k=1}^n$ de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| \le \sum_{k=1}^{n} \mu^+(A_k) + \sum_{k=1}^{n} \mu^-(A_k) = \mu^+(A) + \mu^-(A),$$

ce qui permet de conclure en prenant le supremum sur toutes les partitions finies de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables dans le membre de gauche.

Proposition 7.2.5. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) . La variation de μ est la plus petite des mesures ν telles que $|\mu(A)| \leq \nu(A)$ quel que soit $A \in \mathscr{A}$.

Démonstration. Soit A un élément de \mathscr{A} et montrons que $|\mu|(A) \leqslant \nu(A)$ quelque soit la mesure ν de l'énoncé. Pour toute partition finie $(A_k)_{k=1}^n$ de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) = \nu(A).$$

En prenant le supremum sur les partitions finies en ensembles \mathscr{A} -mesurables dans le membre de gauche de cette inégalité, on obtient $|\mu|(A) \leq \nu(A)$, ce qui suffit.

Remarque 7.2.6. Les propositions 7.1.15 et 7.2.5 fournissent une preuve alternative de la proposition 7.2.4.

La variation définit une mesure.

Proposition 7.2.7. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) . La variation $|\mu|$ de μ est une mesure finie sur (X, \mathscr{A}) .

Démonstration. On a bien sûr $|\mu|(\varnothing) = 0$. Montrons maintenant que $|\mu|$ est finiment additif. Soient B_1 et B_2 deux ensembles disjoints de \mathscr{A} ; si $(A_k)_{k=1}^n$ est une partition de $B_1 \cup B_2$ en ensembles \mathscr{A} -mesurables, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| \leqslant \sum_{k} |\mu(A_k \cap B_1)| + \sum_{k} |\mu(A_k \cap B_2)| \leqslant |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2).$$

Puisque $|\mu|(B_1 \cup B_2)$ est le supremum des nombres pouvant apparaître dans le membre de gauche de cette inégalité, on a $|\mu|(B_1 \cup B_2) \leq |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2)$. Maintenant, à partir de deux partitions finies $(A_k)_{k=1}^n$ et $(A'_k)_{k=1}^{n'}$ de B_1 et B_2 respectivement en ensembles \mathscr{A} -mesurables, on peut construire trivialement une partition finie de $B_1 \cup B_2$ en ensembles \mathscr{A} -mesurables. De là,

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| + \sum_{k=1}^{n'} |\mu(A_k')| \leqslant |\mu|(B_1 \cup B_2),$$

ce qui implique $|\mu|(B_1) + |\mu|(B_2) \leq |\mu|(B_1 \cup B_2)$. Ainsi, nous venons de montrer l'égalité $|\mu|(B_1 \cup B_2) = |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2)$.

Soit maintenant $\mu = \mu_{1,1} + \mu_{1,2} + i\mu_{2,1} - i\mu_{2,2}$ la décomposition de Jordan de μ . On a

$$|\mu|(A) \le \mu_{1,1}(A) + \mu_{1,2}(A) + \mu_{2,1}(A) + \mu_{2,2}(A),$$
 (7.2)

pour tout $A \in \mathcal{A}$. Puisque les mesures intervenant dans la décomposition de Jordan d'une mesure complexe sont finies, l'inégalité (7.2) implique que $|\mu|$ est fini.

Maintenant, si $(A_k)_k$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'ensembles \mathscr{A} -mesurables telle que $\cap_k A_k = \varnothing$, on a $\lim_k \mu_{i,j}(A_k) = 0$ pour tous $i,j \in \{1,2\}$. L'inégalité (7.2) implique alors $\lim_k |\mu|(A_k) = 0$, ce qui permet d'affirmer que $|\mu|$ est une mesure, par la proposition 1.2.20.

Proposition 7.2.8. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesuré, μ une mesure signée ou complexe sur (X, \mathscr{A}) et A un élément de \mathscr{A} . On a $|\mu|(A) = 0$ si et seulement si tout sous-ensemble \mathscr{A} -mesurable B de A vérifie $\mu(B) = 0$.

Démonstration. Supposons que $|\mu|(A) = 0$. On a, pour tout sous-ensemble \mathscr{A} -mesurable B de A, $|\mu(B)| \leq |\mu|(B) \leq |\mu|(A) = 0$.

Supposons maintenant que pour tout sous-ensemble \mathscr{A} -mesurable B de A, $\mu(B) = 0$. Si $(A_k)_{k=1}^n$ est une partition finie de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables, on a $\mu(A_k) = 0$ pour tout k et donc $\sum_{k=1}^n |\mu(A_k)| = 0$. Par définition de $|\mu|(A)$, on a alors $|\mu|(A) = 0$.

Définition 7.2.9. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable. Dénotons $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ la collection des mesures signées finies sur (X, \mathscr{A}) et $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ la collection des mesures complexes sur (X, \mathscr{A}) .

On constate immédiatement que $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ et $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ sont des espaces vectoriels (sur \mathbb{R} et \mathbb{C} respectivement) et que la variation totale $\|\cdot\|$ définit une norme sur chacun de ces espaces. Une question qui se pose naturellement concerne la complétude de ces espaces.

Proposition 7.2.10. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable; les espaces $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ et $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ sont complets pour la norme variation totale.

Démonstration. Soit $(\mu_k)_k$ une suite de Cauchy dans $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ ou $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, l'inégalité $|\mu_p(A) - \mu_q(A)| \leq ||\mu_p - \mu_q||$ implique que la suite $(\mu_k(A))_k$ est de Cauchy et donc convergente dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit alors l'application à valeurs réelles ou complexes μ définie sur \mathscr{A} par $\mu(A) = \lim_k \mu_k(A)$, pour tout $A \in \mathscr{A}$. Il nous faut montrer que μ est une mesure signée ou complexe et que $\lim_k ||\mu_k - \mu|| = 0$. Il est clair que $\mu(\varnothing) = 0$ et que μ est finiment additif.

Montrons que la suite $\mu_k(A)$ converge vers $\mu(A)$ uniformément selon $A \in \mathscr{A}$. Soient $\varepsilon > 0$ et N un entier positif tel que $p, q \geqslant N$ implique $\|\mu_p - \mu_q\| < \varepsilon$. De cette inégalité, on obtient directement $|\mu_p(A) - \mu_q(A)| < \varepsilon$ pour tous $p, q \geqslant N$ et tout $A \in \mathscr{A}$ et donc $|\mu_p(A) - \mu(A)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $p \geqslant N$ et tout $A \in \mathscr{A}$. Puisque ε est arbitraire, la convergence uniforme de $(\mu_k(\cdot))_k$ est démontrée.

Remarquons d'abord que le lemme 7.1.3 concernant la continuité des mesures signées peut être étendu aux mesures complexes sans modification. Soient $(A_k)_k$ une suite décroissante de $\mathscr A$ telle que $\cap_k A_k = \mathscr O$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $(\mu_k(\cdot))_k$ converge uniformément vers $\mu(\cdot)$, il existe $N_1 > 0$ tel que $|\mu_k(A) - \mu(A)| < \varepsilon/2$ pour tout $k \ge N_1$ et tout $A \in \mathscr A$. Qui plus est, par la continuité des mesures signées et complexes, il existe $N_2 > 0$ tel que $|\mu_{N_1}(A_k)| < \varepsilon/2$ pour tout $k \ge N_2$. Pour tout $k \ge N_2$, on a alors

$$|\mu(A_k)| \le |\mu(A_k) - \mu_{N_1}(A_k)| + |\mu_{N_1}(A_k)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_k \mu(A_k) = 0$. La proposition 1.2.20 s'applique sans modification aux mesures signées ou complexes finiment additives et permet d'affirmer que μ est dénombrablement additif.

Montrons enfin que $\lim_k \|\mu_k - \mu\| = 0$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe N > 0 tel que $p, q \ge N$ implique $\|\mu_p - \mu_q\| < \varepsilon$. Si la suite finie $(A_j)_{j=1}^n$ est une partition de X en ensembles \mathscr{A} -mesurables, on a, par définition de $\|\cdot\|$,

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu_{p}(A_{j}) - \mu_{q}(A_{j})| \leq ||\mu_{p} - \mu_{q}|| < \varepsilon$$

pour tous $p, q \ge N$. De là, pour tout $k \ge N$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j) - \mu_k(A_j)| = \lim_{p} \sum_{j=1}^{n} |\mu_p(A_j) - \mu_k(A_j)| \le \varepsilon.$$

Puisque $\|\mu - \mu_k\|$ est le supremum des nombres pouvant apparaître dans le membre de gauche de la dernière inégalité, la relation $\|\mu - \mu_k\| \le \varepsilon$ est satisfaite pour tout $k \ge N$, ce qui permet de conclure.

L'intégration par rapport à des mesures signées finie ou complexe se définit naturellement.

Définition 7.2.11. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable. Nous noterons $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles bornées \mathscr{A} -mesurables sur X et $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes bornées \mathscr{A} -mesurables sur X.

Définition 7.2.12. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ une mesure signée finie sur (X, \mathscr{A}) dont la décomposition de Jordan est donnée par l'égalité $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Si f appartient à $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$, l'intégrale de f par rapport à μ , naturellement notée $\int f d\mu$, est définie par la relation

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^-.$$

Clairement,

$$f \mapsto \int f \, d\mu$$

définit une fonctionnelle linéaire sur $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$. De plus, si $A \in \mathscr{A}$, alors $\int \chi_A d\mu = \mu(A)$ pour tout $\mu \in M(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ et donc, si f est une fonction caractéristique \mathscr{A} -mesurable,

$$\mu \mapsto \int f \, d\mu \tag{7.3}$$

définit une fonctionnelle linéaire sur $M(X, \mathcal{A}, \mathbb{R})$. Par la linéarité de l'intégrale et le théorème de la convergence dominée, l'application définie par la relation (7.3) est une fonctionnelle linéaire pour toute fonction $f \in B(X, \mathcal{A}, \mathbb{R})$.

De la même manière, si μ est une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) , la décomposition de Jordan de μ permet de définir l'intégrale par rapport à μ d'une fonction de $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$. Les expressions $f \mapsto \int f d\mu$ et $\mu \mapsto \int f d\mu$ définissent des fonctionnelles linéaires sur $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ et $M(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ respectivement.

Équipons maintenant les espaces $B(X, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ et $B(X, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ de la norme $||f||_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Si μ est une mesure signée finie ou complexe sur (X, \mathcal{A}) et si $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ est une fonction simple \mathcal{A} -mesurable, on a

$$|\int f d\mu| = |\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| |\mu(A_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} ||f||_{\infty} |\mu(A_k)| \leqslant ||f||_{\infty} ||\mu||.$$

Puisque toute fonction de $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ ou $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions simples \mathscr{A} -mesurables, on a, pour tout f appartenant à $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{R})$ ou $B(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$, $|\int f d\mu| \leq ||f||_{\infty} ||\mu||$.

7.3 Mesures absolument continues

Le but essentiel de cette section est de présenter le théorème de Radon-Nikodym.

Définition 7.3.1. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ, ν deux mesures sur (X, \mathscr{A}) . La mesure ν est absolument continue par rapport à μ si tout ensemble $A \in \mathscr{A}$ satisfaisant $\mu(A) = 0$ satisfait aussi $\nu(A) = 0$. Si ν est absolument continu par rapport à μ , on écrit $\nu \ll \mu$. Une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ est absolument continue si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ une application positive. Nous avons vu que $f \cdot \mu$ est une mesure sur \mathcal{A} (cf. Définition 2.4.12). Si $A \in \mathcal{A}$ est un ensemble tel que $\mu(A) = 0$, $f\chi_A$ est égal à 0 μ -presque partout et donc $f \cdot \mu(A) = 0$. Ainsi, $f \cdot \mu$ est absolument continu par rapport à μ . Nous allons voir que si μ est une mesure σ -finie, toute mesure absolument continue par rapport à μ est de ce type.

La propriété suivante caractérise les mesures finies absolument continues.

Proposition 7.3.2. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure sur (X, \mathscr{A}) et ν une mesure finie sur (X, \mathscr{A}) . On a $\nu \ll \mu$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que chaque ensemble $A \in \mathscr{A}$ vérifiant $\mu(A) < \delta$ vérifie $\nu(A) < \varepsilon$.

Démonstration. Supposons d'abord que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant l'énoncé et soit $A \in \mathscr{A}$ un ensemble vérifiant $\mu(A) = 0$. On a ainsi $\mu(A) < \delta$ quel que soit δ et donc $\nu(A) < \varepsilon$ pour tout ε . Ceci entraı̂ne $\nu(A) = 0$ et l'absolue continuité de ν par rapport à μ .

Montrons que s'il n'existe pas de couple (ε, δ) vérifiant l'énoncé, alors ν n'est pas absolument continu par rapport à μ . Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que quel que soit $\delta > 0$, il existe $A_\delta \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A_\delta) < \delta$ et $\nu(A_\delta) \geqslant \varepsilon$. Pour chaque k, soit donc $A_k \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A_k) < 1/2^k$ et $\nu(A_k) \geqslant \varepsilon$. On a $\mu(\bigcup_{j=k}^\infty A_j) \leqslant \sum_{j=k}^\infty \mu(A_j) < 1/2^{k-1}$ et $\nu(\bigcup_{j=k}^\infty A_j) \geqslant \nu(A_k) \geqslant \varepsilon$ pour tout k. Ainsi, par la continuité des mesures, l'ensemble $A = \cap_k \bigcup_{j=k}^\infty A_j$ vérifie $\mu(A) = \lim_k \mu(\bigcup_{j=k}^\infty A_j) = 0$ et $\nu(A) = \lim_k \nu(\bigcup_{j=k}^\infty A_j) \geqslant \varepsilon$. Au final, ν n'est pas une mesure absolument continue par rapport à μ .

Le résultat suivant est le principal résultat de cette section.

Théorème 7.3.3 (Théorème de Radon-Nikodym). Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable et μ, ν deux mesures σ -finies sur (X, \mathscr{A}) . Si ν est absolument continu par rapport à μ , il existe une application $f: X \to [0, \infty[\mathscr{A}$ -mesurable telle que $\nu(A) = \int_A f d\mu$, $\forall A \in \mathscr{A}$. S'il existe une autre application g telle que $\nu(A) = \int_A g d\mu$, alors f = g μ -presque partout.

Démonstration. Supposons d'abord que μ et ν sont des mesures finies et soit $\mathscr F$ la famille des applications $\mathscr A$ -mesurables $f:X\to [0,\infty]$ telles que $\int_A f d\mu\leqslant \nu(A)$ pour tout $A\in\mathscr A$. Montrons qu'il existe une application $g\in\mathscr F$ telle que $\int g d\mu=\sup\{\int f d\mu:f\in\mathscr F\}$. Nous montrerons ensuite que $\nu(A)=\int_A g d\mu$ pour tout $A\in\mathscr A$. Finalement, nous modifierons g pour que cette application ne prenne que des valeurs finies.

Montrons d'abord que si $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$, $\max(f_1, f_2) \in \mathscr{F}$. Si $A \in \mathscr{A}$, soit $A_1 = \{x \in A : f_1(x) > f_2(x)\}$ et $A_2 = \{x \in A : f_2(x) \ge f_1(x)\}$. On a

$$\int_{A} \max(f_1, f_2) d\mu = \int_{A_1} f_1 d\mu + \int_{A_2} f_2 d\mu \leqslant \nu(A_1) + \nu(A_2) = \nu(A).$$

Qui plus est, puisque l'application 0 appartient à \mathscr{F} , \mathscr{F} n'est pas vide. Maintenant, soit $(f_k)_k$ une suite de \mathscr{F} telle que $\lim_k \int f_k \, d\mu = \sup\{\int f d\mu : f \in \mathscr{F}\}$. Quitte à remplacer f_k par $\max_{1 \leq j \leq k} f_j$, on peut supposer que la suite $(f_k)_k$ est croissante. Soit $g = \lim_k f_k$. Le théorème de la convergence monotone implique

$$\int_{A} g \, d\mu = \lim_{k} \int_{A} f_{k} \, d\mu \leqslant \nu(A)$$

pour tout $A \in \mathscr{A}$ et donc $g \in \mathscr{F}$. On a aussi

$$\int gd\mu = \sup\{\int fd\mu : f \in \mathscr{F}\}. \tag{7.4}$$

Montrons que $\nu(A) = \int_A g d\mu \ \forall A \in \mathscr{A}$. Nous savons déjà que l'application $\nu_0(A) = \nu(A) - \int_A g d\mu$ définit une mesure sur \mathscr{A} . Montrons que $\nu_0 = 0$. Supposons que $\nu_0 \neq 0$; puisque μ est une mesure finie, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\nu_0(X) > \varepsilon \mu(X). \tag{7.5}$$

Soit (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure signée $\nu_0 - \varepsilon \mu$. Pour chaque $A \in \mathcal{A}$, on a, par définition de P, $\nu_0(A \cap P) \ge \varepsilon \mu(A \cap P)$ et donc

$$\nu(A) = \int_{A} g \, d\mu + \nu_{0}(A) \geqslant \int_{A} g \, d\mu + \nu_{0}(A \cap P)$$

$$\geqslant \int_{A} g \, d\mu + \varepsilon \mu(A \cap P) = \int_{A} g + \varepsilon \chi_{P} \, d\mu. \tag{7.6}$$

Remarquons que $\mu(P) > 0$, sinon, puisque ν est absolument continu, $\nu_0(P) = 0$ et donc $\nu_0(X) - \varepsilon \mu(X) = (\nu_0 - \varepsilon \mu)(N) \leqslant 0$, ce qui contredit (7.5). De là, puisque, rappelons-le, $\int g d\mu \leqslant \nu(X) < \infty$, la relation (7.6) implique que $g + \varepsilon \chi_P \in \mathscr{F}$ et $\int g d\mu < \int g + \varepsilon \chi_P d\mu$, ce qui contredit (7.4). Dès lors, $\nu_0 = 0$ et $\nu(A) = \int g d\mu$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. Puisque g est intégrable, le corollaire 2.3.17 implique que l'application g est égale presque partout à une fonction à valeurs finies. Le théorème est donc démontré si μ et ν sont finis.

Supposons maintenant que μ et ν sont σ -finis ; il existe donc une suite $(X_k)_k$ d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathscr A$ telle que $X=\cup_k X_k$ et $\mu(X_k), \nu(X_k)<\infty$. Pour chaque k, nous avons montré l'existence d'une fonction $g_k:X_k\to[0,\infty[$ telle que $\nu(A)=\int_A g_k d\mu$, pour tout sous-ensemble $A\in\mathscr A$ de X_k . La fonction $g:X\to[0,\infty[$ égale à g_k sur X_k est la fonction recherchée.

Montrons à présent l'unicité de l'application g. Soient $g,h:X\to [0,\infty[$ deux applications $\mathscr A$ -mesurables telles que $\nu(A)=\int_A g d\mu=\int_A h d\mu$ pour tout $A\in\mathscr A$. Supposons d'abord que ν est fini. La fonction g-h est intégrable et $\int_A g-h d\mu=0$ pour tout $A\in\mathscr A$. En choisissant comme ensemble A les ensembles $\{x\in X:g(x)>h(x)\}$ et $\{x\in X:g(x)< h(x)\}$, on a $\int (g-h)^+d\mu=0$ et $\int (g-h)^-d\mu=0$. De là, $(g-h)^+=(g-h)^-=0$ μ -presque partout et donc g=h μ -presque partout. Si ν est σ -fini et $(X_k)_k$ est une suite d'ensembles de $\mathscr A$ tels que $\nu(X_k)<\infty$ et $X=\cup_k X_k$, l'argument précédent montre que g=h μ -presque partout sur chaque ensemble X_k et donc μ -presque partout sur X.

Définition 7.3.4. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure sur (X, \mathscr{A}) et ν une mesure signée ou complexe sur (X, \mathscr{A}) . La mesure signée ou complexe ν est absolument continue par rapport à μ si $|\nu|$ est absolument continue par rapport à μ , ce que l'on note toujours $\nu \ll \mu$.

Proposition 7.3.5. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure sur (X, \mathscr{A}) et ν une mesure signée sur (X, \mathscr{A}) ; ν est absolument continu par rapport à μ si et seulement si on a $\nu^+, \nu^- \ll \mu$.

Démonstration. Si $\nu \ll \mu$ et $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ implique $|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A) = 0$ et donc $\nu^+(A) = \nu^-(A) = 0$.

Si $\nu^+, \nu^- \ll \mu$, alors $\mu(A) = 0$ implique $\nu^+(A) = \nu^-(A) = 0$ et donc $|\nu|(A) = 0$, ce qui suffit.

Proposition 7.3.6. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure sur (X, \mathscr{A}) et ν une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) dont la décomposition de Jordan est donnée par $\nu = \nu_{1,1} - \nu_{1,2} + i\nu_{2,1} - i\nu_{2,2}$. La mesure ν est absolument continue par rapport à μ si et seulement si on a $\nu_{j,k} \ll \mu$, pour tous $j,k \in \{1,2\}$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\nu \ll \mu$. Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Si (P_1, N_1) est une décomposition de Hahn de $\nu_{1,1} - \nu_{1,2}$ et si (P_2, N_2) est une décomposition de Hahn

de $\nu_{2,1} - \nu_{2,2}$, pour toute partition finie $(A_k)_{k=1}^n$ de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables, soit la partition finie $(B_k)_{k=1}^{4n}$ de A où

$$B_{4k} = A_k \cap P_1 \cap P_2, \qquad B_{4k-1} = A_k \cap P_1 \cap N_2, B_{4k-2} = A_k \cap N_1 \cap P_2, \qquad B_{4k-3} = A_k \cap N_1 \cap N_2,$$

$$(7.7)$$

pour $k \in \{1, ..., n\}$. Bien sûr $(B_{4k-j})_{j=0}^3$ est une partition finie de A_k pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. On a

$$\sum_{k=1}^{4n} |\nu(B_k)| \leqslant |\nu|(A) = 0$$

et donc $|\nu(B_k)| = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., 4n\}$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, ..., 4n\}$ et tous $p, q \in \{1, 2\}$, on a $\nu_{p,q}(B_k) = 0$, ce qui implique $\sum_{k=1}^{4n} \nu_{p,q}(B_k) = \nu_{p,q}(A) = 0$ pour tous $p, q \in \{1, 2\}$.

Si maintenant $\nu_{j,k} \ll \mu$ pour tous $j,k \in \{1,2\}$, alors $\mu(A) = 0$ implique $|\nu|(A) \leq \sum_{j,k \in \{1,2\}} \nu_{j,k}(A) = 0$.

Proposition 7.3.7. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure sur (X, \mathscr{A}) et ν une mesure signée ou complexe sur (X, \mathscr{A}) ; ν est absolument continue par rapport à μ si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$.

Démonstration. Supposons que $\nu \ll \mu$; si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$, alors $|\nu(A)| \leq |\nu|(A) = 0$, ce qui suffit.

Si maintenant $\mu(A)=0$ implique $\nu(A)=0$ quelque soit $A\in\mathscr{A}$, soit $(A_k)_{k=1}^n$ une partition finie de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables. Puisque $A_k\subset A$, on a $\mu(A_k)=0$ et donc $\nu(A_k)=0$ ($k\in\{1,\ldots,n\}$). Il vient donc $\sum_{k=1}^n |\nu(A_k)|=0$. En prenant le supremum sur toutes les partitions finies $(A_k)_k$ de A en ensembles \mathscr{A} -mesurables dans le membre de gauche de la dernière égalité, on obtient $|\nu|(A)=0$, ce qui suffit.

Dans le cas des mesures signées, la suffisance de la condition s'obtient plus facilement. En effet, soit (P, N) une décomposition de Hahn de ν et pour tout $A \in \mathcal{A}$, soit $A_1 = A \cap P$ et $A_2 = A \cap N$. Bien entendu, $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A_1) = \nu(A_2) = 0$, ce qui permet de conclure.

Nous pouvons reformuler le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures signées finies ou complexes.

Théorème 7.3.8 (Théorème de Radon-Nikodym). Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure σ -finie sur (X, \mathscr{A}) et ν une mesure signée finie ou complexe sur (X, \mathscr{A}) . Si $\nu \ll \mu$, alors il existe une application f appartenant à $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{C})$ telle que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. S'il existe une autre application g ayant cette propriété, alors f = g μ -presque partout.

Démonstration. Une mesure complexe ν peut s'écrire $\nu = \nu_{1,1} - \nu_{1,2} + i\nu_{2,1} - i\nu_{2,2}$, où $\nu_{j,k}$ sont des mesures finies absolument continues par rapport à μ . Le théorème de Radon Nikodym pour les mesures implique l'existence de quatre applications $f_{j,k}$ $(j,k \in \{1,2\})$ telles que $\nu_{j,k}(A) = \int_A f_{j,k} d\mu$, pour tout $A \in \mathscr{A}$. La fonction f de l'énoncé est obtenue en posant $f = f_{1,1} - f_{1,2} + if_{2,1} - if_{2,2}$.

De même, une mesure signée finie ν sur (X, \mathscr{A}) peut s'écrire $\nu = \nu^+ - \nu^-$, où ν^+, ν^- sont deux mesures finies absolument continues par rapport à μ . Le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures implique l'existence de deux applications f_1, f_2 telles que $\nu^+(A) = \int_A f_1 d\mu$ et $\nu^-(A) = \int_A f_2 d\mu$. L'application $f = f_1 - f_2$ est celle de l'énoncé.

La démonstration de l'unicité est identique à celle utilisée pour l'unicité dans le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures. Si ν est une mesure complexe, il convient de considérer les parties réelles et imaginaires séparément.

Nous pouvons maintenant introduire la dérivée de Radon-Nikodym.

Définition 7.3.9. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure σ -finie sur (X, \mathscr{A}) et ν une mesure signée finie, complexe ou σ -finie sur (X, \mathscr{A}) . Si ν est absolument continu par rapport à μ , une application f, \mathscr{A} -mesurable sur X telle que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ pour tout $A \in \mathscr{A}$ est appelée une dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ . Puisque cette application est essentiellement unique (à un ensemble μ -négligeable près), on parle parfois de la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ . On la note $d\nu/d\mu$.

Nous allons maintenant considérer les relations entre une mesure signée finie ou complexe et sa dérivée.

Proposition 7.3.10. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, f un élément de $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{C})$ et ν la mesure signée finie ou complexe définie par $\nu(A) = \int_A f d\mu$. On a $|\nu|(A) = \int_A |f| d\mu$ pour tout $A \in \mathscr{A}$.

Démonstration. Soient $A \in \mathscr{A}$ et $(A_k)_{k=1}^n$ une suite finie d'ensembles de \mathscr{A} deux à deux disjoints telle que $A = \bigcup_k A_k$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} |\nu(A_k)| = \sum_{k=1}^{n} |\int_{A_k} f \, d\mu| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f| \, d\mu = \int_{A} |f| \, d\mu.$$

Puisque $|\nu|(A)$ est le supremum des sommes du membre de gauche, on a $|\nu|(A) \leqslant \int_A |f| d\mu$. Soit g une fonction de norme unité \mathscr{A} -mesurable telle que gf = |f| sur X et $(g_k)_k$ une suite d'applications simples \mathscr{A} -mesurables qui converge vers g; quitte à normaliser la suite, on peut supposer que $|g_k| = 1$ pour tout k. Si, pour tout k, g_k s'écrit

$$g_k = \sum_{l=1}^{n_k} a_{k,l} \chi_{A_{k,l}},$$

on a, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$|\int_{A} g_{k} f d\mu| = |\sum_{l=1}^{n_{k}} a_{k,l} \int_{A \cap A_{k,l}} f d\mu| = |\sum_{l=1}^{n_{k}} a_{k,l} \nu(A \cap A_{k,l})|$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{n_{k}} |\nu(A \cap A_{k,l})| \leqslant |\nu|(A).$$

Puisque le théorème de la convergence dominée implique que $\int_A g_k f d\mu$ tend vers $\int_A |f| d\mu$ lorsque k tend vers l'infini, on a $\int_A |f| d\mu \leq |\nu|(A)$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 7.3.11. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et ν une mesure signée finie ou complexe sur (X, \mathcal{A}) . La dérivée de Radon-Nikodym $d\nu/d|\nu|$ de ν par rapport à $|\nu|$ vérifie $|d\nu/d|\nu||=1$ $|\nu|$ -presque partout sur X.

Démonstration. La Proposition 7.3.10 appliquée à $f = d\nu/d|\nu|$ et $\mu = |\nu|$ implique

$$|\nu|(A) = \int_A \left| \frac{d\nu}{d|\nu|} \right| d|\nu|,$$

pour tout $A \in \mathscr{A}$. Puisque $|\nu|(A) = \int_A 1 \, d|\nu|$, 1 est une dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à $|\nu|$ et donc $|d\nu/d|\nu|| = 1$ $|\nu|$ -presque partout.

Rappelons que si ν est une mesure signée finie ou complexe, nous avons posé $\int f d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^-$ et $\int f d\nu = \int f d\nu_{1,1} - \int f d\nu_{1,2} + i \int f d\nu_{2,1} - i \int f d\nu_{2,2}$. Si $f = \chi_A$, avec $A \in \mathscr{A}$, on a bien sûr

$$\int f d\nu = \int f \frac{d\nu}{d|\nu|} \, d|\nu|.$$

C'est aussi vrai dans le cas général (f \mathscr{A} -mesurable et borné), en utilisant la linéarité de l'intégrale et le théorème de la convergence dominée.

7.4 Singularités

Dans cette section nous montrons qu'une mesure peut se décomposer en deux mesures, l'une absolument continue et l'autre singulière.

La décomposition de Lebesgue repose sur le concept de singularité.

Définition 7.4.1. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable; une mesure μ sur (X, \mathscr{A}) est une mesure concentrée sur l'ensemble $A \in \mathscr{A}$ si $\mu(A^c) = 0$. Une mesure signée ou complexe μ est concentrée en $A \in \mathscr{A}$ si la variation $|\mu|$ de μ est concentrée en A.

Proposition 7.4.2. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesurable, μ une mesure signée ou complexe sur (X, \mathscr{A}) et A un élément de \mathscr{A} ; μ est concentrée sur A si et seulement si pour tout sous-ensemble $B \in \mathscr{A}$ de A^c , on a $\mu(B) = 0$.

Démonstration. Cela résulte directement de la proposition 7.2.8.

Définition 7.4.3. Soient (X, \mathscr{A}) un espace mesuré et μ, ν deux mesures positives, signées ou complexes sur (X, \mathscr{A}) . Les mesures (signées, complexes ou non) μ et ν sont des mesures mutuellement singulières s'il existe un ensemble $A \in \mathscr{A}$ tel que μ est concentré sur A et ν est concentré sur A^c . Si μ et ν sont mutuellement singulières, on écrit $\mu \perp \nu$. Une mesure μ signée ou non sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ est simplement dite singulière si $\mu \perp \mathcal{L}$.

Proposition 7.4.4. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et ν une mesure positive, une mesure signée ou complexe sur (X, \mathcal{A}) . Si $\nu \ll \mu$ et $\nu \perp \mu$ alors $\nu = 0$.

Démonstration. Quitte à remplacer ν par $|\nu|$, nous pouvons considérer que ν est une mesure sur (X, \mathscr{A}) . Soit $A \in \mathscr{A}$ un sous-ensemble de X tel que $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$. Si $B \in \mathscr{A}$ est un sous-ensemble de A, $\mu(B) \leqslant \mu(A) = 0$ et donc, puisque $\nu \ll \mu$, $\nu(B) = 0$. Si $B \in \mathscr{A}$ est un sous-ensemble de A^c , alors $\nu(B) \leqslant \nu(A^c) = 0$. Pour un ensemble $B \in \mathscr{A}$ quelconque, soient $B_1 = B \cap A$ et $B_2 = B \cap A^c$. On a $\nu(B) = \nu(B_1) + \nu(B_2) = 0$, ce qui suffit.

Donnons quelques exemples

Exemples 7.4.5. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable.

- Si μ est une mesure signée et (P, N) une décomposition de Hahn de μ , μ^+ est concentré sur P et μ^- est concentré sur N. On a donc $\mu^+ \perp \mu^-$,
- si μ est une mesure finie discrète sur $(X, \mathscr{A}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$, i.e. il existe un ensemble dénombrable D tel que $\mu(D^c) = 0$, alors $\mathcal{L}(D) = 0$ et μ est singulier.
- Si \mathfrak{D} est le prolongement de l'escalier du diable (cf. définition 2.1.29) sur \mathbb{R} tel que $\mathfrak{D}(x)=0$ si x<0 et $\mathfrak{D}(x)=1$ si x>1, soit μ la mesure associée à \mathfrak{D} par la proposition 1.4.75. Cette mesure est singulière, mais n'est pas discrète. En effet, si $A\in\mathbb{B}$ est inclus dans le complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor \mathfrak{C} , A est inclus dans une suite d'intervalles ouverts sur chacun desquels \mathfrak{D} est constant. De là, $\mu(A)=0$. Inversement, tout ensemble inclus dans \mathfrak{C} est négligeable pour la mesure de Lebesgue, vu la proposition 2.1.31. Si I est un intervalle dont l'intérieur contient un point de \mathfrak{C} , alors $\mu(I)>0$. Puisque \mathfrak{C} n'est pas dénombrable, μ n'est pas discret.

On a un résultat d'unicité concernant la décomposition d'une mesure signée en deux mesures positives.

Proposition 7.4.6 (Théorème de décomposition de Jordan). Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable; si μ est une mesure signée, il existe deux mesures (positives) μ^+ et μ^- uniques telles que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $\mu^+ \perp \mu^-$. Qui plus est, une de ces deux mesures au moins est finie.

Démonstration. Le théorème de décomposition de Jordan (Corollaire 7.1.10) fournit l'existence de ces deux mesures.

Supposons avoir, outre μ^+ et μ^- , deux mesures ν^+ et ν^- telles que $\mu = \nu^+ - \nu^-$, avec $\nu^+ \perp \nu^-$. Soit $P \in \mathscr{A}$ tel que ν^+ soit concentré sur P et ν^- soit concentré sur P^c . Posons $N = P^c$; puisque ν^+ et ν^- sont des mesures (positives), (P, N) est une décomposition de Hahn de μ . Par conséquent, ν^+ et ν^- fournissent une décomposition de Jordan de la mesure signée μ et on a donc $\mu^+ = \nu^+$ et $\mu^- = \nu^-$.

Théorème 7.4.7 (Théorème de décomposition de Lebesgue). Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et ν une mesure σ -finie, signée finie ou complexe sur (X, \mathcal{A}) . Il existe un couple unique de mesures, mesures signées finies ou complexes (ν_a, ν_s) sur (X, \mathcal{A}) tel que $\nu = \nu_a + \nu_s$, avec $\nu_a \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$.

Démonstration. Supposons d'abord que ν est une mesure finie sur (X,\mathscr{A}) . Soient $\mathscr{F}_{\mu} = \{B \in \mathscr{A} : \mu(B) = 0\}$ et $(B_k)_k$ une suite (elle peut être prise croissante, puisque l'on veut définir une borne supérieure) de \mathscr{F}_{μ} telle que $\lim_k \nu(B_k) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathscr{F}_{\mu}\}$. On pose alors $N = \bigcup_k B_k$ pour définir deux mesures ν_a, ν_s sur (X,\mathscr{A}) comme suit, $\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c)$ et $\nu_s(A) = \nu(A \cap N)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. Bien sûr, $\nu = \nu_a + \nu_s$. Puisque $\mu(N) \leqslant \sum_k \mu(B_k) = 0$, ν_s et μ sont mutuellement singuliers. Puisque $\nu(N) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathscr{F}_{\mu}\}$, tout sous-ensemble $B \in \mathscr{A}$ de N^c satisfaisant $\mu(B) = 0$ satisfait également $\nu(B) = 0$, sinon $N \cup B$ est un ensemble de \mathscr{F}_{μ} tel que $\nu(N \cup B) > \nu(N)$. Dès lors ν_a est absolument continu par rapport à μ .

Si ν est une mesure signée finie ou complexe, la construction précédente appliquée à la mesure $|\nu|$ fournit un ensemble N et deux mesures $|\nu|_a(A) = |\nu|(A \cap N^c)$ et $|\nu|_s(A) = |\nu|(A \cap N)$. Les mesures signée ou complexes ν_a, ν_s définies par $\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c)$ et $\nu_s(A) = \nu(A \cap N)$ fournissent la décomposition souhaitée. En effet, on a toujours $\mu(N) = 0$ et donc $\nu_s \perp \mu$. Si $B \in \mathscr{A}$ est un sous-ensemble de N^c , $\mu(B) = 0$ implique $|\nu|_a(B) = 0$ et donc $|\nu|(B) = 0$. De là, on a $\nu(B) = 0$, ce qui implique $\nu_a(B) = 0$.

Supposons maintenant que ν est une mesure σ -finie. Soit $(X_k)_k$ une partition de X en ensembles de $\mathscr A$ de mesure ν finie. Pour chaque k, soit $\mathscr A_k$ la σ -algèbre sur X_k définie à partir de tous les sous-ensembles $A \in \mathscr A$ de X_k . La construction précédente appliquée aux espaces mesurables $(X_k,\mathscr A_k)$ et aux mesures ν,μ restreintes à ces espaces fournit une suite d'ensemble nuls pour μ , $(N_k)_k$. Soit $N = \bigcup_k N_k$; les mesures ν_a,ν_s définies par $\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c)$ et $\nu_s = \nu(A \cap N)$ fournissent la décomposition désirée. De fait, on a $\mu(N) = 0$ et donc $\nu_s \perp \mu$. Si $B \in \mathscr A$ est un sous-ensemble de N^c , pour chaque k, posons $B_k = B \cap X_k$. Si $\mu(B) = 0$, alors $\mu(B_k) = 0$ et nous avons montré que $\nu(B_k) = 0$ $\forall k$. On obtient $\nu(B) = \sum_k \nu(B_k) = 0$ et donc $\nu_a \ll \mu$.

Démontrons maintenant l'unicité. Soient (ν_a, ν_s) et (ν'_a, ν'_s) deux couples réalisant la décomposition de l'énoncé. Supposons d'abord que ν est une mesure finie, une mesure signée finie ou complexe. On a $\nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s$. Puisque $\nu_a - \nu'_a \ll \mu$ et $\nu'_s - \nu_s \perp \mu$, la Proposition 7.4.4 implique $\nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s = 0$ et $\nu_a = \nu'_a$, $\nu_s = \nu'_s$. Si ν est une mesure σ -finie, il suffit, encore une fois, de prendre une partition $(X_k)_k$ de X en ensembles de $\mathscr A$ de mesure ν finie et d'appliquer le raisonnement précédent aux restrictions des mesures $\nu_a, \nu_s, \nu'_a, \nu'_s$ sur les espaces $(X_k, \mathscr A_k)$, où $\mathscr A_k$ a été défini précédemment.

Définition 7.4.8. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré et ν une mesure σ -finie, une mesure signée finie ou complexe. La décomposition de ν fournie par le théorème de décomposition de Lebesgue est appelée la décomposition de Lebesgue de ν par rapport à μ . Les mesures (éventuellement signées ou complexes) ν_a et ν_s décomposant ν sont appelées la partie absolument continue de ν et la partie singulière de ν respectivement.

Il est possible de décomposer les mesures finies ν sur (\mathbb{R},\mathbb{B}) d'une manière un peu plus poussée.

Remarque 7.4.9. Soient ν une mesure finie sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) et $E = \{x \in \mathbb{R} : \nu(\{x\}) \neq 0\}$. Puisque ν est fini, pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$, il n'existe qu'un nombre fini de points tels que $\nu(\{x\}) \geqslant 1/n$; ainsi, E est dénombrable. Désignons par ν_d la mesure sur \mathbb{B} définie par $\nu_d(A) = \nu(A \cap E)$ $(A \in \mathbb{B})$ et soient ν_a et ν_s les mesures fournissant la décomposition de Lebesgue de la mesure $\nu - \nu_d$. Ainsi, ν se décompose en la somme de trois mesures dont la première est discrète, la deuxième est continue mais singulière et la troisième est absolument continue. Par construction cette décomposition est unique.

7.5 Mesures à variation finie

Nous savons qu'il existe une bijection entre l'ensemble des mesures finies sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) et l'ensemble des fonctions sur \mathbb{R} croissantes bornées et continues à droite satisfaisant $\lim_k F(-k) = 0$. Dans cette section, nous allons étendre cette correspondance en une bijection entre les mesures signées finies sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) et un sous-ensemble des fonctions sur \mathbb{R} . Cela nous mènera à une caractérisation des mesures signées finies sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) absolument continues (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Définition 7.5.1. Soient $F: A \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition A contient l'intervalle [a,b] et $\mathscr{C}_{[a,b]}$ la collection des suites finies $(a_k)_{k=0}^N$ telles que $a \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leq b$. La variation de F sur [a,b], notée $V_F[a,b]$, est définie comme suit,

$$V_F[a,b] = \sup\{\sum_k |F(a_{k+1}) - F(a_k)| : (a_k)_k \in \mathscr{C}_{[a,b]}\}.$$

La fonction F est dite à variation finie ou à variation bornée sur [a,b] si $V_F[a,b]$ est fini. On définit de la même manière la variation de F sur $]-\infty,b]$, notée $V_F]-\infty,b]$ et la variation de F sur \mathbb{R} , $V_F\mathbb{R}$. Bien sûr, F est à variation finie sur $]-\infty,b]$ si $V_F]-\infty,b]$ est fini. La fonction F est à variation finie si $V_F\mathbb{R}$ est fini. Dans ce dernier cas, la variation de F est la fonction

$$V_F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto V_F(x) = V_F[-\infty, x].$$

Nous dirons qu'une fonction F s'annule en $-\infty$ si $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Si μ est une mesure signée finie sur l'espace mesurable (\mathbb{R}, \mathbb{B}) , soit $F_{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_{\mu}(x) = \mu(]-\infty, x]).$$
 (7.8)

Si $(a_k)_{k=0}^N$ est une suite croissante, alors

$$\sum_{k} |F_{\mu}(a_{k}) - F_{\mu}(a_{k-1})| = \sum_{k} |\mu(]a_{k}, a_{k+1}])| \leqslant |\mu|(\mathbb{R}).$$

Dès lors, $V_F \mathbb{R} \leq |\mu|(\mathbb{R})$, ce qui implique que F_{μ} est à variation finie. L'application de la Proposition 1.4.73 aux mesures μ^+ et μ^- permet d'affirmer que F_{μ} est continu à droite et s'annule en $-\infty$. Nous allons montrer que toute fonction à variation finie, continue à droite et s'annulant en $-\infty$ peut être construite à partir d'une mesure signée finie.

Si F_{μ} est définie par la relation (7.8),

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_{\mu}(x) - F_{\mu}(x - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu(]x - \varepsilon, x]) = \mu(\{x\}),$$

par la continuité des mesures. La fonction F_{μ} est donc continue si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout x. Dans ce cas, si a < b,

$$\mu(|a,b|) = \mu(|a,b|) = \mu(|a,b|) = \mu(|a,b|) = F_{\mu}(b) - F_{\mu}(a).$$

La proposition suivante donne les propriétés de base des fonctions à variation finie.

Proposition 7.5.2. Si $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à variation finie, alors

- F est borné.
- $-si\ a,b \in \mathbb{R} \ avec\ a < b,\ alors\ V_F[-\infty,b] = V_F[-\infty,a] + V_F[a,b],$
- $si\ b \in \mathbb{R}$, $alors\ V_F[-\infty,b] = \lim_{a \to -\infty} V_F[a,b]$,
- si F est continu à droite et si $a, b \in \mathbb{R}$, avec a < b, alors $V_F[a, b] = \lim_{c \to a^+} V_F[c, b]$ et $V_F[a, b] = \lim_{c \to b^+} V_F[a, c]$.

Démonstration. La première assertion est triviale. Pour la deuxième assertion, il suffit de remarquer qu'une suite $(a_k)_k \in \mathscr{C}_{]-\infty,b]}$ peut être décomposée en deux suites $(b_k)_k$ et $(c_k)_k$ appartenant à $\mathscr{C}_{]-\infty,a]}$ et $\mathscr{C}_{[a,b]}$ respectivement et que deux telles suites de $\mathscr{C}_{]-\infty,a]}$ et $\mathscr{C}_{[a,b]}$ forment une suite de $\mathscr{C}_{]-\infty,b]}$. Pour la troisième assertion, soient $\varepsilon > 0$ et $(a_k)_{k=0}^N \in \mathscr{C}_{]-\infty,b]}$ tel que $V_F = 0$, $v_F = 0$,

Lemme 7.5.3. Si F est une fonction à variation finie, alors

- V_F est borné et non décroissant,
- V_F s'annule en $-\infty$,
- si F est continu à droite, alors V_F est continu à droite.

Démonstration. La première assertion est triviale. La Proposition 7.5.2 implique, si b > x,

$$\lim_{x \to -\infty} V_F(x) = \lim_{x \to -\infty} V_F[-\infty, x] = \lim_{x \to -\infty} V_F[-\infty, b] - V_F[x, b]$$
$$= V_F[-\infty, b] - V_F[-\infty, b] = 0.$$

Pour la dernière assertion, on utilise encore la Proposition 7.5.2 pour obtenir

$$\lim_{x \to y^+} V_F(x) = \lim_{x \to y^+} V_F[-\infty, x] = \lim_{x \to y^+} V_F[-\infty, y] + V_F[y, x] = V_F(y),$$

ce qui suffit.

Proposition 7.5.4. Si F est une fonction à variation finie sur \mathbb{R} , alors il existe deux fonctions croissantes et bornées telles que $F = F_1 - F_2$.

Démonstration. Les fonctions
$$F_1 = (V_F + F)/2$$
 et $F_2 = (V_F - F)/2$ conviennent (si $x < y$, $V_F(y) - F(y) \ge V_F(x) - F(x)$ si et seulement si $V_F(y) - V_F(x) \ge F(y) - F(x)$. Or, on a $V_F(y) - V_F(x) = V_F[x, y] \ge F(y) - F(x)$.

Soit F une fonction à variation finie et F_1, F_2 les deux fonctions construites dans la preuve de la Proposition 7.5.4. Le Lemme 7.5.3 implique que si F est continu à droite, alors F_1 et F_2 le sont aussi. De plus, si F s'annule en $-\infty$, F_1 et F_2 s'annulent également en $-\infty$.

Proposition 7.5.5. L'équation (7.8) définit une bijection $\mu \mapsto F_{\mu}$ entre l'ensemble des mesures signées finies sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) et l'ensemble des fonctions continues à droite à variation finie s'annulant en $-\infty$.

Démonstration. Nous avons déjà montré, en début de section, que F_{μ} est une fonction continue à droite s'annulant en $-\infty$. Si μ, ν sont deux mesures signées finies telles que $F_{\mu} = F_{\nu}$, alors $F_{\mu^+} - F_{\mu^-} = F_{\nu^+} - F_{\nu^-}$. Dès lors, $F_{\mu^+} + F_{\nu^-} = F_{\nu^+} + F_{\mu^-}$ et la proposition 1.4.75 implique $\mu^+ + \nu^- = \nu^+ + \mu^-$, c'est-à-dire $\mu = \nu$. L'application de l'énoncé est donc injective. La surjectivité résulte de la Proposition 7.5.4 et de la proposition 1.4.75. \square

Nous allons maintenant introduire la notion d'absolue continuité pour les fonctions.

Définition 7.5.6. Une fonction $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\sum_k |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ pour toute suite finie $(]a_k, b_k[)_k$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints telle que $\sum_k \operatorname{Vol}(]a_k, b_k[) < \delta$.

Clairement, toute fonction absolument continue est continue et même uniformément continue ¹. Intéressons-nous maintenant aux relations entre les fonctions absolument continues et les mesures signées absolument continues. Il existe un lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions à variation finie.

^{1.} L'inverse n'est pas vrai. Il suffit par exemple de prendre l'extension f de l'escalier du diable qui s'annule pour les arguments négatifs et vaut 1 pour les arguments supérieurs à 1.

Proposition 7.5.7. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument continu, alors F est à variation finie sur tout intervalle compact de \mathbb{R} .

Démonstration. Soit $\delta > 0$ tel que $\sum_k |F(b_k) - F(a_k)| < 1/2$ pour toute suite finie $(]a_k, b_k[)_k$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints telle que $\sum_k \operatorname{Vol}(]a_k, b_k[) < \delta$; on peut sans restriction supposer que $\delta < 1$. Soient [a, b] un intervalle compact et $(x_k)_{k=1}^n$ une suite de $\mathscr{C}_{[a,b]}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, soit $(y_j^{(k)})_j$ une suite finie de $\mathscr{C}_{[x_k, x_{k+1}]}$ telle que $\sup_j |y_{j+1}^{(k)} - y_j^{(k)}| < \delta$. Le nombre d'éléments de cette suite est au plus égal au plus petit entier n_k supérieur à $(x_{k+1} - x_k)/\delta$. On a donc

$$|F(x_{k+1}) - F(x_k)| \le \sum_{j=1}^{n_k - 1} |F(y_{j+1}^{(k)}) - F(y_j^{(k)})| < \frac{n_k}{2} \le \frac{x_{k+1} - x_k}{\delta},$$

ce qui implique $\sum_{k=1}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leq (b-a)/\delta$ et termine la démonstration. \square

Lemme 7.5.8. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à variation finie absolument continue, alors V_F est absolument continu.

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ la seconde quantité intervenant dans la définition de l'absolue continuité. Si $(]a_k,b_k[]_k$ est une suite finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints tels que $\sum_k \operatorname{Vol}(]a_k,b_k[] < \delta$, toute suite finie $(]c_k,d_k[]_k$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $\cup_k]a_k,b_k[$ vérifie $\sum_k \operatorname{Vol}(]c_k,d_k[] < \delta$ et donc $\sum_k |F(d_k) - F(c_k)| < \varepsilon$. La suite $(]c_k,d_k[]_k$ peut être choisie pour rendre la quantité $\sum_k |F(d_k) - F(c_k)|$ arbitrairement proche de $\sum_k V_F[a_k,b_k]$. De là, $\sum_k |V_F(b_k) - V_F(a_k)| = \sum_k V_F[a_k,b_k] \le \varepsilon$, ce qui montre l'absolue continuité de V_F .

Proposition 7.5.9. Soient μ une mesure signée finie sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) et $F_{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la relation (7.8). La fonction F_{μ} est absolument continue si et seulement si μ est absolument continu (par rapport à la mesure de Lebesgue \mathcal{L}).

Démonstration. Supposons d'abord que $\mu \ll \mathcal{L}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ un nombre donné par la proposition 7.3.2 tel que si A est un ensemble borélien vérifiant $\mathcal{L}(A) < \delta$, alors $|\mu|(A) < \varepsilon$. Si $(]a_k, b_k[)_k$ est une suite finie d'intervalles ouverts disjoints deux à deux telle que $\sum_k \operatorname{Vol}(]a_k, b_k[) < \delta$, alors $\mathcal{L}(\cup_k]a_k, b_k]) < \delta$ et donc

$$\sum_{k} |F_{\mu}(b_k) - F_{\mu}(a_k)| = \sum_{k} |\mu(]a_k, b_k]| \leq |\mu|(\bigcup_{k}]a_k, b_k] < \varepsilon,$$

ce qui montre l'absolue continuité de F_{μ} .

Supposons maintenant que F_{μ} est absolument continu. Par le lemme 7.5.8, $V_{F_{\mu}}$ est absolument continu. Ainsi, les fonctions $F_1 = (V_{F_{\mu}} + F_{\mu})/2$ et s $F_2 = (V_{F_{\mu}} - F_{\mu})/2$ sont absolument continues (voir Proposition 7.5.4). Soient μ_1 et μ_2 les mesures sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) correspondant à F_1 et F_2 respectivement; on a $\mu = \mu_1$ - μ_2 et il nous faut donc montrer que $\mu_1, \mu_2 \ll \mathcal{L}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tel que si $(]a_k, b_k[)_k$ est une suite finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints telle que $\sum_k \text{Vol}(]a_k, b_k[) < \delta$, alors

$$\sum_{k} |F_1(b_k) - F_1(a_k)| < \varepsilon. \tag{7.9}$$

Soit A un ensemble borélien tel que $\mathcal{L}(A) < \delta$. Puisque \mathcal{L} est une mesure régulière, il existe un ensemble ouvert U comprenant A tel que $\mathcal{L}(U) < \delta$. L'ensemble U est l'union

d'une suite dénombrable $(a_k, b_k)_k$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (cf. Proposition A.2.2). L'inégalité (7.9) entraı̂ne alors

$$\mu_1(\bigcup_{k=1}^{N}]a_k, b_k[) = \sum_{k=1}^{N} F_1(b_k) - F_1(a_k) < \varepsilon$$

pour tout N. La continuité des mesures implique $\mu_1(U) = \mu_1(\cup_k]a_k, b_k[) \leqslant \varepsilon$ et donc $\mu_1(A) \leqslant \varepsilon$. L'absolue continuité de la mesure μ_1 découle alors de la Proposition 7.3.2. Le cas de μ_2 est similaire et la preuve est complète.

Proposition 7.5.10. Les fonctions F définies par la relation

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt \tag{7.10}$$

pour une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$, sont les fonctions à variation finie absolument continues s'annulant en $-\infty$.

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$ et F la fonction définie par l'égalité (7.10). La mesure μ définie sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) par $\mu(A) = \int_A f d\mathcal{L}$ est absolument continue (par rapport à \mathcal{L}) et $F = F_{\mu}$. La Proposition 7.5.5 et la Proposition 7.5.9 impliquent que F est à variation finie, absolument continu et s'annule en $-\infty$.

Supposons maintenant que $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à variation finie, absolument continue et s'annulant en $-\infty$. La Proposition 7.5.5 implique l'existence d'une mesure signée finie μ telle que $F = F_{\mu}$. La Proposition 7.5.9, quant à elle, implique que $\mu \ll \mathcal{L}$. En posant $f = d\mu/d\mathcal{L}$, la relation (7.10) est vérifiée sur \mathbb{R} .

7.6 Les espaces duaux des espaces L^p

Nous allons maintenant poursuivre l'étude des espaces duaux des espaces L^p commencée à la section 5.4. Le théorème de Radon-Nikodym va nous permettre de montrer que bien souvent, l'opérateur T précédemment défini est un isomorphisme isométrique.

Nous aurons besoin de deux lemmes élémentaires.

Lemme 7.6.1. Soient (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Étant donné $F \in (L^p(X, \mathscr{A}, \mu))^*$, $g \in \mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $E \in \mathscr{A}$, si

$$F\langle f\chi_E\rangle = \int fg \, d\mu,\tag{7.11}$$

pour tout $\langle f \rangle$ dans un sous-espace dense de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, alors

- l'égalité précédente est vérifiée pour tout $\langle f \rangle$ de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$,
- $\|g\|_q \leqslant \|F\|.$

Démonstration. Chaque membre de l'égalité (7.11) définissant une fonctionnelle linéaire continue sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, la relation (7.11) doit être vérifiée pour tout élément $\langle f \rangle$ de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Les inégalités

$$|F\langle f\chi_E\rangle| \le ||F|| \, ||f\chi_E||_p \le ||F|| \, ||f||_p$$

impliquent que la norme de l'opérateur linéaire T_g définit par $f \mapsto F\langle f\chi_E \rangle$ est au plus ||F||. Par la proposition 5.4.1, on a alors $||g||_q = ||T_g|| \leq ||F||$.

Lemme 7.6.2. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré, $q \in [0, \infty]$, g une application \mathscr{A} -mesurable à valeurs réelles ou complexes sur X et $(E_k)_k$ une suite croissante d'ensembles de \mathscr{A} tels que $X = \bigcup_k E_k$. Si chaque application $g\chi_{E_k}$ appartient à $\mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ et si $\sup_k \|g\chi_{E_k}\|_q$ est fini, alors $g \in \mathscr{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ et vérifie $\|g\|_q = \lim_k \|g\chi_{E_k}\|_q$.

Démonstration. Si $q < \infty$, cela résulte directement du théorème de la convergence monotone. Si $q = \infty$, cela résulte de la définition de $\|\cdot\|_{\infty}$.

Théorème 7.6.3. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p; si p = 1, μ doit être supposé σ -fini. L'opérateur T définit à la section 5.4 est un isomorphisme isométrique.

 $D\acute{e}monstration$. Par la proposition 5.4.1, nous savons déjà que T est une isométrie; il nous reste donc à montrer que T est surjectif.

Soit F un élément de $(L^p(X, \mathscr{A}, \mu))^*$. Supposons d'abord que μ est fini. Soit ν l'application définie sur \mathscr{A} par $\nu(A) = F\langle \chi_A \rangle$. Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de \mathscr{A} tels que $A = \cup_k A_k$, le théorème de la convergence dominée implique l'égalité $\|\chi_A - \sum_k \chi_{A_k}\|_p = 0$. Puisque F est linéaire et continu, on a $F\langle \chi_A \rangle = \sum_k F\langle \chi_{A_k} \rangle$ et donc $\nu(A) = \sum_k \nu(A_k)$. Ainsi, ν est dénombrablement additif; il s'agit donc d'une mesure signée finie ou complexe. Cette application étant trivialement absolument continue par rapport à μ , le théorème de Radon-Nikodym implique l'existence d'une fonction g de $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$ telle que $\nu(A) = \int_A g d\mu$, pour tout $A \in \mathscr{A}$. Nous allons maintenant montrer que g appartient à $\mathscr{L}^q(X,\mathscr{A},\mu)$ et que $F\langle f \rangle = \int f g \, d\mu$ pour tout élément f de $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit $E_k = \{x \in X : |g(x)| \leq k\}$. Bien sûr, $g\chi_{E_k}$ est borné et appartient donc à $\mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, puisque μ est fini. Soit $A \in \mathcal{A}$; si $f = \chi_A$, alors la relation

$$F\langle f\chi_{E_k}\rangle = \int fg\chi_{E_k} \, d\mu$$

est vérifiée, puisque chaque membre est égal à $\nu(A \cap E_k)$. Elle l'est donc encore pour toute fonction simple f \mathscr{A} -mesurable. Puisque, par la proposition 5.3.3, les fonctions simples \mathscr{A} -mesurables forment un sous-ensemble dense de $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$, le lemme 7.6.1 implique l'inégalité $\|g\chi_{E_k}\|_q \leq \|F\|$. Le lemme 7.6.2 implique alors que g appartient à $\mathscr{L}^q(X,\mathscr{A},\mu)$. Le lemme 7.6.1 avec E=X implique enfin que $F\langle f\rangle=\int fg\,d\mu$ pour tout $\langle f\rangle$ appartenant à $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$.

Nous allons maintenant considérer le cas où μ n'est pas fini; pour ce faire, introduisons quelques notations. Si $B \in \mathcal{A}$, soit \mathcal{A}_B la σ -algèbre sur B consistant en les sous-ensembles de B appartenant à \mathcal{A} et soit $\mu|_B$ la restriction de μ à \mathcal{A}_B . Si f est une application à valeurs réelles où complexes sur B, $f|_X$ est le prolongement de f sur X tel que f s'annule sur le complémentaire de B. L'égalité $F|_B\langle f\rangle = F\langle f|_X\rangle$ définit une fonctionnelle linéaire $F|_B$ sur $L^p(B, \mathcal{A}_B, \mu|_B)$. Cette fonctionnelle satisfait $||F|_B|| \leq ||F||$.

Supposons maintenant que μ est σ -fini. Soit $(B_k)_k$ une suite d'ensembles de $\mathscr A$ deux à deux disjoints de mesure finie pour μ et qui satisfont $X = \cup_k B_k$. Vu ce qui vient d'être montré, pour chaque k il existe une application g_k appartenant à $\mathscr L^q(B_k, \mathscr A_{B_k}, \mu|_{B_k})$ telle que l'égalité

$$F|_{B_k}\langle f \rangle = \int f g_k \, d\mu|_{B_k}$$

est vérifiée pour tout $\langle f \rangle$ appartenant à $L^p(B_k, \mathscr{A}_{B_k}, \mu|_{B_k})$. Soit l'application g telle que $g(x) = g_k(x)$ si $x \in B_k$. Comme précédemment, les lemmes 7.6.1 et 7.6.2 permettent

d'affirmer que $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ et que

$$F\langle f\rangle = \int fg \, d\mu$$

pour tout $\langle f \rangle$ appartenant à $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Si p > 1, montrons que μ peut être une mesure arbitraire. Soit $\mathscr C$ la collection des ensembles de $\mathscr A$ σ -finis pour la mesure μ . Si $B \in \mathscr C$, alors $(B, \mathscr A_B, \mu|_B)$ est σ -fini et par ce qui précède, il existe une application g appartenant à $\mathscr L^q(B, \mathscr A_B, \mu|_B)$ telle que $F|_B(\langle f \rangle) = \int fg \, d\mu|_B$ pour tout élément $\langle f \rangle$ de $L^p(B, \mathscr A_B, \mu|_B)$. Si B et C sont des ensembles disjoints de $\mathscr C$, montrons que

$$||F|_{B \cup C}||^q = ||F|_B||^q + ||F|_C||^q.$$
(7.12)

Soit une application g de $\mathcal{L}^q(B \cup C, \mathcal{A}_{B \cup C}, \mu|_{B \cup C})$ qui représente $F|_{B \cup C}$. On a

$$||F|_{B\cup C}||^q = \int |g|^q d\mu|_{B\cup C} = \int_B |g|^q d\mu|_B + \int_C |g|^q d\mu|_C = ||F|_B||^q + ||F|_C||^q.$$

Soit maintenant $(C_k)_k$ une suite de \mathscr{C} telle que

$$\lim_{k} ||F|_{C_k}|| = \sup_{B \in \mathscr{C}} ||F|_B||$$

et posons $C = \bigcup_k C_k$; on a $C \in \mathscr{C}$,

$$||F|_C|| = \sup_{B \in \mathscr{C}} ||F|_B|| \tag{7.13}$$

et il existe une application g_C appartenant à $\mathcal{L}^q(C, \mathcal{A}_C, \mu|_C)$ telle que

$$F|_{C}\langle f\rangle = \int fg_{C} \, d\mu|_{C},\tag{7.14}$$

pour tout élément $\langle f \rangle$ de $L^p(C, \mathscr{A}_C, \mu|_C)$. Si f appartient à $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et s'annule sur C, alors $F\langle f \rangle = 0$. De fait, supposons le contraire et soit $E = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Par le corollaire 2.3.15, E appartient à \mathscr{C} . Par définition de E, puisque $F\langle f \rangle \neq 0$, $F|_E \neq 0$ et l'égalité (7.12) implique

$$||F|_{C \cup E}||^q = ||F|_C||^q + ||F|_E||^q > ||F|_C||^q$$

ce qui contredit la relation (7.13). Si g est le prolongement de g_C qui s'annule sur le complémentaire de C, la remarque qui précède et la relation (7.14) permettent d'affirmer que la relation

$$F(\langle f \rangle) = \int f g \, d\mu$$

est vérifiée pour tout élément $\langle f \rangle$ de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = f_C + f_{C^c}$ où f_C vaut f sur C et s'annule sur C^c et où f_{C^c} vaut f sur C^c et s'annule sur C, on a

$$F\langle f\rangle = F\langle f_C\rangle + F\langle f_{C^c}\rangle = F\langle f_C\rangle = F|_C\langle f\rangle = \int fg_C\,d\mu|_C = \int fg\,d\mu,$$

ce qui termine la démonstration.

Lorsque p=1, on ne peut retirer l'hypothèse de σ -finitude sans danger.

Remarque 7.6.4. Soient $X=\mathbb{R}$, \mathscr{A} la σ -algèbre consistant en les sous-ensembles A de \mathbb{R} tels que soit A, soit A^c soit est dénombrable et μ la mesure de dénombrement sur (X,\mathscr{A}) . L'espace $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$ consiste en les fonctions f sur \mathbb{R} qui s'annulent sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable et vérifient $||f||_1 = \sum_x |f(x)| < \infty$. Soit F la fonctionnelle sur $L^1(X,\mathscr{A},\mu)$ telle que $F\langle f\rangle = \sum_{x>0} f(x)$. Cette application est continue et s'il existe une fonction g telle que $F\langle f\rangle = \int fg \,d\mu$ pour tout $f \in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu)$, on doit avoir $g = \chi_{]0,\infty[}$. Cette fonction n'est cependant pas \mathscr{A} -mesurable et la fonctionnelle F n'est induite par aucune fonction de $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$.

7.7 Autre définition de la notion de mesure

Il est possible de définir une notion de mesure sur un semi-anneau; une telle application est par définition à valeurs complexes.

Définition 7.7.1. Soit X un ensemble arbitraire. Une collection $\mathscr S$ de sous-ensembles de X est un semi-anneau sur X si

- $-\emptyset \in \mathscr{S}$,
- si $S, S' \in \mathcal{S}$, il existe une partition finie de $S \cap S'$ constituée d'éléments de \mathcal{S} ,
- si $S, S' \in \mathcal{S}$, il existe une partition finie de $S \setminus S'$ constituée d'éléments de \mathcal{S} .

On requiert parfois la condition supplémentaire suivante : il existe une suite $(S_k)_k$ de \mathscr{S} telle que $X = \bigcup_k S_k$.

Remarquons qu'un semi-anneau sur un ensemble X ne contient pas nécessairement X lui-même.

Proposition 7.7.2. Toute σ -algèbre de parties de X est un semi-anneau sur X.

Démonstration. Si \mathscr{A} est une sigma algèbre de parties de X, on a $\varnothing \in \mathscr{A}$. Si, $S, S' \in \mathscr{A}$, on a $S \cap S' \in \mathscr{A}$ et $S \setminus S' \in \mathscr{A}$; ces éléments de \mathscr{A} constituent une partition finie triviale. La condition supplémentaire est également trivialement vérifiée.

Nous allons maintenant définir des notions déjà rencontrées, mais cette fois-ci dans le cadre des semi-anneaux.

Définition 7.7.3. Soient X un ensemble quelconque et $\mathscr S$ un semi-anneau sur X. Une application $\mu:\mathscr S\to\mathbb C$ est finiment additive si pour tout $S\in\mathscr S$ et toute partition finie $(S_k)_{k=1}^n$ de S en éléments de $\mathscr S$, on a $\mu(S)=\sum_{k=1}^n\mu(S_k)$. Elle est dénombrablement additive si elle est finiment additive et si pour tout $S\in\mathscr S$ et toute partition dénombrable $(S_k)_k$ de S en éléments de $\mathscr S$, on a $\mu(S)=\sum_k\mu(S_k)$.

Puisque $\{\varnothing,\varnothing\}$ est une partition finie de \varnothing , toute application μ finiment additive vérifie $\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) = 0$.

Définition 7.7.4. Soient X un ensemble quelconque, $\mathscr S$ un semi-anneau sur X et μ une application de $\mathscr S$ dans $\mathbb C$. La variation de μ est l'application

$$|\mu|: \mathscr{S} \to \mathbb{R}^+ \quad S \mapsto \sup\{\sum_{k=1}^n |\mu(S_k)|: (S_k)_{k=1}^n \text{ partition finie de } S \text{ en éléments de } \mathscr{S}\}.$$

L'application μ est à variation finie sur S si $|\mu|(S)$ est fini ; elle est à variation finie si elle est à variation finie sur tout élément de \mathscr{S} .

Définition 7.7.5. Soient X un ensemble quelconque, $\mathscr S$ un semi-anneau sur X. Une mesure sur $(X,\mathscr S)$ est une application $\mu:\mathscr S\to\mathbb C$ dénombrablement additive et à variation finie.

Le résultat suivant fait un premier lien entre la notion de mesure que nous avons adoptée et les définitions présentées ici.

Théorème 7.7.6. Soit (X, \mathscr{A}) un espace mesurable. Toute mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) au sens de la définition 7.2.1 est une mesure sur (X, \mathscr{A}) au sens de la définition 7.7.5. Inversement, toute mesure sur (X, \mathscr{A}) au sens de la définition 7.7.5 est une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) au sens de la définition 7.2.1.

Démonstration. Soit μ une mesure complexe sur (X, \mathscr{A}) au sens de la définition 7.2.1. Par la proposition 7.7.2, l'application μ est définie sur le semi-anneau \mathscr{A} . Par définition, elle est finiment et dénombrablement additive, au sens de la définition 7.7.3. Enfin, elle est à variation finie, par la proposition 7.2.7.

Soit maintenant μ une mesure sur (X, \mathscr{A}) au sens de la définition 7.7.5. La partie réelle $\Re \mu$ et la partie imaginaire $\Im \mu$ de μ sont finiment additives au sens de la définition 7.7.3 et donc $\Re \mu(\varnothing) = \Im \mu(\varnothing) = 0$. Puisque, $\Re \mu$ et $\Im \mu$ sont dénombrablement additives au sens de la définition 7.7.3, il s'agit de mesures signées finies sur (X, \mathscr{A}) , ce qui suffit.

Si $\mathscr S$ est une σ -algèbre, l'hyptohèse concernant la variation finie imposée à une application μ pour être une mesure sur $(X,\mathscr S)$ n'est pas nécessaire. Cependant, une telle hypothèse est nécessaire pour un semi-anneau quelconque $\mathscr S$ sur X, car $\mathscr S$ peut ne pas être stable pour l'union des éléments des partitions dénombrables des éléments de $\mathscr S$.

Soit \mathscr{S} un semi-anneau sur un ensemble X. Une mesure μ sur (X,\mathscr{S}) à valeurs réelles peut être décomposée en la différence de deux mesures à valeurs positives comme suit : $\mu = \mu^+ - \mu^-$, où $\mu^+ = (|\mu| + \mu)/2$ et $\mu^- = (|\mu| - \mu)/2$. Si μ est une mesure sur (X,\mathscr{S}) , sa partie réelle $\Re \mu$ et sa partie imaginaire $\Im \mu$ sont des mesures à valeurs réelles et μ peut se décomposer de la manière suivante : $\mu = \mu_{1,1} - \mu_{1,2} + i\mu_{2,1} - i\mu_{2,2}$, où $\mu_{1,1} = (\Re \mu)^+$, $\mu_{1,2} = (\Re \mu)^-$, $\mu_{2,1} = (\Im \mu)^+$ et $\mu_{2,2} = (\Im \mu)^-$ sont des mesures sur (X,\mathscr{S}) à valeurs positives. Il est possible de développer une théorie analogue à celle développée ici pour les mesures définies sur une σ -algèbre. Chaque point de vue présente bien entendu des avantages et des inconvénients.

Chapitre 8

Mesures sur un espace localement compact

Dans ce chapitre nous allons principalement considérer des mesures et intégrales sur des espaces de Hausdorff localement compacts. Nous considérerons d'abord les mesures régulières. Le résultat le plus important de ce chapitre est certainement le théorème de représentation de Riesz.

8.1 Mesures régulières

Mesures régulières et propriétés dans l'espace euclidien

Définition 8.1.1. Une mesure de Borel est une mesure définie sur les boréliens et qui est finie sur tout compact.

Définition 8.1.2. Soit X un espace topologique et (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré; un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est

- intérieurement régulier si $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compact}\},\$
- extérieurement régulier si $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ ouvert}\}.$

La mesure μ est intérieurement régulère si tout ouvert de X est mesurable et intérieurement régulier. Elle est extérieurement régulère si tout ensemble μ -mesurable est extérieurement régulier. Enfin, une mesure de Borel qui est à la fois intérieurement et extérieurement régulière est qualifiée de régulière.

Bien entendu, si une mesure μ est intérieurement régulère, la σ -algèbre associée contient les boréliens.

Remarque 8.1.3. Une mesure régulière est parfois appelée quasi-régulière, le qualificatif régulier étant alors réservé pour les mesures de Borel telles que tout ensemble mesurable est à la fois intérieurement et extérieurement régulier.

Nous allons d'abord considérer le cas des mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$.

Lemme 8.1.4. Soit $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. Tout ensemble borélien $B \in \mathbb{R}^d$ vérifie $\mu(B) = \inf\{\mu(\Omega) : B \subset \Omega, \Omega \text{ ouvert}\}\ et \ \mu(B) = \sup\{\mu(C) : C \subset B, C \text{ fermé}\}.$

Démonstration. Soit \mathscr{C} la collection des ensembles boréliens de \mathbb{R}^d vérifiant la thèse. Montrons d'abord que \mathscr{C} contient tous les ensembles ouverts de \mathbb{R}^d . Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert; évidemment, $\mu(U) = \inf\{\mu(\Omega) : U \subset \Omega, \Omega \text{ ouvert}\}$. La Proposition 1.1.14 implique l'existence d'une suite $(C_k)_k$ d'ensembles fermés de \mathbb{R}^d tels que $U = \bigcup_k C_k$. Quitte à remplacer C_k par $\bigcup_{j=1}^k C_j$, on peut supposer que cette suite est croissante; la continuité des mesures implique $\mu(U) = \lim_k \mu(C_k)$ et donc $\mu(U) = \sup\{\mu(C) : C \subset U, C \text{ fermé}\}$.

Donnons une caractérisation des ensembles de $\mathscr C$. Soit $B \in \mathscr C$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert Ω et un ensemble fermé C tels que $C \subset B \subset \Omega$ et $\mu(\Omega) - \varepsilon/2 < \mu(B) < \mu(C) + \varepsilon/2$. De là, $\mu(\Omega \setminus C) < \varepsilon$. Inversement s'il existe un ensemble ouvert Ω et un ensemble fermé C tels que $C \subset B \subset \Omega$ et $\mu(\Omega \setminus C) < \varepsilon$ pour un ensemble borélien B, alors $\mu(C) \leqslant \mu(B) \leqslant \mu(\Omega) < \mu(C) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $B \in \mathscr C$.

Montrons que $\mathscr C$ est une σ -algèbre. Bien sûr, $\mathbb R^d$ étant ouvert, $\mathbb R^d \in \mathscr C$. Si $B \in \mathscr C$ et si $\varepsilon > 0$ est un nombre pour lequel il existe un ensemble ouvert Ω et un ensemble fermé C tels que $C \subset B \subset \Omega$ et $\mu(\Omega \setminus C) < \varepsilon$, Ω^c et C^c sont respectivement fermés et ouverts, vérifient $\Omega^c \subset B^c \subset C^c$ et $\mu(C^c \setminus \Omega^c) < \varepsilon$. De là, $B^c \in \mathscr C$. Soient enfin $(B_k)_k$ une suite de $\mathscr C$ et $\varepsilon > 0$. Pour chaque ε , soient ε et $\varepsilon < 0$ deux ensembles respectivement ouvert et fermé tels que $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon < 0$. Posons $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon < 0$ et

Puisque \mathscr{C} est une σ -algèbre sur \mathbb{R}^d contenant les ensembles ouverts et que \mathbb{B}^d est la plus petite σ -algèbre contenant les ensembles ouverts, on a $\mathbb{B}^d \subset \mathscr{C}$, ce qui démontre le lemme.

Proposition 8.1.5. Si $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d, \mu)$ est un espace mesuré où μ est une mesure finie, alors μ est une mesure régulière. De plus, tout sous-ensemble borélien B de \mathbb{R}^d vérifie $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compact}\}.$

Démonstration. Bien sûr, μ étant une mesure finie, $\mu(K)$ est fini pour tout ensemble compact K de \mathbb{R}^d . Le Lemme 8.1.4 implique directement que, pour tout ensemble $B \in \mathbb{B}^d$, $\mu(B) = \sup\{\mu(\Omega) : B \subset \Omega, \Omega \text{ ouvert}\}.$

Soient B un ensemble borélien de \mathbb{R}^d et $\varepsilon > 0$. Le Lemme 8.1.4 implique l'existence d'un ensemble fermé C tel que $\mu(B) < \mu(C) + \varepsilon$. Posons $C_k = C \cap B(0, \leq k)$; la suite $(C_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles compacts telle que $\bigcup_k C_k = C$. La continuité des mesures implique l'égalité $\mu(C) = \lim_k \mu(C_k)$. Dès lors, pour k assez grand, C_k est un ensemble compact tel que $\mu(B) < \mu(C_k) + \varepsilon$. Dès lors, $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compact}\}$. En particulier, la mesure μ est régulière.

Propriétés dans les espaces de Hausdorff

Lemme 8.1.6. Soit X un espace de Hausdorff pour lequel tout ensemble ouvert est un ensemble F_{σ} et μ une mesure borélienne finie sur X. Tout sous-ensemble borélien B de X vérifie $\mu(B) = \inf\{\mu(\Omega) : B \subset \Omega, \Omega \text{ ouvert}\}\ et \mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B, F \text{ fermé}\}.$

 $D\acute{e}monstration$. La démonstration est identique à celle du Lemme 8.1.4. Si un résultat analogue à la Proposition 1.1.14 n'existe pas nécessairement pour les espaces plus généraux, les hypothèses sont suffisantes.

Proposition 8.1.7. Soit X un espace de Hausdorff localement compact doté d'une base dénombrable. Si μ est une mesure borélienne sur X qui est finie sur tous les ensembles compacts, alors elle est régulière.

Démonstration. Soit Ω un ensemble ouvert de X; par la Proposition A.2.30, Ω peut s'écrire comme l'union d'une suite $(K_k)_k$ d'ensembles compacts de X. La continuité des mesures implique $\mu(\Omega) = \lim_N \mu(\bigcup_{k=1}^N K_k)$, ce qui montre que μ est une mesure régulière à l'intérieur.

Montrons que μ est une mesure régulière à l'extérieur. Soit $(\Omega_k)_k$ une suite d'ensembles ouverts telle que $X = \cup_k \Omega_k$ et $\mu(\Omega_k) < \infty \ \forall k$ (on peut par exemple prendre, dans une base dénombrable de X, les ensembles dont l'adhérence est un ensemble compact). Pour chaque k, soit μ_k la mesure borélienne sur X $\mu_k(A) = \mu(A \cap \Omega_k)$. Chaque mesure μ_k est finie et donc, par le Lemme 8.1.6 (les hypothèses sont vérifiées grâce à la Proposition A.2.30), régulière à l'extérieur. Dès lors, si $B \in \mathcal{B}(X)$ et si ε est un nombre strictement positif, pour chaque k, il existe un ensemble ouvert U_k contenant B tel que $\mu_k(U_k) < \mu_k(B) + \varepsilon/2^k$. On a donc $\mu((\Omega_k \cap U_k) \setminus B) < \varepsilon/2^k$. En posant $\Omega = \cup_k \Omega_k \cap U_k$, nous avons défini un ensemble ouvert contenant B tel que $\mu(\Omega \setminus B) \leqslant \sum_k \mu((\Omega_k \cap U_k) \setminus B) < \varepsilon$. Autrement dit, $\mu(\Omega) < \mu(B) + \varepsilon$, ce qui termine la démonstration.

Proposition 8.1.8. Si X est un espace de Hausdorff localement compact admettant une base dénombrable, alors toute mesure régulière sur X est σ -finie.

Démonstration. Par hypothèse, l'espace X est σ -compact. Autrement dit, $X = \bigcup_k K_k$ où $(K_k)_k$ est une suite d'ensembles compacts de X. La définition d'une mesure régulière entraı̂ne la thèse.

Le résultat suivant permet d'approximer de nombreux ensembles via les ensembles compacts.

Proposition 8.1.9. Soit (X, \mathscr{A}, μ) un espace mesuré où X est un espace de Hausdorff, \mathscr{A} une σ -algèbre sur X incluant $\mathscr{B}(X)$ et μ une mesure régulière sur \mathscr{A} . Si $A \in \mathscr{A}$ est σ -finie par μ alors

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subset A, K \ est \ compact \}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\mu(A) < \infty$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque μ est une mesure régulière, il existe un ensemble ouvert Ω comprenant A tel que $\mu(\Omega) < \mu(A) + \varepsilon/2$; il existe alors un ensemble compact K de Ω tel que $\mu(\Omega) < \mu(K) + \varepsilon/2$. Puisque $\mu(\Omega \setminus A) < \varepsilon/2$, il existe un ensemble ouvert U comprenant $\Omega \setminus A$ tel que $\mu(U) < \varepsilon/2$. L'ensemble $K \setminus U$ est lui un ensemble compact satisfaisant

$$\mu(K \setminus U) = \mu(K) - \mu(U \cap K) > \mu(\Omega) - \varepsilon \geqslant \mu(A) - \varepsilon$$

ce qui permet de conclure dans le cas fini, puisque $K \setminus U \subset A$.

Dans le cas σ -fini, supposons que $A = \bigcup_k A_k$, où $(A_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles de $\mathscr A$ tels que $\mu(A_k) < \infty \ \forall k$. Pour démontrer la thèse, il nous faut montrer que pour tout N > 0 tel que $\mu(A) > N$, il existe un sous-ensemble compact K de A tel que $\mu(K) > N$. Il existe M tel que $\mu(\bigcup_{k=1}^M A_k) > N$. Il suffit alors d'appliquer la première partie de la preuve à l'ensemble $\bigcup_{k=1}^M A_k$ pour trouver un compact $K \subset \bigcup_{k=1}^M A_k$ tel que $\mu(K) > N$.

8.2 Théorème de représentation de Riesz

Cette section explore la relation entre les mesures régulières sur un espace de Hausdorff localement compact X et les fonctionnelles linéaires définies sur l'espace des applications de X dans \mathbb{R} , continues et à support compact. Après avoir démontré le théorème de représentation de Riesz, nous l'appliquons à l'intégrale de Riemann pour redéfinir la mesure de Lebesgue.

Démonstration du théorème

La mesure sous-jacente à une fonctionnelle linéaire positive est obtenue en s'inspirant du Lemme 8.2.2.

Notation 8.2.1. Soit X un espace topologique. Nous noterons $C_c^0(X)$ l'ensemble des applications continues de X dans \mathbb{R} à support compact. Si Ω est un ensemble ouvert de X, nous noterons $f \prec \Omega$ si $f \in C_c^0(X)$ est une application vérifiant $0 \leqslant f \leqslant \chi_{\Omega}$ et $[f] \subset \Omega$.

Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Bien sûr, une application de $C_{\rm c}^0(X)$ est mesurable et donc intégrable par rapport à une mesure borélienne régulière sur X (une telle application est bornée et s'annule hors d'un ensemble compact, c'est-à-dire d'un ensemble de mesure finie). Ainsi, si μ est une mesure borélienne régulière sur X, l'application $f\mapsto \int f d\mu$ est une fonctionnelle linéaire sur $C_{\rm c}^0(X)$. Les questions naturelles qui se posent alors sont de savoir s'il existe plusieurs mesures boréliennes qui donnent lieu à une même fonctionnelle linéaire et quels sont les fonctionnelles linéaires qui peuvent être construites de cette façon.

Lemme 8.2.2. Soient X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure borélienne régulière sur X. Si Ω est un sous-ensemble ouvert de X, alors

$$\mu(\Omega) = \sup\{\int f d\mu : f \in C_{\mathrm{c}}^{0}(X), \ 0 \leqslant f \leqslant \chi_{\Omega}\} = \sup\{\int f d\mu : f \in C_{\mathrm{c}}^{0}(X), \ f \prec \Omega\}.$$

Démonstration. On a clairement $\mu(\Omega) \geqslant \sup\{\int f d\mu : f \in C_c^0(X), 0 \leqslant f \leqslant \chi_\Omega\} \geqslant \sup\{\int f d\mu : f \in C_c^0(X), f \prec \Omega\}$. Il reste donc à montrer que $\mu(\Omega) \leqslant \sup\{\int f d\mu : f \in C_c^0(X), f \prec \Omega\}$. Si $\mu(\Omega) = 0$, c'est évident. Sinon, soit α un nombre tel que $\alpha < \mu(\Omega)$; puisque la mesure μ est régulière, il existe un sous-ensemble compact K de Ω tel que $\alpha < \mu(K)$. Il existe alors (Proposition A.2.34) une application $f \in C_c^0(X)$ telle que $\chi_K \leqslant f$ et $f \prec \Omega$. On a donc $\alpha < \int f d\mu$ et ainsi $\alpha < \sup\{\int f d\mu : f \in C_c^0, f \prec \Omega\}$. Puisque α est un nombre arbitraire, le lemme est démontré.

Proposition 8.2.3. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Si μ, ν sont deux mesures boréliennes régulières sur X telles que $\int f d\mu = \int f d\nu$ pour tout $f \in C_c^0(X)$, alors $\mu = \nu$.

Démonstration. Le Lemme 8.2.2 implique $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ pour tout sous-ensemble ouvert Ω de X. La régularité extérieure des mesures implique alors $\mu(B) = \nu(B)$ pour tout sous-ensemble borélien B de X, ce qui termine la preuve.

Soit Λ une fonctionnelle linéaire sur $C_{\rm c}^0(X)$ positive, i.e. $\Lambda(f)$ est positif si $f \in C_{\rm c}^0(X)$ est positif. Définissons l'application μ_{Λ}^* sur les sous-ensembles ouverts Ω de X comme suit,

$$\mu_{\Lambda}^*(\Omega) = \sup\{\Lambda(f) : f \in C_c^0(X), f \prec \Omega\},\tag{8.1}$$

et étendons-là sur tous les sous-ensembles de X par

$$\mu_{\Lambda}^*(A) = \inf\{\mu_{\Lambda}^*(\Omega) : \Omega \text{ ouvert et } A \subset \Omega\}.$$
 (8.2)

Proposition 8.2.4. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. L'application μ_{Λ}^* définie par les égalités (8.1) et (8.2) est une mesure extérieure.

Démonstration. Bien sûr l'application μ_{Λ}^* est monotone et $\mu_{\Lambda}^*(\varnothing) = 0$. Démontrons la sous-additivité dénombrable de l'application. Soit $(\Omega_k)_k$ une suite de sous-ensembles ouverts de X. Soit $f \in C_c^0(X)$ une application telle que $f \prec \cup_k \Omega_k$. Par définition, [f] est un sous-ensemble compact de $\cup_k \Omega_k$; il existe donc N tel que $[f] \subset \cup_{k=1}^N \Omega_k$. On a alors $f = \sum_{k=1}^N f_k$, où les N applications $(f_k)_{k=1}^N$ appartiennent à $C_c^0(X)$ et vérifient $f_k \prec \Omega_k$ $\forall k$ (Proposition A.2.35). On a $\Lambda(f) = \sum_{k=1}^N \Lambda(f_k)$ et $\Lambda(f_k) \leqslant \mu_{\Lambda}^*(\Omega_k) \ \forall k$. Ainsi,

$$\Lambda(f) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \mu_{\Lambda}^{*}(\Omega_{k}) \leqslant \sum_{k} \mu_{\Lambda}^{*}(\Omega_{k}).$$

Dès lors, $\mu_{\Lambda}^*(\cup_k \Omega_k) \leqslant \sum_k \mu_{\Lambda}^*(\Omega_k)$.

Supposons maintenant que $(A_k)_k$ est une suite arbitraire de sous-ensembles de X. Si $\sum_k \mu_{\Lambda}^*(A_k) = \infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $\varepsilon > 0$ et, pour chaque k, soit Ω_k un ensemble ouvert comprenant A_k tel que $\mu_{\Lambda}^*(\Omega_k) < \mu_{\Lambda}^*(A_k) + \varepsilon/2^k$. Vu ce qui a été obtenu pour les ensembles ouverts, on a

$$\mu_{\Lambda}^*(\bigcup_k A_k) \leqslant \mu_{\Lambda}^*(\bigcup_k \Omega_k) \leqslant \sum_k \mu_{\Lambda}^*(\Omega_k) \leqslant \sum_k \mu_{\Lambda}^*(A_k) + \varepsilon.$$

Le nombre ε étant arbitraire, l'application est bien sous-additive et μ_{Λ}^* est une mesure extérieure.

Proposition 8.2.5. Soient X un espace de Hausdorff localement compact et μ_{Λ}^* l'application définie par les égalités (8.1) et (8.2). Les ensembles boréliens de X sont μ_{Λ}^* -mesurables.

Démonstration. Pour montrer que la collection des ensembles μ_{Λ}^* -mesurables contient $\mathcal{B}(X)$, il suffit de montrer que cette collection contient les ensembles ouverts de X. Soient Ω un sous-ensemble ouvert de X et A un sous-ensemble quelconque de X. Si $\mu_{\Lambda}^*(A) = \infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $\varepsilon > 0$; il existe un ensemble ouvert U comprenant A tel que $\mu_{\Lambda}^*(U) \leq \mu_{\Lambda}^*(A) + \varepsilon/2$. Il nous faut montrer que

$$\mu_{\Lambda}^*(U) \geqslant \mu_{\Lambda}^*(U \cap \Omega) + \mu_{\Lambda}^*(U \cap \Omega^c) - \varepsilon/2,$$

car alors $\mu_{\Lambda}^*(A) + \varepsilon \geqslant \mu_{\Lambda}^*(A \cap \Omega) + \mu_{\Lambda}^*(A \cap \Omega^c)$.

Soit $f \in C_c^0(X)$ une application satisfaisant $f \prec U \cap \Omega$ et $\mu_{\Lambda}^*(U \cap \Omega) \leqslant \Lambda(f) + \varepsilon/4$. L'ensemble $U \cap [f]^c$ est un ensemble ouvert comprenant $U \cap \Omega^c$. Il existe donc une application $g \in C_c^0(X)$ satisfaisant $g \prec U \cap [f]^c$, $\mu_{\Lambda}^*(U \cap [f]^c) \leqslant \Lambda(g) + \varepsilon/4$ et $\mu_{\Lambda}^*(U \cap \Omega^c) \leqslant \Lambda(g) + \varepsilon/4$. L'application f + g est telle que $f + g \prec U$ et vérifie donc $\Lambda(f + g) \leqslant \mu_{\Lambda}^*(U)$. Au total, on a

$$\mu_{\Lambda}^*(U) \geqslant \Lambda(f+g) \geqslant \mu_{\Lambda}^*(U \cap \Omega) + \mu_{\Lambda}^*(U \cap \Omega^c) - \varepsilon/2$$

ce qui devait être montré.

Lemme 8.2.6. Soient X un espace de Hausdorff localement compact, μ_{Λ}^* l'application définie par les égalités (8.1) et (8.2), A un sous-ensemble de X et f une application de $C_c^0(X)$. Si $f \geqslant \chi_A$, alors $\Lambda(f) \geqslant \mu_{\Lambda}^*(A)$; si $0 \leqslant f \leqslant \chi_A$ et si A est un ensemble compact 1 , alors $\Lambda(f) \leqslant \mu_{\Lambda}^*(A)$.

Démonstration. Supposons que $\chi_A \leqslant f$ et soit, si ε est un nombre tel que $0 < \varepsilon < 1$, $\Omega_{\varepsilon} = \{x \in X : f(x) > 1 - \varepsilon\}$. L'ensemble Ω_{ε} est un ensemble ouvert et toute application $g \in C_c^0(X)$ satisfaisant $g \leqslant \chi_{\Omega_{\varepsilon}}$ vérifie $g \leqslant f/(1 - \varepsilon)$. Par définition de μ_{Λ}^* , on a alors

$$\mu_{\Lambda}^*(\Omega_{\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\Lambda(f).$$

On a $A \subset \Omega_{\varepsilon}$ et puisque ε peut être choisi arbitrairement proche de 0, $\mu_{\Lambda}^{*}(A) \leqslant \Lambda(f)$. Supposons maintenant que $0 \leqslant f \leqslant \chi_{A}$ et que A est un ensemble compact. Soit Ω un ensemble ouvert comprenant A. On a $f \prec \Omega$ et, par définition de μ_{Λ}^{*} , $\Lambda(f) \leqslant \mu_{\Lambda}^{*}(\Omega)$. Puisque Ω est un ensemble ouvert comprenant A arbitraire, on a $\Lambda(f) \leqslant \mu_{\Lambda}^{*}(A)$.

Proposition 8.2.7. Soient X un espace de Hausdorff localement compact, μ_{Λ}^* l'application définie par les égalités (8.1) et (8.2), $\mu_{\Lambda,\mathscr{B}}$ la restriction de μ_{Λ}^* aux ensembles boréliens $\mathscr{B}(X)$ et μ_{Λ} la restriction de μ_{Λ}^* aux ensembles μ_{Λ}^* -mesurables. Ces deux mesures sont des mesures régulières et satisfont

$$\int f d\mu_{\Lambda,\mathscr{B}} = \int f d\mu_{\Lambda} = \Lambda(f),$$

pour tout $f \in C_c^0(X)$.

Démonstration. Nous avons déjà montré que la définition des mesures était licite. Puisque, pour tout sous-ensemble compact K de X, il existe une application $f \in C_c^0(X)$ telle que $\chi_K \leq f$ (Proposition A.2.34), le Lemme 8.2.6 implique que les mesures sont finies sur les ensembles compacts. Par définition (égalité 8.2), ce sont des mesures régulières à l'extérieur. De plus, par ce même Lemme 8.2.6,

$$\mu_{\Lambda}^*(\Omega) = \sup\{\Lambda(f): f \in C_{\mathrm{c}}^0(X), \ f \prec \Omega\} \leqslant \sup\{\mu_{\Lambda}^*([f]): f \in C_{\mathrm{c}}^0(X), \ f \prec \Omega\},$$

ce qui montre que les mesures sont régulières à l'intérieur.

Démontrons maintenant les égalités. Toute application de $C_c^0(X)$ étant la différence de deux applications positives de $C_c^0(X)$, il nous suffit de montrer que les égalités sont vraies pour les applications positives de $C_c^0(X)$. Soient donc f une telle application et $\varepsilon > 0$. Pour tout naturel non-nul k, soit f_k l'application

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \leqslant (k-1)\varepsilon \\ f(x) - (k-1)\varepsilon & \text{si } (k-1)\varepsilon < f(x) \leqslant k\varepsilon \\ \varepsilon & \text{si } k\varepsilon < f(x) \end{cases}$$

On a $f_k \in C^0_{\rm c}(X) \ \forall k, \ f = \sum_k f_k$ et il existe un entier N tel que $f_k = 0 \ \forall k > N$. Posons $K_0 = [f]$ et, pour tout naturel k non-nul, $K_k = \{x \in X : f(x) \geqslant k\varepsilon\}$. On a $\varepsilon \chi_{K_k} \leqslant f_k \leqslant \varepsilon \chi_{K_{k-1}}$ et donc $\varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k) \leqslant \int f_k \, d\mu_{\Lambda,\mathscr{B}} \leqslant \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_{k-1}) \ \forall k$. De plus, le Lemme 8.2.6 implique $\varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k) \leqslant \Lambda(f) \leqslant \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_{k-1}) \ \forall k$. De plus, puisque $f = \sum_k f_k$,

$$\sum_{k=1}^{N} \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k) \leqslant \Lambda(f) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k)$$

^{1.} L'hypothèse de compacité n'est en fait pas nécessaire.

et

$$\sum_{k=1}^{N} \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k) \leqslant \int f d\mu_{\Lambda,\mathscr{B}} \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k).$$

Ainsi, $\Lambda(f)$ et $\int f d\mu_{\Lambda,\mathscr{B}}$ se situent dans le même intervalle de longueur $\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k) - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}(K_k)$. Cette longueur vaut $\varepsilon \mu_{\Lambda,\mathscr{B}}([f])$ au plus et, ε étant arbitraire, on a $\Lambda(f) = \int f d\mu_{\Lambda,\mathscr{B}}$.

On a clairement $\int f d\mu_{\Lambda} = \int f d\mu_{\Lambda,\mathscr{B}}$, ce qui termine la preuve.

Nous pouvons maintenant formuler le théorème de Riesz.

Théorème 8.2.8 (Théorème de représentation de Riesz). Soient X un espace de Hausdorff localement compact et Λ une fonctionnelle linéaire positive sur $C_c^0(X)$. Il existe une mesure borélienne régulière unique μ_{Λ} sur X telle que

$$\Lambda(f) = \int f \, d\mu_{\Lambda}$$

pour tout $f \in C_c^0(X)$.

Démonstration. Nous avons montré que la mesure $\mu_{\Lambda,\mathscr{B}}$ obtenue en restreignant la mesure extérieure μ_{Λ}^* sur les ensembles boréliens de X convient.

Définition 8.2.9. La mesure borélienne régulière définie par le théorème de représentation de Riesz est appelée la mesure de représentation de Λ .

Définition de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d,\mathbb{B}^d)$ à partir de la mesure de Riemann

À titre d'application, introduisons la mesure de Lebesgue sur l'espace mesurable (\mathbb{R}, \mathbb{B}) à partir de l'intégrale de Riemann via le théorème de représentation de Riesz.

Si $f \in C_c^0([0,1])$, soit $\Lambda(f)$ l'intégrale de Riemann de f, donnée par la Définition 2.5.3. On vérifie de suite que Λ est une fonctionnelle linéaire positive sur $C_c^0([0,1])$. Soit μ la mesure de représentation sur $\mathscr{B}([0,1])$ de $\Lambda:\Lambda(f)=\int fd\mu, \ \forall f\in C_c^0([0,1])$. Pour tout $[a,b]\subset [0,1]$, soit

$$f_k(x) = k(x-a)\chi_{[a,a+1/k[}(x) + \chi_{[a+1/k,b-1/k]}(x) - k(x-b)\chi_{]b-1/k,b]}(x).$$

La suite $(f_k)_k$ est une suite croissante de $C_c^0([0,1])$ vers $\chi_{]a,b[}$. On a $\Lambda(f_k) = b - a - 1/k$ et donc, par le théorème de la convergence monotone, $\mu(]a,b[) = \lim_k \int f_k d\mu = b - a$. Qui plus est, $\mu(\{x\}) = \lim_k \mu(]x - 1/k, x + 1/k[) = 0$. On pose alors

$$\mathcal{L}_{\mathscr{B}}(A) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(]0,1] \cap (A-k)). \tag{8.3}$$

La mesure $\mathcal{L}_{\mathscr{B}}$ est une mesure sur (\mathbb{R},\mathbb{B}) telle que $\mathcal{L}_{\mathscr{B}}([a,b]) = b-a$. De fait, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_{\mathscr{B}}([a,b]) = b-a$. Si $[a,b] \subset]k, k+1]$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, c'est immédiat car un seul terme dans la somme (8.3) diffère de zéro. Sinon, en posant $k_1 = \max\{k : k \leq a\}$ et $k_2 = \max\{k : k \leq b\}$, l'intervalle [a,b] peut être décomposé en les intervalles $I_1 = [a,k_1+1]$, $I_{k-k_1+1} = [k,k+1]$ ($k_1 < k < k_2$) et $I_{k_2-k_1+1} = [k_2,b]$. De là,

$$\mathcal{L}_{\mathscr{B}}(]a,b]) = \sum_{k=1}^{k_2-k_1+1} \mathcal{L}_{\mathscr{B}}(I_k) = (k_1+1-a) + \sum_{k=2}^{k_2-k_1} 1 + (b-k_2) = b-a.$$

La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ est la mesure $\prod_{k=1}^d \mathcal{L}_{\mathscr{B}}$. Cette mesure est unique. Nous venons donc de redémontrer le résultat suivant.

Proposition 8.2.10. Il existe une seule mesure $\mathcal{L}_{\mathscr{B}}$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ telle que, pour tout rectangle $\prod_{k=1}^d [a_k, b_k]$ de \mathbb{R}^d , $\mathcal{L}_{\mathscr{B}}(\prod_{k=1}^d [a_k, b_k]) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k)$.

8.3 Régularité des mesures boréliennes signées finies et complexes

Dualité

Le résultat principal de cette section consacrée à la régularité des mesures boréliennes signées finies et complexes est un théorème de représentation du dual de certains espaces de Banach de fonctions continues.

Notation 8.3.1. Si X est un espace de Hausdorff localement compact, $C_0^0(X)$ (resp. $C_0^0(X,\mathbb{C})$) désignera l'ensemble des fonctions réelles (resp. complexes) s'annulant à l'infini. Nous considèrerons ces espaces équippés de la norme

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Ces espaces sont de Banach.

Remarque 8.3.2. Soit $(f_k)_k$ une suite de Cauchy de cet espace. Nous savons que cette suite converge uniformément vers une fonction continue f (on a $f = \lim_k f_k$). Il reste à montrer que f s'annule à l'infini. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit k tel que $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in X$. Soit alors K un compact de K tel que $|f_k(x)| < \varepsilon/2$ pour tout K0. Pour tout K1 que $|f_k(x)| < \varepsilon/2$ pour tout K2.

Rappelons que C_c^0 est un sous espace vectoriel dense de C_0^0 .

Remarque 8.3.3. De fait, si $f \in C_0^0(X)$ (resp. $f \in C_0^0(X, \mathbb{C})$), pour $\varepsilon > 0$, soit K un compact de X tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in K^c$. Nous savons qu'il existe une fonction g définie sur X à valeurs dans [0,1] telle que $g \in C_c^0(X)$ et g(x) = 1 pour tout $x \in K$. La fonction h = fg appartient à $C_c^0(X)$ (à $C_c^0(X, \mathbb{C})$) et satisfait $||f - h|| < \varepsilon$.

Définition 8.3.4. Si X est un espace de Hausdorff localement compact, une mesure signée finie ou complexe μ sur $(X, \mathcal{B}(X))$ est $r\acute{e}quli\grave{e}re$ si sa variation $|\mu|$ est régulière.

Cette propriété admet des formulations équivalentes.

Proposition 8.3.5. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure signée finie ou complexe borélienne; les conditions suivantes sont équivalentes :

- $-\mu$ est régulier,
- les mesures positives relatives à la décomposition de Jordan de μ sont régulières,
- μ est une combinaison linéaire de mesures positives régulières sur $\mathscr{B}(X)$.

Démonstration. Supposons que μ est régulier et soit ν une des mesures μ^+ ou μ^- ; on a $\nu \leqslant |\mu|$. Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ et pour $\varepsilon > 0$ donné, soit U un ouvert contenant A tel que $|\mu|(U) < |\mu|(A) + \varepsilon$. On a $\nu(U \setminus A) \leqslant |\mu|(U \setminus A) < \varepsilon$ et donc

$$\nu(U) = \nu(A) + \nu(U \setminus U) < \nu(A) + \varepsilon,$$

ce qui montre la régularité extérieure de μ ; la régularité intérieure se montre de même.

Bien sûr, si μ^+ et μ^- sont des mesures régulières, μ est combinaison linéaire de mesures positives régulières.

Enfin, supposons que μ est combinaison linéaire de mesures positives régulières. Supposons donc avoir $\mu = \sum_{k=1}^{k_0} c_k \mu_k$, où c_k est un coefficient et μ_k est une mesure positive régulière pour tout $k \in \{1, \ldots, k_0\}$. Soit $\nu = \sum_{k=1}^{k_0} |c_k| \mu_k$ On a $|\mu| \leqslant \nu$. Pour $A \in \mathcal{B}(X)$ et $\varepsilon > 0$, soit U un ouvert contenant A tel que $\nu(U) < \nu(A) + \varepsilon$. Dès lors, on a $|\mu|(U \setminus A) \leqslant \nu(U \setminus A) < \varepsilon$ et on peut conclure comme au premier point.

Lemme 8.3.6. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure signée finie ou complexe borélienne régulière. Pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K de A telle que $|\mu(A) - \mu(B)| < \varepsilon$ pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$ tel que $K \subset B \subset A$.

Démonstration. Pour A et ε de l'hypothèse, soit K un ensemble compact inclus dans A tel que $|\mu|(A) < |\mu|(K) + \varepsilon$; on a donc $|\mu|(A \setminus K) < \varepsilon$. Pour tout borélien B tel que $K \subset B \subset A$, on a alors

$$|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A \setminus B)| \le |\mu|(A \setminus B) \le |\mu|(A \setminus K) < \varepsilon,$$

comme annoncé. \Box

Lemme 8.3.7. Soit X un espace de Hausdorff localement compact; si Λ est une fonctionnelle linéaire continue sur $C_0^0(X)$, alors il existe deux fonctionnelles linéaires continues positives Λ^+ et Λ^- sur $C_0^0(X)$ telles que $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$.

Démonstration. Étant donné une fonction $f \ge 0$ de $C_0^0(X)$, posons

$$\Lambda^+(f) = \sup \{ \Lambda(g) : g \in C_0^0(X) \text{ et } 0 \leqslant g \leqslant f \}.$$

Pour toutes fonctions f et g de $C_0^0(X)$ telles que $0 \le g \le f$, on a

$$|\Lambda(g)| \leqslant ||\Lambda|| \, ||g|| \leqslant ||\Lambda|| \, ||f||,$$

ce qui montre que $\Lambda^+(f)$ est fini avec

$$\Lambda^+(f) \leqslant \|\Lambda\| \|f\|.$$

Montrons que Λ^+ est positive et linéaire pour les fonctions positives. Par définition, $\Lambda^+(f)\geqslant 0$ pour toute fonction positive de $C_0^0(X)$. De même, pour une telle fonction f et $c\geqslant 0$, la linéarité de Λ implique $\Lambda^+(cf)=c\Lambda^+(f)$. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions positives de $C_0^0(X)$, soit g_1 et g_2 deux éléments de cet espace tels que $0\leqslant g_1\leqslant f_1$ et $0\leqslant g_2\leqslant f_2$. Bien sûr, on a $0\leqslant g_1+g_2\leqslant f_1+f_2$ et donc

$$\Lambda(g_1) + \Lambda(g_2) = \Lambda(g_1 + g_2) \leqslant \Lambda^+(f_1 + f_2)$$

et donc

$$\Lambda^{+}(f_1) + \Lambda^{+}(f_2) \leqslant \Lambda^{+}(f_1 + f_2).$$

Soit maintenant g une fonction de $C_0^0(X)$ telle que $0 \le g \le f_1 + f_2$ et définissons

$$g_1 = \min(f_1, g)$$
 et $g_2 = g - g_1$.

Ces deux fonctions appartiennent à $C_0^0(X)$ et vérifient $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$. On a donc

$$\Lambda(g) = \Lambda(g_1) + \Lambda(g_2) \leqslant \Lambda^+(f_1) + \lambda^+(f_2),$$

ce qui implique

$$\Lambda^{+}(f_1 + f_2) \leqslant \Lambda^{+}(f_1) + \lambda^{+}(f_2).$$

Étant donné une fonction f de $C_0^0(X)$, on pose maintenant

$$\Lambda^{+}(f) = \Lambda^{+}(f^{+}) - \Lambda^{+}(f^{-}).$$

De la même manière que nous avons prouvé que l'intégrale est linéaire, on peut montrer que Λ^+ défini sur $C_0^0(X)$ est linéaire (voir proposition 2.3.11). Il est clair que Λ^+ est encore positif. De plus, on a

$$|\Lambda^+(f)| \leq \Lambda^+(f^+) + \Lambda^+(f^-) = \Lambda^+(|f|) \leq ||\Lambda|| ||f||,$$

ce qui montre la continuité de Λ^+ . Nous venons donc de montrer que Λ^+ est une fonctionnelle linéaire continue positive sur $C_0^0(X)$.

Soit maintenant Λ^- l'application définie sur $C_0^0(X)$ par $\Lambda^- = \Lambda^+ - \Lambda$. Il est évident que cette fonctionnelle est linéaire et continue. Si $f \in C_0^0(X)$ est positif, alors $\Lambda^+(f) = \Lambda(f)$ et donc on a $\Lambda \leqslant \Lambda^+$ sur $C_0^0(X)$. Il en résulte que Λ^- est positif; nous avons ainsi obtenu la décomposition annoncée.

Rappelons que si (X, \mathscr{A}) est un espace mesurable et si f est une fonction \mathscr{A} -mesurable bornée sur X, alors, si μ est une mesure signée finie sur (X, \mathscr{A}) , l'intégrale de f par rapport à μ est définie par

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^-,$$

où μ^+ et μ^- sont des mesures réalisant la décomposition de Jordan de μ : $\mu = \mu^+ - \mu^-$. De la même manière, si μ est une mesure complexe de décomposition de Jordan $\mu = \mu_{1,1} - \mu_{1,2} + i\mu_{2,1} - i\mu_{2,2}$, alors

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu_{1,1} - \int f \, d\mu_{1,2} + i \int f \, d\mu_{2,1} - i \int f \, d\mu_{2,2}.$$

Notation 8.3.8. Étant donné un espace de Hausdorff localement compact X, nous noterons $M(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures boréliennes signées sur X et $M(X,\mathbb{C})$ l'ensemble des mesures boréliennes complexes sur X. On a donc $M(X,\mathbb{R}) = M(X,\mathcal{B}(X),\mathbb{R})$ et $M(X,\mathbb{C}) = M(X,\mathcal{B}(X),\mathbb{C})$. L'espace M(X) représente indifféremment $M(X,\mathbb{R})$ ou $M(X,\mathbb{C})$.

Notation 8.3.9. Étant donné un espace de Hausdorff localemet compact X, nous noterons $M_r(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures boréliennes signées régulières sur X et $M_r(X,\mathbb{C})$ l'ensemble des mesures boréliennes complexes régulières sur X. L'espace $M_r(X)$ représente indifféremment $M_r(X,\mathbb{R})$ ou $M_r(X,\mathbb{C})$.

Bien sûr $M_r(X)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel M(X).

Proposition 8.3.10. Les espaces $M_r(X,\mathbb{R})$ et $M_r(X,\mathbb{C})$ sont fermés dans $M(X,\mathbb{R})$ et $M(X,\mathbb{C})$ respectivement.

Démonstration. De fait, si $(\mu_k)_k$ est une suite de $M_r(X)$ qui converge vers μ dans $M_r(X)$, pour tout borélien A de X et tout $\varepsilon > 0$, soit k un indice tel que $\|\mu_k - \mu\| < \varepsilon/2$ et U un ouvert contenant A tel que $\|\mu_k\|(U \setminus A) < \varepsilon/2$. On obtient directement

$$|\mu|(U \setminus A) \leq ||\mu - \mu_k|| + |\mu_k|(U \setminus A) < \varepsilon,$$

ce qui montre que μ est régulier.

Corollaire 8.3.11. Les espaces $M_r(X,\mathbb{R})$ et $M_r(X,\mathbb{C})$ sont de Banach pour la norme variation totale.

 $D\acute{e}monstration$. Cela résulte de la propositions précédentes et de la proposition 7.2.10. \square

Théorème 8.3.12. Soit X un espace de Hausdorff localement compact; l'application qui à $\mu \in M_r(X, \mathbb{R})$ associe la fonctionnelle

$$C_0^0(X) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto \int f \, d\mu$$
 (8.4)

est un isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach $M_r(X)$ et le dual $C_0^0(X)^*$ de l'espace de Banach $C_0^0(X)$. De même, l'application qui à $\mu \in M_r(X,\mathbb{C})$ associe la fonctionnelle $f \mapsto \int f d\mu$ est un isomorphisme isométrique entre $M_r(X,\mathbb{C})$ et le dual de $C_0^0(X,\mathbb{C})$.

 $D\acute{e}monstration$. Soit Φ_r la fonctionnelle définie par (8.4). Par définition, Φ_r est une fonctionnelle linéaire sur $C_0^0(X)$ telle que

$$|\Phi_{\mu}(f)| \leqslant ||f|| \, ||\mu||,$$

pour tout f et tout μ , ce qui implique que Φ_{μ} est continu et que sa norme vérifie $\|\Phi_{\mu}\| \leq \|\mu\|$. De plus, l'application $\Phi : \mu \mapsto \Phi_{\mu}$ est une application linéaire de $M_r(X,\mu)$ dans le dual de $C_0^0(X)$. On a bien entendu des résultats identiques pour les mesures complexes et les fonctions à valeurs complexes.

Montrons que l'application Φ préserve la norme en montrant que $\|\Phi_{\mu}\| \geqslant \|\mu\|$ pour tout μ . Soit donc $\mu \in M_r(X)$ et $\varepsilon > 0$; nous pouvons supposer avoir $\|\mu\| \neq 0$. Par définition de $\|\mu\|$, il existe une partition finir de X en ensembles boréliens A_k , $k \in \{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ tels que $\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| > \|\mu\| - \varepsilon/2$. Par le lemme 8.3.6, il existe des compacts K_1, \ldots, K_n tels que $K_k \subset A_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et

$$\|\mu\| - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} |\mu(K_k)| \le \sum_{k=1}^{n} |\mu|(K_k).$$

On peut bien entendu supposer avoir $\mu(K_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Soit alors f une fonction continue à support compact telle que $||f|| \leq 1$ et ²

$$f(x) = \frac{\overline{\mu(K_k)}}{|\mu(K_k)|},$$

pour tout k et tout $x \in K_k$. Posons $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$; on a

$$\int_{K} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} |\mu(K_k)| > ||\mu|| - \varepsilon/2$$

^{2.} L'existence résulte de la Proposition A.2.36.

et

$$|\int_{K^c} f \, d\mu| \leqslant |\mu|(K^c) < \varepsilon/2.$$

Par conséquent, on a

$$|\int f \, d\mu| > \|\mu\| - \varepsilon,$$

ce qui implique $|\int f d\mu| \ge ||\mu||$ et donc $||\Phi_{\mu}|| \ge ||\mu||$.

Montrons la surjectivité de Φ . Commençons par le cas réel; si Λ est une fonctionnelle linéaire sur $C_0^0(X)$ positive (i.e. telle que $\Lambda(f) \geqslant f$ pour tout $f \in C_0^0(X)$), sa restriction à $C_c^0(X)$ est également positive et, vu le théorème de Riesz, il existe une mesure borélienne régulière μ sur X telle que $\Lambda(f) = \int f d\mu$ pour tout $f \in C_c^0(X)$. Vu le lemme 8.2.2, on a

$$\mu(X) = \sup\{\Lambda(f): f \in C^0_{\mathrm{c}}(X) \text{ et } 0 \leqslant f \leqslant 1\}$$

et donc $\mu(X) \leqslant \|\Lambda\|$. En particulier, μ est fini. Ainsi, nous avons montré que toute fonctionnelle linéaire continue positive Λ sur $C_{\rm c}^0(X)$ est de la forme Φ_{μ} . Par continuité $(\Phi_{\mu}$ et Λ sont continus), c'est encore vrai sur $C_0^0(X)$, puisque $C_{\rm c}^0(X)$ est dense dans $C_0^0(X)$. Par le lemme 8.3.7, $\Phi: M_r(X,\mathbb{R}) \to C_0^0(X)^*$ est surjectif. Considérons enfin le cas complexe. Si Λ appartient à $C_0^0(X,\mathbb{C})^*$, alors il existe $\Lambda_1, \Lambda_2 \in C_0^0(X)^*$ tels que $\Lambda(f) = \Lambda_1(f) + i\Lambda_2(f)$, pour tout $f \in C_0^0(X)$ (considéré comme un sous espace de $C_0^0(X,\mathbb{C})$). Si μ_1 et μ_2 sont les mesures signées finies boréliennes régulières associées à Λ_1 et Λ_2 respectivement, alors $\mu_1 + i\mu_2$ est une mesure complexe borélienne régulière représentant Λ .

Densité er régularité

On considère ici les mesures ν sur $(X, \mathcal{B}(X))$ définies par densité, i.e. telles que $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, où μ est une mesure positive borélienne régulière sur X et f est une fonction μ -intégrable. Nous allons montrer que la régularité de μ implique la régularité de ν et caractériser ν via une version du théorème de Radon-Nikodym (sans hypothèse de σ -finitude).

Proposition 8.3.13. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure borélienne régulière sur X. Étant donné $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, la mesure signée finie ou complexe ν sur $(X, \mathcal{B}(X))$ définie par $\nu : A \mapsto \int_A f d\mu$ est également régulière.

Démonstration. Étant donné $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, soit ν_f la mesure signée finie ou complexe sur $(X, \mathcal{B}(X))$ telle que $\nu_f(A) = \int_A f d\mu$. Supposons d'abord avoir $f = \chi_B$, où B est un borélien de mesure μ finie. Dans ce cas, l'application ν_f est positive et $\nu_f(A) = \mu(A \cap B)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$. Vu la proposition 8.1.9 (appliquée à à μ et $A \cap B$), on a

$$\begin{split} \nu_f(A) &= \sup\{\mu(K): \ K \subset A \cap B, \ K \text{ compact}\}\\ &= \sup\{\mu(K \cap B): \ K \subset A \cap B, \ K \text{ compact}\}\\ &= \sup\{\nu_f(K): \ K \subset A \cap B, \ K \text{ compact}\}\\ &\leqslant \sup\{\nu_f(K): \ K \subset A, \ K \text{ compact}\} \leqslant \nu_f(A). \end{split}$$

Ces relations montre que ν_f est régulier à l'intérieur.

Pour $A \in \mathcal{B}(X)$, on a

$$\nu_f(A^c) = \sup \{ \nu_f(K) : K \subset A^c, K \text{ compact} \}$$

et donc

$$\nu_f(A) \leqslant \inf\{\nu_f(U): A \subset U, U \text{ ouvert}\}\$$

$$= \nu_f(X) - \sup\{\nu_f(U^c): U^c \subset A^c, U \text{ ouvert}\}\$$

$$\leqslant \nu_f(X) - \sup\{\nu_f(K): K \subset A^c, K \text{ compact}\}\$$

$$= \nu_f(X) - \nu_f(A^c) = \nu_f(A).$$

Ces relations prouve la régularité de ν_f dans le cas particulier $f = \chi_B$.

Par linéarité ν_f est régulier si f est une fonction simple μ -intégrable. Par le théorème de la convergence monotone, la mesure est encore régulière si f est une fonction intégrable positive. Le cas général s'obtient en remarquant que $|\nu_f|(A) = \int_A |f| d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ (proposition 7.3.10).

Proposition 8.3.14. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure borélienne régulière sur X. Étant donné une mesure signée finie ou complexe borélienne régulière ν sur X, les conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ telle que $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$,
- $-\nu$ est absolument continu par rapport à μ ,
- pour tout ensemble compact K de X tel que $\mu(K) = 0$, on a $\nu(K) = 0$.

Démonstration. Nous savons déjà que la première condition implique la seconde. Il est également évident que la deuxième condition implique la troisième.

Montrons que la troisième condition implique la deuxième. Si A est u borélien de X, par le lemme 8.3.6, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_{ε} inclus dans A tel que $|\nu(A) - \nu(K_{\varepsilon})| < \varepsilon$. Par conséquent, en supposant la troisième condition est vérifiée, si $\mu(A) = 0$, on a également $\mu(K) = 0$ pour tout compact K de A et donc $\nu(K) = 0$. On obtient ainsi $\nu(A) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui suffit.

Montrons que la seconde condition implique la première ³. Par régularité, il existe une suite $(K_k)_k$ d'ensembles compacts tels que $\lim_k |\nu|(K_k) = |\nu|(X)$. Puisque μ est également réguier, $\mu(K_k)$ est également fini pour tout indice k; soit alors μ_0 la mesure définie par

$$\mu_0(A) = \mu(A \cap (\cup_k K_k)),$$

pour tout borélien A. Cette mesure est σ -finie. Puisque ν est absolument continu par rapport à μ , l'égalité

$$|\nu|(X\setminus \cup_k K_k)=0$$

implique que ν est absolument continu par rapport à μ_0 . Le théorème de Radon-Nikodym implique alors l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu_0)$ telle que $\nu(A) = \int_A f \, d\mu_0$ pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$. Soit alors $g = f\chi_{\cup_k K_k}$; cette fonction est égale à f μ_0 -presque partout. Pour tout borélien A, on a alors

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu_0 = \int_A g \, d\mu_0 = \int_A g \, d\mu,$$

ce qui termine la démonstration.

^{3.} On ne peut diretement appliquer le théorème de Radon-Nikodym car nous n'avons pas supposé μ σ -fini.

Proposition 8.3.15. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure borélienne régulière sur X. Étant donné $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, soit ν_f la mesure signée finie ou complexe sur $(X, \mathcal{B}(X))$ définie par

$$\nu_f(A) = \int_A f \, d\mu.$$

L'application $f \mapsto \nu_f$ est une isométrie de $L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ sur le sous-espace de $M_r(X)$ constitué des mesures absolument continues par rapport à μ .

Démonstration. Vu la proposition 7.3.10, on a

$$|\nu_f|(A) = \int_A |f| \, d\mu,$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$, donc

$$\|\nu_f\| = \int |f| \, d\mu.$$

Vu la proposition 8.3.13, ν_f et $|\nu_f|$ sont réguliers. On peut conclure grâce à la proposition 8.3.14

8.4 Complément sur les mesures régulières

Mesurabilité et continuité

Proposition 8.4.1. Soit X un espace de Hausdorff localement compact, \mathscr{A} une σ -algèbre sur X contenant $\mathscr{B}(X)$ et μ une mesure régulière sur \mathscr{A} . L'union de tous les sous-ensembles ouverts de X de mesure nulle pour μ est encore un ensemble de mesure nulle pour μ .

 $D\acute{e}monstration$. Soit \mathscr{C} la collection des ensembles ouverts de X de mesure nulle pour μ et $U = \bigcup_{\Omega \in \mathscr{C}} \Omega$. Puisque U est ouvert, il appartient à \mathscr{A} . Si K est un compact inclus dans U, on peut extraire un recouvrement fini de K par des éléments de \mathscr{C} . Soit donc U_1, \ldots, U_n des ouverts de \mathscr{C} tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k \ (n \in \mathbb{N}_0)$. On a

$$\mu(K) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(U_k) = 0,$$

ce qui montre que $\mu(U)$ est nul, vu la régularité intérieure de la mesure.

Définition 8.4.2. Si (X, \mathscr{A}, μ) est un espace mesuré où X un espace de Hausdorff localement compact, \mathscr{A} contient $\mathscr{B}(X)$ et μ est régulier, soit U l'union de tous les sous-ensembles ouverts de X de mesure nulle pour μ . Il s'agit du plus grand ensemble ouvert de mesure nulle. Le support de μ , noté supp (μ) , est l'ensemble supp $(\mu) = U^c$.

Bien sûr, $\operatorname{supp}(\mu)$ est le plus petit ensemble fermé dont le complémentaire est de mesure nulle. On obtient directement que x appartient à $\operatorname{supp}(\mu)$ si et seulement si tout voisinage ouvert de x est de mesure positive.

Définition 8.4.3. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et \mathscr{A} une σ -algèbre contenant $\mathscr{B}(X)$. Si μ est une mesure signée finie ou complexe définie sur \mathscr{A} , son support, également noté supp (μ) , est le support de sa variation : supp (μ) = supp $(|\mu|)$.

Exemples 8.4.4. On vérifie directement que le support de la mesure de Lebesgue est \mathbb{R} . Si δ_x est la mesure de Dirac en $x \in \mathbb{R}$, supp $(\delta_x) = \{x\}$.

Donnons maintenant deux résultats permettant d'approximer les fonctions mesurables par des fonctions continues. Le premier est une généralisation de la proposition 5.5.11.

Proposition 8.4.5. Soit X un espace de Hausdorff localement compact, \mathscr{A} une σ -algèbre sur X contenant $\mathscr{B}(X)$ et μ une mesure régulière sur (X,\mathscr{A}) . Pour $p \in [1,\infty[$, $C_c^0(X)$ est une partie dense de $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{R})$ et définit donc une partie dense de $L^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{R})$.

Démonstration. On a bien sûr $C^0_{\rm c}(X) \subset \mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{R})$. Par la proposition 5.3.3, nous savons que l'ensemble des fonctions simples de $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{R})$ est dense dans cet espace. Il nous suffit donc de montrer que pour tout $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in C^0_{\rm c}(X)$ telle que $\|\chi_A - f\|_p < \varepsilon$.

Par la régularité extérieure de μ , il existe un ouvert U contenant A tel que $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon^p/2$. Vu la proposition 8.1.9, il existe un compact K inclus dans A tel que $\mu(K) > \mu(A) - \varepsilon^p/2$. Soit alors f une fonction de $C_{\rm c}^0(X)$ telle que $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_U$. On a $|\chi_A - f| \leqslant \chi_U - \chi_K$ et donc

$$\|\chi_A - f\|_p \leqslant \|\chi_U - \chi_K\|_p = \mu(U \setminus K)^{1/p} < \varepsilon,$$

ce qui suffit. \Box

Théorème 8.4.6 (Théorème de Lusin). Soit X un espace de Hausdorff localement compact, \mathscr{A} une σ -algèbre sur X contenant $\mathscr{B}(X)$, μ une mesure régulière sur (X,\mathscr{A}) et $A \in \mathscr{A}$ un ensemble de mesure finie pour μ . Si $f:A \to \mathbb{R}$ est une fonction \mathscr{A} -mesurable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K inclus dans A tel que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ et $f|_K$ est continu. De plus, il existe une fonction $g \in C^0_c(X)$ égale à f sur K; si A est non vide et f est borné sur A, g peut être choisi tel que

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} \leqslant \sup\{|f(x)| : x \in A\}. \tag{8.5}$$

Démonstration. Supposons d'abord que f est à valeurs dénombrables, $f(A) = \{a_1, \ldots\}$, et posons $A_k = f^{-1}(a_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Soit alors $S_k = \bigcup_{j=1}^k A_j$. Par continuité, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu(A \setminus S_n) = \mu(A \setminus (\cup_{k=1}^n A_k)) < \varepsilon/2.$$

La proposition 8.1.9 affirme l'existence de n compacts K_1, \ldots, K_n tels que $K_k \subset A_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $\sum_{k=1}^n \mu(A_k \setminus K_k) < \varepsilon/2$. Soit alors $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$; il s'agit d'un compact inclus dans A. On a

$$\mu(A \setminus K) = \mu(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus K_k) < \varepsilon.$$

Puisque f est constant sur chacun des K_k ($k \in \{1, ..., n\}$), l'image inverse de tout fermé par f intersecté avec K est fermée. Il en résulte que f restreint à K est continu.

Passons au cas général. La fonction f est limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_k)_k$ \mathscr{A} -mesurables et dont les images sont dénombrables (on peut par exemple poser $f_k(x) = j/k$ lorsque $j/k \leq f(x) < (j+1)/k$, avec $j \in \mathbb{Z}$). Vu ce que nous avons obtenu jusqu'ici, pour chaque indice k, il existe un compact K_k de A tel que $\mu(A \setminus K_k) < \varepsilon/2^k$

pour lequel la restriction de f_k à K_k est continue. Soit $K = \bigcap_k K_k$; il s'agit d'un compact inclus dans A tel que

$$\mu(A \setminus K) \leqslant \sum_{k} \mu(A \setminus K_k) < \sum_{k} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Puisque f est limite uniforme de fonctions continues sur K, f est lui-même continu sur K.

Construisons la fonction g de l'énoncé. Le compactifié d'Alexandrov \tilde{X} de X étant normal, le théorème de prolongement de Tietze (voir Théorème A.2.18) fournit une fonction continue $\tilde{h}: \tilde{X} \to \mathbb{R}$ égale à f sur K. Soit φ une fonction de $C_c^0(X)$ telle que $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in K$, h la restriction de \tilde{h} à X et posons $g = h\varphi$. Bien sûr g appartient à $C_c^0(X)$ et est égal à f sur K.

Pour faire en sorte que g vérifie (8.5), soit $s = \sup\{|f(x): x \in A\}$ et définissons ψ comme suit :

$$\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \begin{cases} -s & \text{si } t < -s \\ t & \text{si } -s \leqslant t \leqslant s \\ s & \text{si } t > s \end{cases}$$
 (8.6)

La fonction $\psi \circ g$ convient.

Remarque 8.4.7. La proposition 8.4.5 et le théorème de Lusin s'appliquent aux fonctions f à valeurs complexes. Il suffit de décomposer f en ses parties réelle et imaginaire, à l'exception de construction de la fonction g vérifiant (8.5). La démarche est la même mais, il faut remplacer ψ dans (8.6) par

$$\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} t & \mathrm{si} \ |t| \leqslant s \\ st/|t| & \mathrm{si} \ |t| > s \end{array} \right.,$$

pour conclure de la même manière.

Exemple 8.4.8. Considérons la fonction de Dirichlet sur [0, 1]:

$$f: [0,1] \to \{0,1\} \quad x \mapsto \chi_{\mathbb{O}}.$$

Cette fonction est Borel-mesurable et égale à 0 presque partout pour la mesure de Lebesgue, mais continue nulle part. Soit $(r_k)_k$ une suite des nombres rationnels de [0,1], $\{r_k: k \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et pour $\varepsilon > 0$, soit $U_k = |r_k - 2^{-2-k}, r_k + 2^{-2-k}[$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. L'ensemble $U = \bigcup_k U_k$ est un ouvert de [0,1] et $K = [0,1] \setminus U$ est un compact de [0,1] tel que $\mathcal{L}(K) < \varepsilon$. Qui plus est, $f|_K$ est nul donc continu.

Semi-continuité inférieure

Définition 8.4.9. Une collection \mathscr{C} d'applications définies sur un ensemble X et à valeurs dans \mathbb{R} est filtrant si pour pour tous $f_1, f_2 \in \mathscr{C}$, il existe $f \in \mathscr{C}$ tel que $f_1 \leqslant f$ et $f_2 \leqslant f$.

Proposition 8.4.10. Soit X un espace de Hausdorff localement compact, $\mathscr A$ une σ -algèbre sur X contenant $\mathscr B(X)$ et μ une mesure régulière sur $(X,\mathscr A)$. Si $f:X\to [0,\infty]$ est une application semi-continue inférieurement pour laquelle il existe une collection filtrante $\mathscr C$ d'applications positives semi-continues inférieurement telle que

$$f(x) = \sup\{g(x) : g \in \mathscr{C}\},\$$

pour tout x, alors

$$\int f \, d\mu = \sup \{ \int g \, d\mu : g \in \mathscr{C} \}.$$

Démonstration. On a bien sûr $\int g d\mu \leq \int f d\mu$ pour tout $g \in \mathcal{C}$; il reste donc à montrer que pour tout c tel que $\int f d\mu > c$, il existe $g \in \mathcal{C}$ tel que $\int g d\mu > c$. Soit donc un nombre c tel que $\int f d\mu > c$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ et tout $j \in \{1, \ldots, k2^k\}$, soit $U_{k,j}$ l'ouvert

$$U_{k,j} = \{x \in X : f(x) > \frac{j}{2^k}\}$$

et définissons la fonction f_k comme suit,

$$f_k: X \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^{k2^k} \chi_{U_{k,j}}(x).$$

Ces fonctions sont Borel-mesurables et on vérifie directement que

- $-f_k(x) = 0 \text{ si } f(x) = 0,$
- $f_k(x) = j/2^k \text{ si } 0 < f(x) < k \text{ et } j \text{ est le naturel pour lequel } j/2^k < f(x) \leqslant (j+1)/2^k,$
- $-f_k(x) = k \text{ si } f(x) > k.$

En conséquence, $(f_k)_k$ est une suite croissante de fonctions semi-continues inférieurement qui converge vers f. Par le théorème de la convergence monotone, on a

$$\int f \, d\mu = \lim_{k} \int f_k \, d\mu.$$

Soit k_0 un indice tel que $\int f_{k_0} d\mu > c$.

Puisque

$$\int f_{k_0} d\mu = \frac{1}{2^{k_0}} \sum_{i=1}^{k_0 2^{k_0}} \mu(U_{k_0,j}),$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, k_0 2^{k_0}\}$, soit K_j un compact inclus dans $U_{k_0,j}$ tel que

$$\frac{1}{2^{k_0}} \sum_{j=1}^{k_0 2^{k_0}} \mu(K_j) > c.$$

Définissons explicitement la fonction g par

$$g = \frac{1}{2^{k_0}} \sum_{j=1}^{k_0 2^{k_0}} \chi_{K_j}$$

et posons $K = \bigcup_{j=1}^{k_0 2^{k_0}} K_j$.

On remarque directement que si x est tel que f(x) > 0, alors $g(x) \leq f_{k_0}(x) < f(x)$; c'est en particulier le cas si x appartient à K. Vu la définition de f, pour tout $x \in K$, il existe $g_x \in \mathscr{C}$ tel que $f_{k_0}(x) < g_x(x)$. Puisque g_x et g sont semi-continus inférieurement, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $g(t) < g_x(t)$ pour tout $t \in U_x$. Puisque les U_x avec $x \in X$ définissent un recouvrement ouvert du compact K, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ et

 $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$. Cela étant, puisque $\mathscr C$ est filtrant, il existe $g_0 \in \mathscr C$ tel que $g_0 \geqslant g_{x_k}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Cette fonction g_0 vérifie $g_0 \geqslant g$ et donc

$$c < \frac{1}{2^{k_0}} \sum_{j=1}^{k_0 2^{k_0}} \mu(K_j) = \int g \, d\mu \leqslant \int g_0 \, d\mu.$$

La fonction g_0 est donc la fonction recherchée.

8.5 Dual de L^1

Préliminaires

Si μ^* est une mesure extérieure, nous noterons naturellement μ sa restriction aux ensembles μ^* -mesurables.

Proposition 8.5.1. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ^* une mesure extérieure sur X telle que les ensembles boréliens sont μ^* -mesurables et μ est une mesure régulière. Si A est une partie de X, les conditions suivantes sont équivalentes :

- A est μ^* -mesurable,
- $A \cap U$ est μ^* -mesurable pour tout ouvert U tel que $\mu(U)$ est fini,
- $A \cap K$ est μ^* -mesurable pour tout compact K.

Démonstration. La première condition implique trivialement les deux autres.

Supposons que la seconde condition est vérifiée. Soit B une partie de X telle que $\mu^*(B) < \infty$. Soit U un ouvert contenant B tel que $\mu(U) < \infty$; nous savons que $A \cap U$ est mesurable et donc

$$\mu^*(U) = \mu^*(U \cap A) + \mu^*(U \cap A^c) \geqslant \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

Puisque, pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir U tel que $\mu(U) < \mu^*(A) + \varepsilon$, on a

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \leqslant \mu^*(A),$$

ce qui montre que A est μ^* -mesurable.

Montrons que la troisième condition implique la deuxième. Soit U un ouvert de X tel que $\mu(U) < \infty$ et $(K_k)_k$ une suite de compacts inclus dans U tels que $\lim_k \mu(K_k) = \mu(U)$. On sait que $A \cap K_k$ est μ^* -mesurable pour tout indice k. De plus, puisque $A \cap (U \setminus \bigcup_k K_k)$ est inclus dans $U \setminus \bigcup_k K_k$ avec $\mu^*(U \setminus \bigcup_k K_k) = 0$, $A \cap (U \setminus \bigcup_k K_k)$ est de mesure extérieure nulle et est donc mesurable. Enfin, comme

$$A \cap U = (A \cap (U \setminus \bigcup_k K_k)) \cup (A \cap \bigcup_k K_k) = (A \cap (U \setminus \bigcup_k K_k)) \cup (\bigcup_k (A \cap K_k)),$$

l'ensemble $A \cap U$ est μ^* -mesurable.

Lemme 8.5.2. Soit X un espace de Hausdorff localement compact, $\mathscr A$ une σ -algèbre contenant $\mathscr B(X)$ et μ une mesure régulière sur $(X,\mathscr A)$. Si K est un compact de X tel que $\mu(K) > 0$, alors il existe un compact K_0 inclus dans K vérifiant $\mu(K_0) = \mu(K)$ et tel que tout ouvert U de X intersectant K_0 vérifie $\mu(U \cap K_0) > 0$.

8.5. DUAL DE L^1 241

Démonstration. Soit \mathscr{C} la collection des ouverts V de X tels que $\mu(K \cap V) = 0$ et posons $U = \bigcup_{V \in \mathscr{C}} V$. Si C est un ensemble compact inclus dans $U \cap K$, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ et $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{C}$ tels que $C \subset \bigcup_{k=1}^n V_k$ et

$$\mu(C) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(C \cap V_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(K \cap V_k) = 0.$$

Vu la proposition 8.1.9, cela implique $\mu(U \cap K) = 0$. Puisque

$$\mu(K \cap U^c) = \mu(K) - \mu(K \cap U) = \mu(K),$$

l'ensemble $K_0 = K \cap U^c$ est un compact vérifiant la thèse.

Proposition 8.5.3 (AC). Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ^* une mesure extérieure sur X telle que les ensembles boréliens sont μ^* -mesurables et μ est une mesure régulière. Il existe une famille $\mathscr F$ d'ensembles compacts de X deux à deux disjoints telle que

- pour tout $K \in \mathcal{F}$, on a $\mu(K) > 0$,
- si U est un ouvert de X, $K \in \mathscr{F}$ et si $U \cap K \neq \emptyset$, alors $\mu(U \cap K) > 0$,
- si A est un ensemble μ^* -mesurable tel que $\mu(A) < \infty$, alors $A \cap K$ est de mesure non nulle pour un nombre dénombrable de compacts K de \mathscr{F} et

$$\mu(A) = \sum_{K \in \mathscr{F}} \mu(A \cap K),$$

- une partie A de X est μ^* -mesurable si et seulement si pour tout $K \in \mathscr{F}$, $A \cap K$ est μ^* -mesurable,
- une application $f: X \to \mathbb{R}$ est μ^* -mesurable si et seulement si pour tout $K \in \mathscr{F}$, $f\chi_K$ est μ^* -mesurable.

Démonstration. Considérons les classes $\mathscr C$ d'ensembles compacts de X telles que

- les ensembles de \mathscr{C} sont deux à deux disjoints,
- pour tout $K \in \mathcal{C}$, on a $\mu(K) > 0$,
- pour tout ouvert U et $K \in \mathcal{C}$ tels que $U \cap K \neq \emptyset$, on a $\mu(U \cap K) > 0$.

Soit \mathscr{D} est la collection de ces \mathscr{C} , muni de l'ordre partiel défini par l'inclusion; bien sûr le vide étant un de ses éléments, \mathscr{D} n'est pas vide. Si \mathscr{D}_0 est une partie totalement ordonnée de \mathscr{D} , alors $\bigcup_{\mathscr{C} \in \mathscr{D}_0} \mathscr{C}$ est un élément de \mathscr{D} et donc un majorant de \mathscr{D}_0 . Dès lors, par le lemme de Zorn, \mathscr{D} admet un élément maximal; soit \mathscr{F} un tel élément.

Par construction, pour tout $K \in \mathcal{F}$, $\mu(K) > 0$ et si U est un ouvert pour lequel $U \cap K \neq \emptyset$, $\mu(U \cap K) > 0$.

Montrons que la troisième condition de la thèse est vérifiée. Étant donné un ensemble A μ^* -mesurable et de mesure finie, soit U un ouvert contenant A tel que $\mu(U) < \infty$. Tout K de $\mathscr F$ d'intersection non vide avec A rencontre U et donc $\mu(U \cap K) > 0$. Puisque U est de mesure finie, pour $k \in \mathbb{N}_0$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments K de $\mathscr F$ tels que $\mu(U \cap K) > 1/k$. En conséquence, il n'existe qu'un nombre dénombrable de $K \in \mathscr F$ tels que $\mu(U \cap K) > 0$. Puisque A est inclus dans U, il n'existe qu'un nombre fini de $K \in \mathscr F$ tels que $\mu(A \cap K) > 0$. Soit E l'union dénombrable de ces compacts ; il nous faut montrer que $A \setminus (A \cap E)$ est de mesure nulle. Supposons le contraire ; il existe alors un compact K inclus dans $A \setminus (A \cap E)$ tel que $\mu(K) > 0$. Par le lemme qui précède, on peut supposer

avoir $\mu(U \cap K) > 0$ pour tout ouvert U vérifiant $U \cap K \neq \emptyset$. Par construction de E, K est disjoint des éléments de \mathscr{F} , ce qui contredit sa maximalité.

Soit maintenant une partie A de X telle que $A \cap K$ est μ^* -mesurable pour tout K de \mathscr{F} . Vu la proposition 8.5.1, il suffit de montrer que $A \cap C$ est μ^* -mesurable pour tout compact C de X; soit donc C un tel ensemble. Vu ce qui a été montré plus haut, il existe une suite $(K_k)_k$ de \mathscr{F} tel que K_k est d'intersection non vide avec C pour tout indice k et $\mu(C \setminus \bigcup_k K_k) = 0$. On a

$$A \cap C = (\cup_k (A \cap K_k) \cap C) \cup (A \cap C \setminus \cup_k K_k),$$

où $\cup_k (A \cap K_k) \cap C$ est μ^* -mesurable, tout comme $A \cap C \setminus \cup_k K_k$, puisque ce dernier est de mesure extérieure nulle. D'un autre côté, il est évident que si A est μ^* -mesurable, $A \cap K$ est μ^* -mesurable pour tout compact K de X.

Montrons la dernière propriété à partir de celle que nous venons d'établir. C'est en fait direct, puisque si B est un borélien de \mathbb{R} , alors pour tout K de \mathscr{F} , on a

$$f^{-1}(B) \cap K = (f\chi_K)^{-1}(B) \cap K,$$

ce qui suffit. \Box

Application à la dualité

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et T l'application

$$T: L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^{1}(X, \mathcal{A}, \mu)^{*} \quad \langle g \rangle \mapsto T_{\langle g \rangle},$$
 (8.7)

où la fonctionnelle $T_{\langle q \rangle}$ est définie sur $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ par

$$T_{\langle g \rangle}(\langle f \rangle) = \int f g \, d\mu,$$

pour $\langle g \rangle \in L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Nous savons que T est un isomorphisme isométrique entre $L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ et un sous-espace de $L^{1}(X, \mathcal{A}, \mu)^{*}$. De plus, si (X, \mathcal{A}, μ) est σ -fini, alors T est surjectif (voir théorème 7.6.3).

Nous allons montrer que T peut être surjectif même lorsque l'hypothèse de σ -finitude n'est pas vérifiée.

Théorème 8.5.4. Soit X un espace de Hausdorff localement compact et μ^* une mesure extérieure sur X telle que les ensembles boréliens sont μ^* -mesurables et μ est une mesure régulière. Si $\mathscr A$ désigne la collection des ensembles μ^* -mesurable, l'application T définie par (8.7) est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. Il nous faut prouver que T est surjectif. Soit F un élément de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)^*$ et \mathscr{F} la collection de compacts de la proposition 8.5.3. Pour $K \in \mathscr{F}$, considérons \mathscr{A}_K la σ -algèbre des sous-ensembles μ^* -mesurables de K et la restriction μ_K de μ à \mathscr{A}_K . Définissons F_K comme étant la fonctionnelle linéaire définie sur $L^1(K, \mathscr{A}_K, \mu_K)$ par

$$F_K(\langle f \rangle) = F(\langle f_* \rangle),$$

ou f_* est la fonction égale à f sur K et nulle sur K^c . Puisque μ_K est fini, par le théorème 7.6.3, il existe une fonction g \mathscr{A}_K -mesurable sur K telle que

$$\sup\{|g_K(x)| : x \in K\} = ||F_K|| \le ||F|| \tag{8.8}$$

8.5. DUAL DE L^1

et

$$F_K(\langle f \rangle) = \int_K fg \, d\mu_K,$$

pour tout $\langle f \rangle$ de $L^1(K, \mathscr{A}_K, \mu_K)$. Soit g la fonction

$$g: X \to \mathbb{R}$$
 $x \mapsto \begin{cases} g_K(x) & \text{si } x \in K, \text{ avec } K \in \mathscr{F} \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{K \in \mathscr{F}} K \end{cases}$

Vu la proposition 8.5.3, g est \mathscr{A} -mesurable et vu la majoration (8.8), g appartient à $\mathscr{L}^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Montrons que l'on a $F = T_{\langle g \rangle}$. Bien entendu, si $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est nul sauf éventuellement sur un ensemble K de \mathscr{F} , alors $F(\langle f \rangle) = T_{\langle g \rangle}(\langle f \rangle)$. Pour le cas général, si f appartient à $pL^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, vu le corollaire 2.3.15, il existe une suite $(E_k)_k$ d'ensembles de mesure finie telle que f(x) = 0 si $x \notin \bigcup_k E_k$. Il existe donc une suite $(K_k)_k$ composée des seuls compacts de \mathscr{F} tels que pour tout indice $j, E_j \cap K_k$ est éventuellement de mesure non nulle pour tout k et

$$\mu(E_j) = \sum_k \mu(E_j \cap K_k),$$

pour tout j (il suffit d'appliquer la proposition 8.5.3 et de sélectionner les compacts pour chaque j). En particulier, f est nul presque partout en dehors de $\bigcup_k K_k$. Puisque

$$F(\langle f\chi_{K_k}\rangle) = T_{\langle g\rangle}(\langle f\chi_{K_k}\rangle)$$

pour tout indice k et que

$$\lim_{n} \|f - \sum_{k=1}^{n} f \chi_{K_k}\|_1 = 0,$$

on a $F(\langle f \rangle) = T_{\langle q \rangle}(\langle f \rangle)$, ce qui suffit.

Si Λ est une fonctionnelle linéaire sur $C_{\rm c}^0(X)$, nous lui avons associé une mesure extérieure via (8.1) et (8.2), qui vérifie les hypothèses du théorème 8.5.4. Dans ce cas, $\Lambda(f) = \int f \, d\mu$ pour tout $f \in C_{\rm c}^0(X)$.

Le point de vue de Bourbaki

Présentons brièvement le point de vue de Bourbaki pour l'intégration [7].

Soit X un espace de Hausdorff localement compact et soit $\mathscr{S}^+(X)$ l'ensemble des applications semi-continues inférieurement sur X à valeurs dans $[0, \infty]$. Si μ est une fonctionnelle linéaire sur $C^0_{\rm c}(X)$, ce que Bourbaki appelle une mesure de Radon positive sur X, soit

$$\mu^*: \mathscr{S}^+(X) \to [0, \infty] \quad f \mapsto \sup\{\mu(g): g \in C^0_{\mathrm{c}}(X) \text{ et } 0 \leqslant g \leqslant f\}$$

et

$$\mu^*(f) = \inf\{\mu^*(g): g \in \mathscr{S}^+(X) \text{ et } f \leqslant g\},$$

pour toute fonction f définie sur X à valeurs dans $[0, \infty]$. On peut vérifier que

$$\mu^*(f+g) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g)$$
 et $\mu^*(cf) = c\mu^*(f)$,

pour toute constante $c \ge 0$. En conséquence, si on pose $p_1(f) = \mu^*(|f|)$ pour toute fonction $f: X \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}^1 = \{ f : X \to \mathbb{R} : p_1(f) < \infty \}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} muni d'une semi-norme p_1 . Bourbaki définit alors $\mathscr{L}^1(X,\Lambda)$ comme l'adhérence de $C_{\rm c}^0(X)$ dans \mathscr{F}^1 et étend μ à $\mathscr{L}^1(X,\mu)$ en posant, pour tout f de cet espace,

$$\mu(f) = \lim_{k} \mu(f_k),$$

où $(f_k)_k$ est une suite de $C_c^0(X)$ qui converge vers f pour p_1 . Dans ce cas, on écrit

$$\int f \, d\mu = \mu(f).$$

La mesurabilité repose sur le théorème de Lusin : $f: X \to \mathbb{R}$ est μ -mesurable si pour tout compact K de X et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact C inclus dans K tel que $\mu^*(\chi_{K \setminus C}) < \varepsilon$ et f est continu sur C. Une partie A de X est μ -mesurable si χ_A est μ -mesurable et μ -intégrable si χ_A est μ -intégrable.

Ces notions sont très proche de celles introduites dans les chapitres précédents. Si Λ est une fonctionnelle linéaire positive sur $C_{\rm c}^0(X)$, notons μ_{Λ}^* la mesure extérieure obtenue via (8.1) et (8.2). Puisque

$$f(x) = \sup\{g(x) : g \in C_c^0(X) \text{ et } 0 \le g \le f\},\$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{S}^+(X)$, on a

$$\Lambda^*(f) = \int f \, d\mu_{\Lambda},$$

pour tout $f \in \mathcal{S}^+(X)$ encore, vu la proposition 8.4.10. On a dès lors

$$\Lambda^*(|f|) = \int |f| \, \mu_{\Lambda},$$

pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_{\Lambda}, \mathbb{R})$, vu le lemme 9.2.11. Par la proposition 8.4.5, cette égalité implique que $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_{\Lambda}, \mathbb{R})$ est inclus dans $\mathcal{L}^1(X, \Lambda)$ et $\int f \, d\mu_{\Lambda} = \int f \, d\Lambda$ pour tout f de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_{\Lambda}, \mathbb{R})$. Inversement, si f appartient à $\mathcal{L}^1(X, \Lambda)$, il existe une suite $(f_k)_k$ de fonctions de $C_c^0(X)$ qui converge vers f μ_{Λ} -presque partout, avec $\lim_k p_1(f - f_k) = 0$. Puisque $L^1(X, \mathcal{A}, \mu_{\Lambda}, \mathbb{R})$ est complet, f appartient à $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_{\Lambda}, \mathbb{R})$.

En utilisant le théorème de Lusin, on montre qu'une fonction $f: X \to \mathbb{R}$ est Λ -mesurable si et seulement si elle est μ_{Λ}^* -mesurable. De là, une partie A de X est Λ -mesurable si et seulement si elle est μ_{Λ}^* -mesurable.

8.6 Produit d'espaces localement compacts

Mesure produit

Si X et Y sont deux espaces de Hausdorff localement compact, $X \times Y$ est encore un espace de Hausdorff localement compact. Malheureusement, $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ ne contient en général pas les boréliens de $X \times Y$.

Lemme 8.6.1. Si \mathscr{C} est une collection de parties d'un ensemble X, $\sigma(\mathscr{C})$ est l'union des σ -algèbres de la forme $\sigma(\mathscr{F})$, où \mathscr{F} est une partie dénombrable de \mathscr{C} . En particulier, pour tout $A \in \sigma(\mathscr{C})$, il existe une famille dénombrable \mathscr{C}_0 d'éléments de \mathscr{C} telle que $A \in \sigma(\mathscr{C}_0)$.

Démonstration. Soit \mathscr{A} l'union des σ -algèbres de la forme $\sigma(\mathscr{F})$, où \mathscr{F} est une partie dénombrable de \mathscr{C} . Si $A \in \mathscr{A}$, alors il existe une partie dénombrable \mathscr{F} de \mathscr{C} telle que $A \in \sigma(\mathscr{F})$. On a alors $A^c \in \sigma(\mathscr{F})$ et donc $A^c \in \mathscr{A}$. On montre aisément que X appartient à \mathscr{A} . Si $(A_k)_k$ est une suite de \mathscr{A} , pour tout indice k, il existe une partie dénombrable \mathscr{F} de \mathscr{C} telle que $A_k \in \sigma(\mathscr{F})$. Posons

$$E_{\mathscr{F}} = \bigcup_{A_k \in \mathscr{F}} A_k.$$

On a $E_{\mathscr{F}} \in \sigma(\mathscr{F})$ et $\cup_k A_k$ est union (dénombrable) d'éléments de la forme $E_{\mathscr{F}}$, ce qui implique $\cup_k A_k \in \mathscr{A}$, par définition de \mathscr{A} . Ainsi, \mathscr{A} est une σ -algèbre sur X. On a $\mathscr{C} \subset \mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{C})$ et donc $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$.

Proposition 8.6.2. Si X est un espace topologique de cardinalité strictement supérieure au continuum, la diagonale de $X \times X$ n'appartient pas à $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X)$.

Démonstration. De fait, si la diagonale

$$D = \{(x_1, x_2) \in X \times X : x_1 = x_2\}$$

de X^2 appartient à $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$, il existe un ensemble dénombrable \mathscr{C} de parties de X tel que $D \in \sigma(\mathscr{C}) \otimes \sigma(\mathscr{C})$. En particulier, $\{x\} = D_x \in \sigma(\mathscr{C})$ pour tout $x \in X$. Puisque le cardinal de $\sigma(\mathscr{C})$ est au plus le continuum, le cardinal de X est également le continuum au plus, ce qui est absurde.

Corollaire 8.6.3. Si X est un espace de Hausdorff de cardinal strictement supérieur au continuum, alors $\mathscr{B}(X^2) \not\subset \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(X)$

Démonstration. Puisque X est séparé, la diagonale de X^2 est fermée et appartient donc à $\mathcal{B}(X^2)$. Vu la proposition 8.6.2, la diagonale n'appartient pas à $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$.

Lemme 8.6.4. Si X et Y sont deux espaces de Hausdorff,

- on $a \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$,
- $si\ E \in \mathcal{B}(X \times Y)$, alors $E_x \in \mathcal{B}(Y)$ pour tout $x \in X$ et $E^y \in \mathcal{B}(X)$ pour tout $y \in Y$,
- si la fonction $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{B}(X \times Y)$ -mesurable, alors $y \mapsto f(x,y)$ est $\mathscr{B}(Y)$ -mesurable pour tout $x \in X$ et $x \mapsto f(x,y)$ est $\mathscr{B}(X)$ -mesurable pour tout $y \in Y$.

Démonstration. Pour $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}(Y)$, on a

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times X) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X \times Y).$$

Puisque $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ est la σ -algèbre engendrée par ces ensembles $A \times B$, on a bien obtenu la première propriété.

Pour $x \in X$, puisque $i_x : y \mapsto (x,y)$ est une application continue, elle est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(Y)$ et $\mathcal{B}(X \times Y)$. Pour toute partie E de $X \times Y$, puisque $E_x = i_x^{-1}(E)$, $E \in \mathcal{B}(X \times Y)$ implique $E_x \in \mathcal{B}(Y)$. On procède de même pour E_y .

Soit $x \in X$; pour tout borélien E de \mathbb{R} , $f^{-1}(E)$ appartient à $\mathscr{B}(X \times Y)$ et donc

$$(f(x,\cdot))^{-1}(E) = (f^{-1}(E))_x \in \mathcal{B}(Y),$$

ce qui montre que $y \mapsto f(x,y)$ est $\mathscr{B}(Y)$ -mesurable. Le cas de $x \mapsto f(x,y)$ se traite de même.

Proposition 8.6.5. Si X et Y sont deux espaces de Hausdorff localement compact à base dénombrable, alors $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$. De plus, si μ et ν sont des mesures boréliennes régulières sur X et Y respectivement, alors elles sont σ -finies et $\mu \times \nu$ est régulier sur $X \times Y$.

Démonstration. Montrons que $\mathscr{B}(X \times Y) \subset \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$. Soit \mathscr{U} et \mathscr{V} des bases dénombrables de X et Y respectivement et posons

$$\mathcal{W} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, \ V \in \mathcal{V}\}.$$

Ce dernier est une base dénombrable de $X \times Y$ incluse dans $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$. En conséquence, tout ouvert de $X \times Y$ étant union (dénombrable, puisque \mathscr{W} l'est) d'éléments de \mathscr{W} , il appartient à $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$. Puisque $\mathscr{B}(X \times Y)$ est engendré par ces ouverts, l'inclusion est démontrée.

Si μ et ν sont boréliennes régulières, elles sont σ -finie, par la proposition 8.1.8 et la construction de la mesure $\mu \times \nu$ sur $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ est licite. Vu la première partie, cette mesure est borélienne. Si K est un compact de $X \times Y$, soit $K_1 = \pi_1(K)$ et $K_2 = \pi_2(K)$. Ces ensembles sont compacts et donc

$$\mu \times \nu(K) = \mu \times \nu(K_1 \times K_2) = \mu(K_1)\nu(K_2) < \infty.$$

Puisque $X \times Y$ est à base dénombrable, la proposition 8.1.7 permet de conclure. \Box

Intégration

Intéressons-nous maintenant à l'intégration. Afin de gagner en généralité, nous allons itérer les intégrales, utiliser un opérateur pour représenter ces intégrales et utiliser le théorème de représentation de Riesz.

Lemme 8.6.6. Soit X et K deux espaces topologiques, avec K compact; si $f: X \times K \to \mathbb{R}$ est continu, alors pour tout $x_0 \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $|f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$ pour tout $x \in V$ et tout $t \in K$.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ fixés; pour $t \in K$ soit U_t un voisinage ouvert de x_0 et V_t un voisinage ouvert de t tels que $|f(x,u) - f(x_0,t)| < \varepsilon/2$ pour tout $(x,u) \in U_t \times V_t$. Pour tous $x \in U_t$ et $u \in V_t$, on a

$$|f(x,u)-f(x_0,u)| \le |f(x,u)-f(x_0,t)|+|f(x_0,t)-f(x_0,u)| < \varepsilon.$$

Puisque K est compact, soit $n \in \mathbb{N}_0$ et $t_1, \ldots t_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n V_{t_k}$. Alors, $V = \bigcap_{k=1}^n U_{t_k}$ est un voisinage ouvert de x_0 pour lequel l'énoncé est vérifié.

Proposition 8.6.7. Soit X et Y deux espaces de Hausdorff localement compact, μ et ν des mesures boréliennes régulières sur X et Y respectivement et f une fonction de $C^0_c(X \times Y)$;

- pour tout $x \in X$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ appartient à $C_c^0(Y)$ et pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x,y)$ appartient à $C_c^0(X)$,
- les fonctions

$$x \mapsto \int_{Y} f(x, y) \, d\nu(y)$$
 et $y \mapsto \int_{X} f(x, y) \, d\mu(x)$ (8.9)

appartiennent à $C_{\rm c}^0(X)$ et $C_{\rm c}^0(Y)$ respectivement,

$$- \int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y).$$

Démonstration. Soit $f \in C^0_c(X \times Y)$, désignons par K le support de f et soit $K_1 = \pi_1(K)$, $K_2 = \pi_2(K)$. Pour $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est continue puisqu'elle est égale à $f \circ i_x$, avec $i_x(y) = (x,y)$ continu. Puisque le support de $y \mapsto f(x,y)$ est inclus dans K_2 , cette fonction appartient à $C^0_c(Y)$. Un argument similaire montre que $x \mapsto f(x,y)$ appartient à $C^0_c(X)$ pour tout $y \in Y$.

De ce qui précède, on déduit que les intégrales de (8.9) existent; montrons leur continuité. Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$; vu le lemme 8.6.6 appliqué à $X \times K_2$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tous $x \in V$ et $y \in K_2$, $|f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon$. Dès lors, pour $x \in V$, on a

$$\left| \int_{Y} f(x,y) \, d\nu(y) - \int_{Y} f(x_0,y) \, d\nu(y) \right| \leqslant \int_{K_2} |f(x,y) - f(x_0,y)| \, d\nu(y) \leqslant \varepsilon \nu(K_2).$$

Puisque ε est arbitraire, il s'ensuit que $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ est continu. Qui plus est, cette fonction étant nulle pour x n'appartenant pas à K_1 , elle appartient à $C_c^0(X)$. On montre similairement que $y \mapsto \int_X f(x,y) d\nu(x)$ appartient à $C_c^0(Y)$.

Démontrons le dernier point. Vu ce que nous avons obtenu jusqu'à présent, les intégrales existent. Soit $\varepsilon > 0$ et pour $x \in K_1$, soit V_x un voisinage de x tel que pour tous $x' \in V_x$ et $y \in K_2$, $|f(x',y)-f(x,y)| < \varepsilon$. Soit alors $n \in \mathbb{N}_0$ et x_1,\ldots,x_n tels que $K_1 \subset \bigcup_{k=1}^n V_{x_k}$. Soit alors A_1,\ldots,A_n des boréliens deux à deux disjoints tels que $A_k \subset V_{x_k}$ et $K = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Définissons la fonction

$$g: X \times Y \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y) \chi_{A_k}(x).$$

Les deux fonctions f et g s'annulent sur le complémentaire de $K_1 \times K_2$ et on a $|f(x,y) - g(x,y)| < \varepsilon/2$ pour tout $(x,y) \in K_1 \times K_2$. On a alors

$$|\int_{Y} \int_{X} f(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y) - \int_{Y} \int_{X} g(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y)| < \mu(K_{1})\nu(K_{2})\varepsilon/2$$

et

$$|\int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) d\mu(x) - \int_X \int_Y g(x,y) \, d\nu(y) d\mu(x)| < \mu(K_1)\nu(K_2)\varepsilon/2.$$

Puisque

$$\int_{Y} \int_{X} g(x, y) \, d\mu(x) d\nu(y) = \int_{X} \int_{Y} g(x, y) \, d\nu(y) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{k}) \int f(x_{k}, y) \, d\nu(y),$$

il vient

$$\left| \int_{Y} \int_{X} f(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y) - \int_{X} \int_{Y} f(x,y) \, d\nu(y) d\mu(x) \right| < \mu(K_{1})\nu(K_{2})\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

Définition 8.6.8. Soit X et Y deux espaces de Hausdorff localement compacts et μ , ν deux mesures boréliennes régulières sur X et Y respectivement. Posons

$$\Lambda: C_{\rm c}^0(X \times Y) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_{Y} \int_{Y} f(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y).$$

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure borélienne régulière $\mu \times \nu$ sur $X \times Y$ telle que

$$\Lambda(f) = \int_{X \times Y} f \, d\mu \times \nu.$$

Cette mesure $\mu \times \nu$ est appelée la mesure produit borélienne régulière de μ et ν .

Proposition 8.6.9. Soit X et Y deux espaces de Hausdorff localement compacts, μ et ν deux mesures boréliennes régulières sur X et Y respectivement et $\mu \times \nu$ la mesure borélienne régulière de μ et ν . Si U est un ensemble ouvert de $X \times Y$, alors

- les fonctions $x \mapsto \nu(U_x)$ et $y \mapsto \mu(U^y)$ sont semi-continues inférieurement et donc Borel-mesurables,
- $\mu \times \nu(U) = \int_X \nu(U_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(U^y) d\nu(y)$.

 $D\acute{e}monstration$. Puisque U_x et U^y sont ouverts, ils sont boréliens; posons

$$\mathscr{F} = \{ f \in C_c^0(X \times Y) : 0 \leqslant f \leqslant \chi_U \}$$

et pour $x \in X$, $y \in Y$,

$$\mathscr{F}_x = \{ f(x, \cdot) : f \in \mathscr{F} \}$$
 et $\mathscr{F}^y = \{ f(\cdot, y) : f \in \mathscr{F} \}.$

On a $\mathscr{F}_x \subset C^0_c(Y)$, $\mathscr{F}^y \subset C^0_c(X)$ et ces ensembles sont filtrants. Aussi, pour tout $g \in \mathscr{F}_x$, on a $g \leqslant \chi_{U_x}$ et pour tout $g \in \mathscr{F}^y$, on a $g \leqslant \chi_{U^y}$. Puisque ces fonctions caractériques sont semi-continues inférieurement, la proposition 8.4.10 implique

$$\nu(U_x) = \sup\{ \int f(x, y) \, d\nu(y) : f \in \mathscr{F}_x \}, \tag{8.10}$$

pour tout $x \in X$ et

$$\mu(U^y) = \sup\{ \int f(x,y) \, d\mu(x) : f \in \mathscr{F}^y \},\,$$

pour tout $y \in Y$. Ainsi, les fonctions $x \mapsto \nu(U_x)$ et $y \mapsto \mu(U^y)$ sont supremum d'un ensemble de fonctions continues par la proposition 8.6.7 et sont donc semi-continues inférieurement.

Vu le lemme 8.2.2, on a

$$\mu \times \nu(U) = \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_X \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) d\mu(x).$$

La proposition 8.4.10 permet alors d'écrire

$$\int_X (\sup_{f \in \mathscr{F}} \int f(x, \cdot) \, d\nu) \, d\mu(x) = \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_X \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) d\mu(x).$$

Enfin, vu (8.10), on a

$$\int_X (\sup_{f \in \mathscr{F}} \int f(x, \cdot) \, d\nu) \, d\mu(x) = \int_X \nu(U_x) \, d\mu(x).$$

Grâce à ces égalités, la première égalité du second point a été établie. La seconde s'obtient de même. \Box

Corollaire 8.6.10. Soit X et Y deux espaces de Hausdorff localement compacts, μ et ν deux mesures boréliennes réqulières sur X et Y respectivement et $\mu \times \nu$ la mesure borélienne régulière de μ et ν . Si E est un borélien de $X \times Y$ inclus dans $A \times B$ où A et B sont des boréliens de X et Y, σ -finis pour μ et ν respectivement, alors

- les fonctions $x \mapsto \nu(E_x)$ et $y \mapsto \mu(E^y)$ sont borel-mesurables, $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$.

Démonstration. Supposons d'abord avoir $\mu(A) < \infty$ et $\nu(B) < \infty$. Par régularité, il existe U de X contenant A et un ouvert V de Y contenant B tels que $\mu(U) < \infty$ et $\nu(V) < \infty$. Posons $W = U \times V$ et soit \mathscr{C} la collections des boréliens D de $X \times Y$ tels que les fonctions $x \mapsto \nu((D \cap W)_x)$ et $y \mapsto \mu((D \cap W)^y)$ sont borel-mesurables et vérifient

$$\mu \times \nu(D \cap W) = \int_X \nu((D \cap W)_x) \, d\mu(x) = \int_Y \mu((D \cap W)^y) \, d\nu(y).$$

Vu la proposition précédente, \mathscr{C} contient tous les ouverts de $X \times Y$. Maintenant, si D_1 et D_2 sont deux éléments de \mathscr{C} avec $D_1 \subset D_2$, alors $D_2 \setminus D_1$ appartient encore à \mathscr{C} . De plus, si $(D_k)_k$ est une suite d'éléments de \mathscr{C} tels que $D_k \subset D_{k+1}$ pour tout indice k, alors $\cup_k D_k$ appartient également à \mathscr{C} . Il en résulte que \mathscr{C} est une classe de Dynkin contenant les ouverts de $X \times Y$. Puisque ces ouverts forment un π -système, on a $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{C}$.

Pour le cas général, puisque tout borélien inclus dans $A \times B$ où A et B sont σ -finis est union d'une suite croissante de boréliens dont chacun est inclus dans un ensemble de la forme $A' \times B'$ où A' et B' sont des boréliens de mesure finie, on peut conclure.

Théorème 8.6.11. Soit X et Y deux espaces de Hausdorff localement compacts, μ et ν deux mesures boréliennes régulières sur X et Y respectivement et $\mu \times \nu$ la mesure borélienne régulière de μ et ν . Si f est une fonction de $\mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{B}(X \times Y), \mu \times \nu)$ et s'annule hors d'un ensemble $A \times B$ où A et B sont des boréliens de X et Y σ -finis pour μ et ν respectivement, alors

- $-y \mapsto f(x,y)$ appartient à $\mathcal{L}^1(Y,\mathcal{B}(Y),\nu)$ pour μ -presque tout $x \in X$ et $x \mapsto f(x,y)$ appartient à $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ pour ν -presque tout $y \in Y$,
- la fonction

$$x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) & si \ f(x,\cdot) \in \mathscr{L}^1(Y,\mathscr{B}(Y),\nu) \\ 0 & sinon \end{array} \right.$$

appartient à $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ et

$$y \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \int_X f(x,y) \, d\mu(x) & si \ f(\cdot,y) \in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{B}(X),\mu) \\ 0 & sinon \end{array} \right.$$

appartient à
$$\mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}(Y), \nu)$$
,
$$-\int f d\mu \times \nu = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Démonstration. Soit \mathscr{C} la collection des fonctions de $\mathscr{L}^1(X\times Y,\mathscr{B}(X\times Y),\mu\times\nu)$ qui s'annulent sur le complémentaire d'un ensemble de la forme $A \times B$, où A et B sont des boréliens σ -finis. Par le corollaire qui précède, si f est une fonctions caractéristique de \mathscr{C} , elle satisfait la thèse (rappelons qu'une fonction intégrable est finie presque partout). Par linéarité et le théorème de la convergence monotone, le théorème est toujours vérifié pour les fonctions positives de C. On conclut en décomposant une fonction de C en ses parties positive et négative.

Chapitre 9

Dérivation

9.1 Dérivation de mesures

Dérivée de mesure et dérivée de Radon-Nikodym

Définition 9.1.1. Soit $\mathscr C$ la famille des intervalles compacts non-dégénérés parallèles aux axes de $\mathbb R^d$ dont les intervalles constitutifs sont de même longueur, c'est-à-dire la collection des ensemble $C = \prod_{j=1}^d [a_j,b_j]$ avec $0 < b_j - a_j = b_k - a_k < \infty$, pour tous $j,k \in \{1,\ldots,d\}$. Dans ce cas, on note la longueur d'un côté de C par $\ell(C) = b_1 - a_1$.

Un recouvrement de Vitali d'un ensemble E de \mathbb{R}^d est une famille \mathscr{V} de \mathscr{C} telle que pour tout $x \in A$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un cube C de \mathscr{V} contenant x tel que $\ell(C) < \varepsilon$.

Nous allons envisager la théorie de la dérivation grâce au théorème classique suivant; cette théorie peut aussi être abordée à partir du « lemme du soleil levant » [19].

Théorème 9.1.2 (Théorème de recouvrement de Vitali). Soit E un ensemble non-vide $de \mathbb{R}^d$ dont \mathscr{V} est un recouvrement de Vitali. Il existe une suite finie ou infinie (C_k) d'ensembles $de \mathscr{V}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_k C_k$ contienne presque tous les points de E (pour la mesure de Lebesgue).

Démonstration. Démontrons d'abord ce résultat en supposant que E est borné. Soit Ω un ensemble ouvert de \mathbb{R}^d contenant E et désignons par \mathscr{V}_0 les cubes de \mathscr{V} inclus dans Ω . Bien sûr, \mathscr{V}_0 est un recouvrement de Vitali de E et posons

$$\varepsilon_1 = \sup_{C \in \mathscr{V}_0} \ell(C).$$

Puisque E est non-vide, ε_1 est un nombre réel strictement positif et il existe un cube $C_1 \in \mathcal{V}_0$ tel que $\ell(C_1) > \varepsilon_1/2$. Définissons les suites (ε_k) et (C_k) comme suit. Si $E \subset \bigcup_{k=1}^n C_k$, alors la construction est terminée. sinon, il existe un point $x \in E$ n'appartenant pas à l'union de ensembles C_k déjà définis. Puisque $\bigcup_{k=1}^n C_k$ est fermé et que \mathcal{V}_0 est un recouvrement de Vitali de E, il existe un cube de \mathcal{V}_0 contenant x et disjoint de $\bigcup_{k=1}^n C_k$. Ainsi,

$$\varepsilon_{n+1} = \sup\{\ell(C) : C \in \mathscr{V}_0 \text{ et } C \cap (\bigcup_{k=1}^n C_k) = \varnothing\}$$

est un nombre réel strictement positif et il existe un cube C_{n+1} de \mathcal{V}_0 tel que $\ell(C_{n+1}) > \varepsilon_{n+1}/2$ et $C_{n+1} \cap (\bigcup_{k=1}^n C_k) = \emptyset$. Si la construction précédente se termine après un nombre fini d'étapes, la suite $(C_k)_{k=1}^n$ ainsi déterminée est celle de l'énoncé.

Dans le cas contraire, les ensembles C_k étant deux à deux disjoints et inclus dans l'ensemble borné Ω , la série $\sum_k \mathcal{L}(C_k)$ doit être convergente, ce qui implique $\lim_k \mathcal{L}(C_k) = 0$ et donc $\lim_k \varepsilon_k = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit D_k le cube de \mathscr{C} de même centre que C_k tel que $\ell(D_k) = 5\ell(C_k)$. Puisque $\mathcal{L}(D_k) = 5^d \mathcal{L}(C_k)$, la série $\sum_k \mathcal{L}(D_k)$ converge également. Montrons l'inclusion

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} C_k \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} D_k$$

pour tout naturel n>0. Soit donc x un point de $E\setminus \bigcup_{k=1}^n C_k$. Puisque $\bigcup_{k=1}^n C_k$ est fermé et que \mathscr{V}_0 est un recouvrement de Vitali de E, il existe un cube C de \mathscr{V}_0 contenant x et disjoint de $\bigcup_{k=1}^n C_k$. Par construction de la suite C_j , si k est tel que $C\cap (\bigcup_{j=1}^k C_j)=\varnothing$, on a $\ell(C)\leqslant \varepsilon_{k+1}$. Puisque $\lim_k \varepsilon_k=0$, l'intersection entre C et $\bigcup_{j=1}^k C_j$ est non-vide pour k suffisamment grand. Soit k_0 le plus petit indice tel que $C\cap (\bigcup_{j=1}^k C_j)\neq\varnothing$. Dès lors, $\ell(C)\leqslant \varepsilon_{k_0}$ et puisque $\ell(C_{k_0})\geqslant \varepsilon_{k_0}/2$, on a $\ell(C)\leqslant 2\ell(C_{k_0})$. Qui plus est, par définition de k_0 , on a $C\cap C_{k_0}\neq\varnothing$, ce qui implique $C\subset D_{k_0}$. Puisque C est disjoint de $\bigcup_{k=1}^n C_k$, on a aussi $k_0\geqslant n+1$ et donc $x\in D_{k_0}\subset \bigcup_{k=n+1}^\infty D_k$, ce qui montre l'inclusion. Ceci étant, cette relation implique

$$\mathcal{L}^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) \leqslant \mathcal{L}^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} C_k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{L}(D_k)$$

et la convergence de la série $\sum_k \mathcal{L}(D_k)$ permet d'affirmer que $\lim_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{L}(D_k) = 0$, ce qui suffit lorsque E est borné.

Supposons maintenant que E ne soit pas borné. Soit (Ω_k) une suite d'ensembles ouverts, bornés et deux à deux disjoints de \mathbb{R}^d tels que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d \setminus \cup_k \Omega_k) = 0$ (on peut par exemple choisir les ensembles $\prod_{k=1}^d]k, k+1[$). Pour tout k tel que $E \cap \Omega_k \neq \emptyset$, nous avons montré qu'il existe une suite $(C_j^{(k)})_j$ de cubes deux à deux disjoints de \mathscr{V} telle que $\bigcup_j C_j^{(k)}$ est inclus dans Ω_k et contient presque tous les points de $E \cap \Omega_k$. La suite (C_l) obtenue en rassemblant les suites $(C_j^{(k)})$ permet de conclure.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de dérivée pour une mesure borélienne finie.

Définition 9.1.3. Soit μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d . Les dérivées supérieure et inférieure de μ en x sont respectivement définies par

$$\overline{D}\mu(x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \{ \frac{\mu(C)}{\mathcal{L}(C)} : C \in \mathscr{C}, x \in C \text{ et } \ell(C) < \varepsilon \}$$

et

$$\underline{D}\mu(x) = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \{ \frac{\mu(C)}{\mathcal{L}(C)} : C \in \mathscr{C}, \, x \in C \text{ et } \ell(C) < \varepsilon \},$$

où les notations de la définition 9.1.1 ont été utilisées. L'application $\overline{D}\mu$ (resp. $\underline{D}\mu$) qui à $x \in \mathbb{R}^d$ associe la dérivée supérieure $\overline{D}\mu(x)$ (resp. la dérivée inférieure $\underline{D}\mu(x)$) de μ en x est bien entendu une fonction à valeurs dans $[0, \infty]$.

La mesure μ est dérivable en $x \in \mathbb{R}^d$ si $\overline{D}\mu(x)$ et $\underline{D}\mu(x)$ sont finis et égaux. Dans ce cas, la dérivée de μ en x est définie par $D\mu(x) = \overline{D}\mu(x)$. La dérivée de μ est la fonction $D\mu$ qui à un point x où μ est dérivable associe $D\mu(x)$; la dérivée de μ n'est pas définie aux points où μ n'est pas dérivable.

Ces fonctions sont mesurables.

Proposition 9.1.4. Soit μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d ; $\overline{D}\mu$, $\underline{D}\mu$ et $D\mu$ sont Borelmesurables

Démonstration. Soit \mathscr{F} la collection des intervalles de \mathbb{R}^d de la forme $\prod_{j=1}^d]a_j,b_j[$, avec $0 < b_j - a_j = b_k - a_k < \infty$ pour tous $j,k \in \{1,\ldots,d\}$ et pour un tel ensemble Ω , notons $\ell(\Omega)$ le nombre $b_1 - a_1$. Pour tout cube C de \mathscr{C} , il existe une suite (Ω_k) de \mathscr{F} telle que $C = \cap_k \Omega_k$ et par la continuité des mesures, $\mu(C)/\mathcal{L}(C) = \lim_k \mu(U_k)\mathcal{L}(U_k)$. De la même manière, pour tout cube $\Omega \in \mathscr{F}$, il existe une suite (C_k) de \mathscr{C} telle que $\Omega = \cup_k C_k$ et donc telle que $\mu(\Omega)/\mathcal{L}(\Omega) = \lim_k \mu(C_k)/\mathcal{L}(C_k)$. Ainsi, $\overline{D}\mu(x)$ est aussi défini par

$$\overline{D}\mu(x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\mu(\Omega)}{\mathcal{L}(\Omega)} : \Omega \in \mathscr{F}, \ x \in \Omega \text{ et } \ell(\Omega) < \varepsilon \right\}.$$

Ainsi, on a $\overline{D}\mu(x) \geqslant y$ si et seulement si pour tous $j,k \in \mathbb{N}_0$, il existe un cube ouvert $\Omega \in \mathscr{F}$ tel que $x \in \Omega$, $\ell(\Omega) < 1/j$ et

$$\frac{\mu(\Omega)}{\mathcal{L}(\Omega)} > y - \frac{1}{k}.$$

Soit $\Omega_{j,k}$ l'union des ensembles Ω satisfaisant cette dernière inégalité avec $\ell(\Omega) < 1/j$. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : \overline{D}\mu(x) \geqslant y\}$ étant égal à $\cup_{j,k}\Omega_{j,k}$, c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ensembles ouverts, il est borélien, ce qui suffit pour le cas de $\overline{D}\mu$. La mesurabilité de $\underline{D}\mu$ se montre de manière analogue et, par la proposition 2.1.4, celle de $D\mu$ résulte de la mesurabilité de $\overline{D}\mu$ et de $\underline{D}\mu$.

Deux lemmes sont nécessaires afin de démontrer le résultat principal de cette section.

Lemme 9.1.5. Si μ est une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d , y un nombre positif et E un ensemble borélien de \mathbb{R}^d tels que $\overline{D}\mu(x) \geqslant y$ pour tout $x \in E$, alors on a $\mu(E) \geqslant y\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. Si E est l'ensemble vide, le résultat est trivial. Sinon, soient Ω un ensemble ouvert contenant E, ε tel que $0 < \varepsilon < y$ et $\mathscr V$ la famille des cubes C de $\mathscr C$ inclus dans Ω et tels que $\mu(C) \geqslant (y-\varepsilon)\mathcal L(C)$. Puisque $\overline{D}\mu(x) \geqslant y$ pour tout $x \in E$, la famille $\mathscr V$ est un recouvrement de Vitali de E. Le théorème de recouvrement de Vitali fournit alors une suite (C_k) de cubes deux à deux disjoints de $\mathscr V$ tels que $\mathcal L(E \setminus \cup_k C_k) = 0$. On obtient ainsi

$$\mu(\Omega) \geqslant \sum_{k} \mu(C_k) \geqslant \sum_{k} (y - \varepsilon) \mathcal{L}(C_k) = (y - \varepsilon) \mathcal{L}(\cup_k C_k) \geqslant (y - \varepsilon) \mathcal{L}(E).$$

Puisque, par le théorème 8.1.5, μ est régulier et que ε est arbitraire, l'inégalité $\mu(E) \geqslant y\mathcal{L}(E)$ s'ensuit.

Lemme 9.1.6. Si μ est une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), y est un nombre positif et E un ensemble borélien de \mathbb{R}^d tels que $D\mu(x) \leq y$ pour tout $x \in E$, alors on a $\mu(E) \leq y\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. Comme pour le lemme précédent, nous pouvons supposer que E n'est pas l'ensemble vide. Soit Ω un ouvert contenant E et ε un nombre strictement positif. De la même manière que précédemment, on peut montrer qu'il existe une suite (C_k) de cubes fermés deux à deux disjoints inclus dans Ω telle que $\mu(C_k) \leq (y+\varepsilon)\mathcal{L}(C_k)$ et $\bigcup_k C_k$ contient presque tous les points de E. Puisque μ est absolument continu, cette union contient également presque tous les points de E pour la mesure μ . Dès lors

$$(y+\varepsilon)\mathcal{L}(\Omega) \geqslant (y+\varepsilon)\sum_{k}\mathcal{L}(C_{k}) \geqslant \sum_{k}\mu(C_{k}) = \mu(\cup_{k}C_{k}) \geqslant \mu(E).$$

Puisque le mesure de Lebesgue est régulière et que ε est arbitraire, ceci conclut la démonstration.

Théorème 9.1.7. Soit μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d ; μ est dérivable en presque tous les points de \mathbb{R}^d (pour la mesure de Lebesgue) et la fonction définie par

$$x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} D\mu(x) & si \ \mu \ est \ d\'{e}rivable \ en \ x \\ 0 & sinon \end{array} \right.$$

est la dérivée de Radon-Nikodym de la partie absolument continue de μ .

Démonstration. Bien entendu, on a $\underline{D}\mu(x) \leq \overline{D}\mu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Le lemme 9.1.5 implique

$$\mathcal{L}(\{x:\overline{D}\mu(x)=\infty\})\leqslant\mathcal{L}(\{x:\overline{D}\mu(x)\geqslant k\})\leqslant\frac{1}{k}\;\mu(\{x:\overline{D}\mu(x)\geqslant k\})\leqslant\frac{1}{k}\;\mu(\mathbb{R}^d),$$

pour tout k; $\overline{D}\mu$ est donc fini presque partout (pour la mesure de Lebesgue).

Supposons que μ est absolument continu; puisque $0 \leq \underline{D}\mu(x) \leq \overline{D}\mu(x) < \infty$ presque partout, il suffit de montrer que l'on a $\underline{D}\mu(x) \geq \overline{D}\mu(x)$ presque partout pour montrer que μ est dérivable presque partout. Si r et s sont deux nombres rationnels strictement positifs tels que r < s, posons

$$E_{r,s} = \{ x \in \mathbb{R}^d : \underline{D}\mu(x) \leqslant r < s \leqslant \overline{D}\mu(x) \}.$$

Les lemmes 9.1.5 et 9.1.6 impliquent les inégalités suivantes,

$$s\mathcal{L}(E_{r,s}) \leqslant \mu(E_{r,s}) \leqslant r\mathcal{L}(E_{r,s}),$$

ce qui implique d'abord que $\mathcal{L}(E_{r,s})$ est fini et ensuite que $\mathcal{L}(E_{r,s}) = 0$, puisque r < s. Maintenant, puisque

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \underline{D}\mu(x) < \overline{D}\mu(x)\} = \bigcup_{r,s} E_{r,s},$$

l'inégalité $\underline{D}\mu(x)\geqslant \overline{D}\mu(x)$ doit avoir lieu presque partout, ce qui montre que μ est dérivable presque partout.

Supposons maintenant que l'on a $\mu \ll \mathcal{L}$ et soit f la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à \mathcal{L} . Si y est un nombre positif et E un ensemble borélien tels que $f(x) \geqslant y$ (resp. $f(x) \leqslant y$) pour tout $x \in E$, on a bien entendu $\mu(E) \geqslant y\mathcal{L}(E)$ (resp. $\mu(E) \leqslant y\mathcal{L}(E)$). Avec cet argument pour remplacer les lemmes, on obtient $f \leqslant \underline{D}\mu$ presque partout en remplaçant $\overline{D}\mu$ par f dans le paragraphe précédent. De la même manière, on montre que $f \geqslant \overline{D}\mu$ presque partout. Il en résulte que f et $D\mu$ coïncident presque partout.

Si on a $\mu \perp \mathcal{L}$, soit N un ensemble borélien tel que $\mathcal{L}(N)=0$ et $\mu(N^c)=0$; le lemme 9.1.5 implique

$$\mathcal{L}(\{x \in N^c : \overline{D}\mu(x) \geqslant \frac{1}{k}\}) \leqslant k\mu(\{x \in N^c : \overline{D}\mu(x) \geqslant \frac{1}{k}\}) \leqslant k\mu(N^c) = 0$$

pour tout k. De plus, on a

$$\{x\in\mathbb{R}^d:\overline{D}\mu(x)>0\}\subset N\cup(\bigcup_{\iota}\{x\in N^c:\overline{D}\mu(x)\geqslant\frac{1}{k}\})$$

et $0 \le D\mu \le \overline{D}\mu$. Dès lors, μ est dérivable et de dérivée nulle presque partout.

Finalement, pour si μ est une mesure borélienne finie, soient $\mu = \mu_A + \mu_s$ sa décomposition de Lebesgue et f la dérivée de Radon-Nikodym de μ_a . On a

$$D\mu(x) = D\mu_a(x) + D\mu_s(x) = f(x) + 0$$

presque partout, ce qui termine la preuve.

Points de densité et théorème de densité de Lebesgue

Nous disposons à présent de toutes les clefs pour présenter la notion de point de densité et le théorème de densité de Lebesgue s'y rapportant.

Définition 9.1.8. Soit E un ensemble Lebesgue-mesureable de \mathbb{R}^d ; un point $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de densité de E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout cube $C \in \mathscr{C}$ contenant x et vérifiant $\ell(C) < \delta$, on a

$$\left|\frac{\mathcal{L}(E\cap C)}{\mathcal{L}(C)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Moins formellement, x est un point de densité de E si

$$\lim_{C \to \{x\}} \frac{\mathcal{L}(E \cap C)}{\mathcal{L}(C)} = 1,$$

lorsque le cube C « approche » x.

Un point $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de dispersion de E s'il est un point de densité de E^c ; de manière équivalent, x est un point de dispersion si

$$\lim_{C \to \{x\}} \frac{\mathcal{L}(E \cap C)}{\mathcal{L}(C)} = 0.$$

Corollaire 9.1.9 (théorème de densité de Lebesgue). Si E est un ensemble Lebesgue-mesurable de \mathbb{R}^d , alors presque tout point de E est un point de densité de E et presque tout point de E^c est un point de dispersion de E.

Démonstration. Supposons d'abord que E soit de mesure finie et définissons la mesure μ sur \mathbb{R}^d par $\mu(A) = \mathcal{L}(A \cap E)$. Par le lemme 1.4.65, il existe un sous-ensemble borélien E_0 de E tel que $\mathcal{L}(E \setminus E_0) = 0$. Puisque $\mu \ll \mathcal{L}$ et que χ_{E_0} est la dérivée de Radon-Nikodym de μ , le théorème 9.1.7 implique que pour presque tout $x \in E$, $D\mu(x) = 1$ et donc que x est un point de densité de E.

Si $\mathcal{L}(E)$ n'est pas fini, soit (E_k) une suite d'ensembles Lebesgue-mesurables de mesures finies telle que $\bigcup_k E_k = E$. Presque tout point de E est un point de densité pour E_k pour un certain E0 et est donc un point de densité de E1. Enfin, presque tout point de E2 est un point de densité de E3.

9.2 Dérivation de fonctions

Relations entre dérivée d'une fonction et dérivée d'une mesure

Les notions vues à la section précédente peuvent s'appliquer dans le cadre de la dérivation de fonctions d'une variable réelle.

Proposition 9.2.1. Soient μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R} et $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \mu(]-\infty,x]$). Si μ est dérivable en x, alors F est dérivable en x et $DF(x) = D\mu(x)$.

Démonstration. Si μ est dérivable en x_0 , on doit nécessairement avoir $\mu(\{x_0\}) = 0$, ce qui implique que F est continu en x_0 . On a donc

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{\mu([x_0, x])}{\mathcal{L}([x_0, x])} & \text{si } x_0 < x \\ \frac{\mu([x, x_0])}{\mathcal{L}([x, x_0])} & \text{si } x < x_0 \end{cases}.$$

On conclut en faisant tendre x vers x_0 et en remarquant que la mesure de l'ensemble $[x, x_0]$ est la limite sur k de l'ensemble $[x + 1/k, x_0]$.

Rappelons qu'une fonction croissante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet des limites en x^+ et x^- (notées $f(x^+) = \inf\{f(t): t > x\}$ et $f(x^-) = \sup\{f(t): t < x\}$) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que les points de discontinuité de F sont dénombrables. La fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f(x^+)$ est donc une fonction croissante, continue à droite et égale à f en tous les points de continuité de f. Le résultat qui suit est un résultat de base de la dérivation.

Théorème 9.2.2 (Lebesgue). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissant, alors f est dérivable presque partout (pour la mesure de Lebesgue).

Démonstration. Si f est borné, croissant, continu à droite et s'annule en $-\infty$, par la proposition 1.4.75, il existe une mesure borélienne finie μ telle que $f(x) = \mu(]-\infty,x]$) pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème 9.1.7 et la proposition 9.2.1, f est alors dérivable presque partout.

Si f est borné, croissant et s'annule en $-\infty$, soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x^+)$; cette fonction est dérivable presque partout. Si, au point $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = g(x_0)$, alors $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ est compris entre $(g(x) - g(x_0))/(x - x_0)$ et $(g(x^-) - g(x_0))/(x - x_0)$ (on a même $f(x^-) = g(x^-)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Dès lors, si g est dérivable en x_0 , f l'est également et $Df(x_0) = Dg(x_0)$; puisque f est continu presque partout, il s'ensuit que f est dérivable presque partout.

Si f est une fonction croissante, il est suffisant de prouver que f est dérivable presque partout sur un intervalle borné arbitraire]a,b[. Puisque cela se déduit des cas précédents en considérant la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ f(x) - f(a) & \text{si } a < x < b \\ f(b) - f(a) & \text{si } b \leqslant x \end{cases},$$

la preuve est complète.

Corollaire 9.2.3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à variation finie, alors f est dérivable presque partout.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 7.5.4 et du théorème 9.2.2.

Proposition 9.2.4 (Fubini). Soit (f_k) une suite de fonctions croissantes sur \mathbb{R} telle que $\sum_k f_k$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = \sum_k f_k(x)$, alors $Df = \sum_k Df_k$ presque partout.

Démonstration. Si chaque fonction f_k est bornée, croissante, continue à droite et s'annule en $-\infty$ et si f est borné, soit μ_k la mesure borélienne finie correspondant à la fonction f_k $(k \in \mathbb{N}_0)$. On vérifie sans peine que l'application μ définie sur \mathbb{R} par $\mu(E) = \sum_k \mu_k(E)$ est une mesure; elle est même finie, puisque $\mu(]-\infty,x])=f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout k, considérons la décomposition de Lebesgue de $\mu_k=\mu_a^{(k)}+\mu_s^{(k)}$, la dérive de Radon-Nikodym g_k de $\mu_a^{(k)}$ et un ensemble borélien N_k de mesure de Lebesgue nulle sur lequel $\mu_s^{(k)}$ est concentré. On constate immédiatement que $\sum_k \mu_s^{(k)}$ est concentré sur $\cup_k N_k$ et que $\sum_k \mu_a^{(k)}(E) = \int_E \sum_k g_k d\mathcal{L}$ pour tout $E \in \mathbb{B}$; dès lors, la décomposition de Lebesgue de μ est donnée par $\mu = \sum_k \mu_s^{(k)} + \sum_k \mu_a^{(k)}$ et $\sum_k g_k$ est une dérivée de Radon-Nikodym de $\sum_k \mu_a^{(k)}$. Par le théorème 9.1.7 et la proposition 9.2.1, on a

$$\sum_{k} Df_{k}(x) = \sum_{k} D\mu_{k}(x) = \sum_{k} f_{k}(x) = D\mu(x) = Df(x)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour le cas général, il suffit de procéder comme dans la preuve du théorème 9.2.2. $\ \square$

Théorème 9.2.5 (Lebesgue). Si f appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{A}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$, où $\mathscr{A}_{\mathcal{L}}$ désigne la σ -algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables et $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est défini par $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, alors F est dérivable et de dérivée égale à f presque partout.

Démonstration. Supposons d'abord que f est positif et soit μ la mesure borélienne sur \mathbb{R} définie par $\mu(E) = \int_E f d\mathcal{L}$. Par la proposition 2.2.5, il existe une fonction borel-mesurable f_0 égale à f presque partout. Le théorème 9.1.7 et la proposition 9.2.1 impliquent les égalités

$$DF(x) = D\mu(x) = f_0(x) = f(x)$$

presque partout sur \mathbb{R} , ce qui termine la preuve lorsque f est positif. Pour le cas général, il suffit de considérer f^+ et f^- séparément.

Avant d'aborder les résultats suivant, remarquons que si une fonction conit nue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dérivable presque partout, alors sa dérivée est mesurable (pour la mesure de Lebesgue). Pour le voir, il suffit de remarquer que l'égalité $Df(x)=\overline{\lim}_k k(f(x+1/k)-f(x))$ est vérifiée pour presque tout $x\in[a,b[$ et que le membre de droite est une fonction Borel-mesurable sur [a,b[; on conclut grâce aux propositions 2.1.6, 2.2.3 et 1.4.66. Nous pouvons maintenant obtenir une caractérisation des fonctions absolument continues sur un intervalle compact de \mathbb{R} .

Corollaire 9.2.6. Une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue si et seulement si elle est dérivable presque partout et peut être obtenue à partir de sa dérivée par la formule $f(x) = f(a) + \int_a^x Df dt$.

 $D\acute{e}monstration$. Si f est absolument continu, f est à variation finie par la proposition 7.5.7 et la proposition 7.5.10 appliquée à la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ f(x) - f(x) & \text{si } a \le x \le b \\ f(b) - f(a) & \text{si } b < x \end{cases}$$

fournit une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$ pour laquelle $f(x) = f(a) + \int_a^x g dt$. Le théorème 9.2.5 implique alors que f est dérivable et de dérivée égale à g presque partout.

L'inverse se démontre aisément puisque la proposition 7.5.10 implique qu'une fonction f satisfaisant l'égalité de l'énoncé est absolument continue.

Nous pouvons maintenant démontrer la version suivante du théorème d'intégration par parties.

Corollaire 9.2.7. Si f et g sont deux fonctions absolument continues sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors on a

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b fDg \, dt + \int_a^b gDf \, dt.$$

Démonstration. Montrons que fg est absolument continu; les fonctions f et g étant continues sur le compact [a,b], soient les nombres $M=\sup_{x\in [a,b]}|f(x)|$ et $N=\sup_{x\in [a,b]}|g(x)|$. Soit $(]a_k,b_k[)_k$ une suite finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de [a,b]. Pour tout k, on a

$$|f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(b_k)| \le |f(b_k) - f(a_k)| |g(b_k)| + |f(a_k)| |g(a_k) - g(b_k)|$$

$$\le N|f(b_k) - f(a_k)| + M|g(a_k) - g(b_k)|,$$

ce qui implique

$$\sum_{k} |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)| \leq N \sum_{k} |f(b_k) - f(a_k)| + M \sum_{k} |g(b_k) - g(a_k)|.$$

Les fonctions f et g étant absolument continues, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si la suite $(]a_k, b_k[)_k$ vérifie $\sum_k b_k - a_k < \delta$, on a $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon/2(N+1)$ et $\sum_k |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon/2(M+1)$, ce qui prouve que fg est absolument continu.

Puisque f et g sont bornés, les fonctions fDg et gDf sont intégrables par le corollaire 9.2.6. Enfin, puisque D(fg) = fDg + gDf presque partout sur [a, b], le corollaire 9.2.6 appliqué à fg permet de conclure.

Le théorème 9.1.7 implique également le résultat suivant, qui est un résultat plus fort que que le théorème 9.2.5.

Proposition 9.2.8. Si f est une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{A}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$, où $\mathscr{A}_{\mathcal{L}}$ désigne la σ -algèbre des ensembles mesurables (pour la mesure de Lebesgue), alors, en désignant par I_x tout intervalle fermé contenant x, on a

$$\lim_{\ell(I_x)\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}(I_x)} \int_I |f(t) - f(x)| \, dt = 0 \tag{9.1}$$

presque partout.

Démonstration. Supposons d'abord que f est une fonction Borel-mesurable. Il suffit de montrer que pour tout intervalle borné]a,b[, la relation (9.1) est vérifiée pour presque tout $x \in]a,b[$. Pour tout nombre rationnel r, soit μ_r la mesure borélienne sur $\mathbb R$ définie par

$$\mu_r(E) = \int_E |f(t) - r| \chi_{]a,b[} dt.$$

Le théorème 9.1.7 implique l'existence d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle N_r tel que $D\mu_r(x) = |f(x) - r|$ pour tout x appartenant à $]a, b[\N_r]$. Soit l'ensemble négligeable $N = \bigcup_r N_r$ et supposons que x appartient à $]a, b[\N]$, que I est un sous-intervalle fermé de [a, b] contenant x et que r est un nombre rationnel. On a

$$\int_{I} |f(t) - f(x)| dt \int_{I} |f(t) - r| dt + \int_{I} |r - f(x)| dt,$$

ce qui permet d'écrire, en divisant chaque membre de cette égalité par $\mathcal{L}(I)$ et en faisant tendre la longueur de I vers zéro,

$$\overline{\lim}_{\ell(I)\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}(I)} \int_{I} |f(t) - f(x)| \, dt \leqslant D\mu_r(I) + |r - f(x)| \leqslant 2|f(x) - r|$$

pour tout r. L'égalité souhaitée est obtenue en faisant tendre r vers f(x).

Le cas général, lorsque f est simplement mesurable, est obtenu grâce à la proposition 2.2.5, en appliquant l'argument précédent à une fonction Borel-mesurable égale à f presque partout.

Définition 9.2.9. Un point $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie la relation (9.1) est appelé un point de Lebesgue de f et l'ensemble des points de Lebesgue de f est appelé l'ensemble de Lebesgue de f.

Remarque 9.2.10. Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$ et $F(x) = \int_{-\infty}^x f dt$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ non nul, on a $(F(x+h) - F(x))/h = \int_x^{x+h} f dt/h$. Si I désigne l'intervalle d'extrémités x et x+h, le théorème 9.2.8 implique que $\int_I f(t) dt/|h|$ tend vers $\int_I f(x) dt = f(x)$ pour presque tout x lorsque h tend vers zéro, ce qui est la thèse du théorème 9.2.5.

Un critère d'absolue continuité

Il est bien sûr intéressant de pouvoir disposer de conditions impliquant l'absolue continuité d'une fonction. Premièrement, une fonction continue sur un intervalle compact et dérivable presque partout n'est pas nécessairement absolument continue; l'hypothèse supplémentaire consistant à demander l'intégrabilité de la dérivée ne règle pas non plus le problème, comme en atteste l'escalier du Diable. En fait, la fonction définie explicitement par $x^2 \sin x^{-2}$ si $x \in]0,1]$ et par 0 si x=0 est dérivable sur [0,1] mais n'est pas absolument continue.

Lemme 9.2.11. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étendue semi-continue inférieurement $g:\mathbb{R} \to]-\infty,\infty]$ telle que $f \leqslant g$ sur [a,b] et $\int_a^b g dt < \int_a^b f dt + \varepsilon$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que f est positif; par la proposition 2.1.12, il existe une suite croissante (f_k) de fonctions positives simples et mesurables telle que $f = \lim_k f_k$. En posant $f'_1 = f_1$ et $f'_k = f_k - f_{k-1}$ pour k > 1, on a $f = \lim_k \sum_{j=1}^k f'_j$, où

les fonctions f_k' sont positives simples et mesurables. Pour tout k, la fonction f_k' s'écrit $f_k' = \sum_{j=1}^{n_k} c_j^{(k)} \chi_{E_j^{(k)}}$. Puisque la mesure de Lebesgue est régulière, il existe une suite $(U_j^{(k)})$ d'ensembles ouverts tels que $E_j^{(k)} \subset U_j^{(k)}$ et $\sum_{j=1}^{n_k} c_j^{(k)} \mathcal{L}(U_j^{(k)}) < \sum_{j=1}^{n_k} c_j^{(k)} \mathcal{L}(E_j^{(k)}) + \varepsilon/2^k$. Posons $g_k = \sum_{j=1}^{n_k} c_j^{(k)} \chi_{U_j^{(k)}}$. La fonction $g = \lim_k \sum_{j=1}^k g_k$ est semi-continue inférieurement et, par le corollaire 2.4.2, vérifie les inégalités de l'énoncé.

Si f est une fonction intégrable quelconque sur [a,b], pour tout k, soit la fonction étendue h_k définie par $h_k = \sup\{f,-n\}$. Par le théorème de la convergence dominée, on a $\int_a^b f dt = \lim_k \int_a^b h_k dt$ et il existe donc un entier n tel que $\int_a^b h_n dt < \int_a^b f dt + \varepsilon/2$. L'argument du paragraphe précédent appliqué à $h_n + n$ fournit une fonction semi-continue inférieurement g et la fonction dont l'existence est annoncée par le lemme est la fonction $g - n\chi_{[a,b]}$.

Lemme 9.2.12. Soient $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et C un sous-ensemble dénombrable de [a,b]. Si, pour tout $x \in [a,b] \setminus C$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f(t) > f(x) pour tout $t \in]x, x + \varepsilon[$, alors f est strictement croissant.

Démonstration. Montrons que f est croissant. Supposons qu'il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$. Pour tout y tel que $f(x_2) < y < f(x_1)$, soit $x_y = \sup\{x \in [x_1, x_2] : f(x) \geqslant y\}$. On a $f(x_y) = y$ et $f(t) < f(x_y)$ pour tout $t \in]x_y, x_2]$, ce qui implique $x_y \in C$. Le nombre de tels points x_y étant dénombrable, nous avons une contradiction. Enfin, une fonction croissante vérifiant l'inégalité de l'énoncé est nécessairement strictement croissante.

Théorème 9.2.13. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur [a,b], dérivable sur [a,b] sauf peut-être sur un nombre dénombrable de points et telle que Df est intégrable, alors f est absolument continu et $f(x) = f(a) + \int_a^x Df dt$ pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration. Soient f une fonction satisfaisant les hypothèses, C un sous-ensemble dénombrable de [a,b[tel que f est dérivable sur $[a,b[\setminus C$ et $\varepsilon>0$. Le lemme 9.2.11 appliqué à la fonction qui vaut Df(x) si $x\in [a,b[\setminus C$ et 0 sinon fournit une fonction semi-continue inférieurement g telle que $Df\leqslant g$ sur $[a,b[\setminus C$ et $\int_a^b gdt < \int_a^b Dfdt + \varepsilon$. Quitte à additionner une fonction continue positive à g si nécessaire, on peut supposer que l'on a Df< g sur $[a,b[\setminus C]$. Soit $h:[a,b]\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x)=f(a)+\int_a^x gdt$. Puisque g est semi-continu inférieurement, on a

$$\lim_{x' \to x} \frac{h(x') - h(x)}{x' - x} \geqslant g(x)$$

pour tout $x \in [a, b]$ et donc

$$\lim_{x' \to x} \frac{(h(x') - f(x') - (h(x) - f(x)))}{x' - x} \geqslant g(x) - Df(x) > 0$$

pour tout $x \in [a, b] \setminus C$. Par le lemme 9.2.12, h - f est croissant et puisque f(a) = h(a),

on a $f \leqslant h$. Au total, nous avons donc montré que l'égalité

$$f(x) \leqslant h(x) = f(a) + \int_{a}^{x} g \, dt$$
$$= f(a) + \int_{a}^{x} Df \, dt + \int_{a}^{x} g - Df \, dt$$
$$\leqslant f(a) + \int_{a}^{x} Df \, dt + \varepsilon$$

est vérifiée pour tout $x \in [a, b]$. Puisque ε est arbitraire, on a $f(x) \leq f(a) + \int_a^x Df dt$ pour tout x. L'inégalité inverse se démontre en appliquant le même argumant à -f, ce qui termine la preuve.

Chapitre 10

Mesure de Haar

10.1 Groupes topologiques

Définition 10.1.1. Un groupe topologique G est un ensemble muni d'une structure de groupe et d'une topologie telle que les opérations

$$G^2 \to G \quad (x,y) \mapsto xy$$

et

$$G \to G \quad x \mapsto x^{-1}$$

soient continues.

Bien entendu, la topologie considérée sur G^2 est la topologie produit. Remarquons qu'il ne suffit pas que le produit xy soit continu par rapport à x lorsque y est fixé et inversement pour que le produit soit continu.

Proposition 10.1.2. Si G un groupe topologique et H un sous-groupe de G muni de la topologie induite par G, alors H est un groupe topologique.

Démonstration. C'est direct, puisque la topologie produit pour H^2 est la topologie induite par G^2

Proposition 10.1.3. Soit $(G_j)_{j\in J}$ une famile de groupes topologiques et considérons $G = \prod_{j\in J} G_k$ muni de la topologie produit et de l'opération de groupe définie composante à composante; G est un groupe topologique.

Démonstration. Considérons le produit

$$G^2 \to G \quad ((x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J}) \mapsto (x_j y_j)_{j \in J}.$$

Par définition de la topologie produit, cette opération est continue si les applications

$$m_j: G^2 \to G_j \quad ((x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J}) \mapsto x_j y_j$$

sont continues pour tous $j \in J$. Or, $m_j = \cdot \circ p_j$, où p_j est la projection

$$p_j:G^2\to G_j^2\quad ((x_j)_{j\in J},(y_j)_{j\in J})\mapsto (x_j,y_j)$$

et \cdot est le produit de G_i .

On montre de la même manière que le passage à l'inverse est continu.

Lemme 10.1.4. Si G est un groupe topologique et U un ouvert de G, alors AU et UA sont ouverts pour toute partie A de G

Démonstration. De fait, on a, par exemple, $AU = \bigcup_{a \in A} aU$, où aU est un ouvert de G, l'application $x \mapsto ax$ étant un homéomorpisme (voir Proposition 10.1.24 pour les détails).

Proposition 10.1.5. Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe normal de G; si G/H est muni de la topologie quotient; alors G/H est un groupe topologique.

De plus, l'application passage au quotient

$$\pi:G\to G/H$$

est ouverte.

Démonstration. L'application π est ouverte. De fait, considérons un ouvert U de G et montrons que $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un ouvert de G. Or, on a $\pi^{-1} \circ \pi(U) = HU$, ce qui suffit, vu le lemme qui précède.

Considérons l'application

$$: (G/H)^2 \to G/H \quad ([x], [y]) \mapsto [xy].$$

Pour [x], [y] dans G/H, soit $[z] \in G/H$ tel que $[x] \cdot [y] = [z]$ et V un ouvert de G/H contenant [z]. Soit alors x et $y \in G$ tels que $\pi(x) = [x]$, $\pi(y) = [y]$ et posons z = xy. On a $\pi(z) = [\pi(x)\pi(y) = [z]$ et $U = \pi^{-1}(V)$ est un ouvert de G contenant z. Par continuité du produit, il existe deux ouverts U_x , U_y de G contenant x et y respectivement tels que $U_xU_y \subset U$. Soit $V_x = \pi^{-1}(U_x)$ et $V_y = \pi^{-1}(U_y)$. Vien sûr, V_x et V_y contiennent x et y respectivement et $V_xV_y \subset V$. De plus, puisque l'application π est ouverte, V_x et V_y sont deux ouverts de G.

Lemme 10.1.6. Si G est un groupe et un espace topologique, alors G est un groupe topologique si et seulement si l'application

$$f: G^2 \to G \quad (x,y) \mapsto xy^{-1} \tag{10.1}$$

est continue

 $D\'{e}monstration$. Si G est un groupe topologique, f est défini à partir des opérations produit et passage à l'inverse, qui sont continues.

Si f est continu, $x \mapsto x^{-1} = f(1, x)$ également. De là, l'application $x \mapsto xy = f(x, y^{-1})$ est continue, ce qui termine la démonstration

Proposition 10.1.7. Si G est un groupe topologique et si H est un sous groupe normal fermé dans G, alors G/H est de Hausdorff.

 $D\acute{e}monstration$. En effetn dans ce cas, G/H est de Hausdorff si et seulement si le graphe de la relation est fermé. Or, on a

$$\{(x,y)\in G^2: xy^{-1}\in H\}=f^{-1}(H),$$

où f est l'application (10.1), ce qui suffit

Définition 10.1.8. Un groupe topologique localement compact est un groupe topologique dont la topologie est localement compacte, i.e. tel que tout point du groupe admet un voisinage compact et de Hausdorff. Un groupe topologique compact est un groupe topologique dont la topologie est compacte et de Hausdorff.

Corollaire 10.1.9. Si G est un groupe topologique localement compact et H un sous groupe de G fermé, alors H est localement compact.

Démonstration. Nous savons déjà que H est de Hausdorff. Soit $x \in H$ et K un voisinage de x compact dans G. Bien entendu, $K \cap H$ est un voisinage de x dans H. Il est de plus compact dans H, puisque $K \cap H$ est un fermé inclus dans un compact.

Corollaire 10.1.10. Soit $(G_k)_{j\in J}$ une famile de groupes topologiques localement compacts et considérons le groupe topologique $G=\prod_{j\in J}G_j$; si J est fini, alors G est localement compact.

 $D\acute{e}monstration$. Tout produit de compact étant compact et tout produit d'espaces de Hausdorff étant de Hausdorff, il suffit de constater que tout produit fini de voisinages est un voisinage.

Corollaire 10.1.11. Si G est un groupe topologique localement compact et H un sous-groupe normal de G fermé, alors G/H est localement compact.

Démonstration. Nous avons déjà montré que G/H est de Hausdorff. Soit x un point de G et K un voisinage compact de x. Par continuité du passage au quotient, $\pi(K)$ est un compact de G/H. Puisque x appartient à K° et que π est une application ouverte, on a $\pi(x) \in \pi(K^{\circ}) \subset \pi(K)^{\circ}$, ce qui implique que $\pi(K)$ est un voisinage compact de $\pi(x)$. \square

Exemple 10.1.12. Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ (muni de la topologie euclidienne) est un groupe localement compact. Une base de la topologie euclidienne est donnée par les intervalles dy type $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Si on pose s(x, y) = x + y et i(x) = -x, on a

$$s^{-1}(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in]x - \varepsilon - y, x + \varepsilon - y[\}$$

et

$$i^{-1}(]x-\varepsilon,x+\varepsilon[)=]-x-\varepsilon,-x+\varepsilon[,$$

qui est bien un ouvert de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} respectivement. De plus, tout espace métrique étant de Hausdorff, il suffit de remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, [x-1,x+1] est un voisinage compact de x. Il en résulte que $(\mathbb{R}^d,+)$ est également un groupe topologique localement compact.

Remarque 10.1.13. En fait, \mathbb{R}^d est un espace vectoriel topologique, au sens où \mathbb{R}^d est un espace normé tel que la multiplication scalaire

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

est continue. C'est par conséquent également vrai pour tout espace vectoriel V de dimension d finie muni de la topologie qui fait de l'application

$$V \to \mathbb{R}^d \quad \sum_{k=1}^d x_k e_k \mapsto (x_1, \dots, x_d),$$

où e_1, \ldots, e_d est une base de V, un isomorphisme.

Exemple 10.1.14. Le groupe des nombres entiers $(\mathbb{Z},+)$ muni de la topologie induite par \mathbb{R} est un groupe localement compact. Vu les résultats déjà obtenus, il s'agit d'un groupe topologique. Une base de la topologie est donnée par les ensembles de la forme $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap\mathbb{Z},$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$. En particulier, pour tout $x\in\mathbb{Z},$ $\{x\}$ est un ensemble ouvert et compact qui contient x. On cocnlut, puisque tout sous-espace d'un espace de Hausdorff est de Hausdorff.

Exemple 10.1.15. Le groupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ muni de la topologie euclidienne est un groupe localement compact. Une base de la topologie est donnée par les ensembles $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\setminus\{0\},$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Pour p(x,y) = xy et i(x) = 1/x, on a

$$p^{-1}(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\setminus\{0\})$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, z \in]\frac{x - \varepsilon}{y}, \frac{x + \varepsilon}{y}[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0, z \in]\frac{x + \varepsilon}{y}, \frac{x - \varepsilon}{y}[\}$$

et

$$i^{-1}(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\setminus\{0\}) = \begin{cases} \frac{1}{x+\varepsilon}, \frac{1}{x-\varepsilon}[\setminus\{0\}] & \text{si } (x+\varepsilon)(x-\varepsilon) > 0\\ \frac{1}{x+\varepsilon}, \frac{1}{x-\varepsilon}[\cup] \frac{1}{x+\varepsilon}, \infty[& \text{si } (x+\varepsilon)(x-\varepsilon) < 0\\ \frac{1}{x+\varepsilon}, \infty[& \text{si } x - \varepsilon = 0\\ \frac{1}{x-\varepsilon}[& \text{si } x + \varepsilon = 0 \end{cases}$$

ce qui prouve la continuité des opérations. Bien entendu, tout sous-espace d'un espace de Hausdorff, étant de Hausdorff. Enfin, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ est un voisinage compact de x pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < |x|$.

Exemple 10.1.16. Le tore $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ muni de la multiplication de \mathbb{C} et de la topologie induite est un groupe compact. Il s'agit d'un groupe topologique, vu La Proposition 10.1.2 (en considérant $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$). Puisque tous ses éléments sont de norme unité, il est clairement fermé et borné.

Exemple 10.1.17. Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ muni de la topologie euclidienne est un groupe topologique qui n'est pas localement compact. Il est clair qu'il s'agit d'un groupe topologique. Montrons que 0 ne possède pas de voisinage compact (dans \mathbb{Q}). Si un tel voisinage existait, alors on pourrait trouver $\varepsilon > 0$ tel que $K = [-\varepsilon, \varepsilon] \cap \mathbb{Q}$ est un voisinage compact de 0 (en le prenant inclus dans le voisinage de départ). Quitte à diminuer ε , on peut supposer ce dernier irrationnel. Soit alors $(x_k)_k$ une suite de K qui converge vers ε ; puisque ε n'appartient pas à K, on ne peut extraire de $(x_k)_k$ une sous-suite qui converge vers ε dans K. Puisque cela contredit la compacité de K, cet ensemble ne peut exister.

Exemple 10.1.18. Un groupe G muni de la topologie discrète est un groupe topologique localement compact. Il est compact si et seulement si G est fini. Montrons d'abord que G est localement compact. D'abord, il s'agit d'un groupe topologique, toute partie de G ou G^2 étant ouverte. De plus, pour $x \in G$, $\{x\}$ est un voisinage de x compact. Supposons à présent G compact. Considérons le recouvrement $(\{x\})_{x\in G}$ de G. Il existe $x_1,\ldots,x_n\in G$ tels que $G\subset \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$, ce qui établit la finitude de G. La réciproque est évidente.

Exercice 10.1.19. Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ muni de la topologie la plus faible rendant les intervalles]a, b] ouverts n'est pas un groupe topologique, car l'inverse n'est pas continu. Suggestion: soit $s: (x, y) \mapsto x + y$ et $i: x \mapsto -x$. Les intervalles]a, b] formant une base, la somme est continue puisque

$$s^{-1}(]a,b]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]a - x, b - x]\}$$

est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Si

$$i^{-1}(]a,b]) = [-b, -a[$$

est un ouvert, $]-b-1,-b] \cap [-b,-a[$ l'est également. Ainsi, $\{-b\}$ est ouvert, ce qui implique que la topologie de $\mathbb R$ est la topologie discrète et les intervalles de la forme]a,b] ne peuvent constituer une base de la topologie considérée.

Exercice 10.1.20. Si G est un groupe non-dénombrable muni de la topologie co-dénombrable dont les ouverts sont soit le vide, soit le complémentaire d'un ensemble dénombrable, alors p(x,y) = xy n'est pas continu.

Suggestion: Les ensembles $U\times V$, où U et V sont des ouverts de G définissent une base de G^2 . Si U et V sont des ouverts non vides, alors $U\cap V$ est non vide, puisque $(U\cap V)^c=U^c\cup V^c$ est dénombrable, ce qui implique que $(U\cap V)^c$ est distinct de G. L'application $x\mapsto x^{-1}$ étant une bijection, U est ouvert si et seulement si U^{-1} est ouvert. En particulier, $U\cap V^{-1}$ est non vide. Pour de tels ensembles U et V, il existe $g\in G$ tel que $(g,g^{-1})\in U\times V$. Puisque $p^{-1}(1)=\{(g,g^{-1}):g\in G\},\ p^{-1}(1)\cap (U\times V)$ n'est pas vide, quels que soient les ouverts non vides U et V. Dès lors, $p^{-1}(1)$ ne peut être fermé, sinon $p^{-1}(1)^c$ serait ouvert et donc union d'ensembles $U\times V$, ce qui est absurde. Puisque $\{1\}$ est fermé et que $p^{-1}(1)$ ne l'est pas, p ne peut être continu.

Exercice 10.1.21. Le groupe $(\mathbb{R},+)$ muni de la topologie co-dénombrable (pour laquelle les ouverts sont les ensembles qui sont soit vide soit le complémentaire d'un ensemble dénombrable) ne définit pas un groupe topologique, car la somme, bien que continue selon chacune des composante, n'est pas continue.

Suggestion: D'abord, la topologie proposée est licite. Si U_j est ouvert pour tout $j \in J$, $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in J} U_j = \cap_{j \in J} \mathbb{R} \setminus U_j$. Cet ensemble est dénombrable, comme intersection de parties dénombrables. De même, $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \mathbb{R} \setminus U_j$ est dénombrable pour tout J fini. Si i(x) = -x, i(U) = -U est de complémentaire dénombrable pour tout ouvert U non vide, puisque i(U) est équipotent à U. Si s(x,y) = x + y, et $s_y(x) = x + y$, $s_y^{-1}(U) = U - y$ est équipotent à U. Le fait que s n'est pas continu découle de l'exercice précédent.

Exercice 10.1.22. Déterminer les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R}, +)$, pour la topologie euclidienne.

Suggestion : Il est connu que les sous-groupes de $\mathbb R$ sont soit le vide, soit de la forme $x\mathbb Z$, avec x>0, soit dense dans $\mathbb R$. Le vide et $\{0\}$ sont fermés. Si $G=x\mathbb Z$, avec x>0, G^c est ouvert, puisque pour tout $y\in G^c$, il existe $n\in \mathbb Z$ tel que nx< y<(n+1)x, ce qui implique l'existence d'un $\varepsilon>0$ tel que $nx< y-\varepsilon< y+\varepsilon<(n+1)x$. Autrement dit, on a $]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\subset G^c$, ce qui montre que G est fermé. Si G est dense dans $\mathbb R$, soit $G=\mathbb R$ (auquel cas, G est fermé), soit G n'est pas fermé, puisque $G=\mathbb R\neq G$. Dès lors, les sous-groupes fermés de $\mathbb R$ sont le vide, $\mathbb R$ et $x\mathbb Z$ avec x>0.

Définition 10.1.23. Un une partie B d'un groupe G est symétrique si $B = B^{-1}$.

Bien entendu, x^{-1} appartient à B^{-1} si et seulement s'il existe $b \in B$ tel que $x^{-1} = b^{-1}$, ce qui équivaut à demander $x \in B$. Autrement dit, B est symétrique si et seulement si $x \in B$ est équivalent à $x^{-1} \in B$.

Proposition 10.1.24. Soit G un groupe topologique et g un élément de G;

- les applications $x \mapsto gx$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont des homéomorphismes de G dans G,
- si \mathcal{U} est une base de voisinages de 1, alors $g\mathcal{U} = \{gU : U \in \mathcal{U}\}$ et $\mathcal{U}g$ sont des bases de voisinages de g,
- V est un voisinage de 1 si et seulement si V^{-1} est un voisinage de 1,
- V est un voisnage de 1 si et seulement si gVg^{-1} est un voisinage de 1,
- si K et L sont deux compacts de G, alors gK, Kg, KL et K^{-1} sont encore des compacts de G.

Démonstration. L'application $x \mapsto gx$ est la composée des applications continues $x \mapsto (g,x)$ et $(g,x)\mapsto gx$. De plus, cette application admet $x\mapsto a^{-1}x$ comme inverse. Le cas de $x\mapsto xg$ se traite de même. Bien sûr, l'inverse est son propre inverse.

Le deuxième point découle du point précédent. Pour $U \in \mathcal{U}$, gU contient ge = g et pour tout ouvert V tel que $1 \in V \subset U$, alors gV est un ouvert tel que $g \in gV \subset gU$. Ainsi, gU est un voisinage de g. Si V est un voisinage de g, $g^{-1}V$ est un voisinage de 1 et il existe donc $U \in \mathcal{U}$ tel que $U \subset g^{-1}V$ et donc $gU \subset V$. Ainsi, $g\mathcal{U}$ est une base de voisinages de g. Le cas de $\mathcal{U}g$ est identique.

Le troisième point est évident, puisque l'inverse est un homéomorphisme qui envoie 1 sur lui-même.

Le quatrième point est également aisé, puisque l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ est un homéomorphisme comme composé des des homéomorphismes $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg^{-1}$.

Les ensembles gK, Kg et K^{-1} sont compacts vu le premier point et le fait que l'image continue d'un compact est compact. Enfin, KL est l'image de $K \times L$ par l'opération de groupe, ce dernier ensemble étant compact, comme produit de compacts.

Proposition 10.1.25. Si G un groupe topologique et U un voisinage ouvert de 1, alors

- il existe un voisinage ouvert V de 1 tel que $VV \subset U$,
- il existe un voisinage ouvert et symétrique de 1 qui est inclus dans U; ainsi, l'ensemble des voisinages symétriques de 1 est une base de voisinages de 1.

Démonstration. l'application p(x,y) = xy étant continue, l'ensemble

$$W = \{(x, y) \in G^2 : xy \in U\} = p^{-1}(U)$$

est un voisnage de ouvert de (1,1) dans G^2 . Par conséquent, il existe des voisinages ouverts V_1 et V_2 de 1 qui satisfont $V_1 \times V_2 \subset W$. Dès lors, $V = V_1 \cap V_2$ est un voisinage ouvert de 1 tel que $VV = p(V^2) \subset p(W) \subset U$.

Vu le troisième point de la Proposition 10.1.24, U^{-1} est un voisinage ouvert de 1. Ainsi, $U \cap U^{-1}$ est un voisinage ouvert de 1 inclus dans U. Pour la symétrie, il suffit de remarquer que l'on a

$$x \in U \cap U^{-1} \Leftrightarrow x \in U \text{ et } x = (x^{-1})^{-1} \in U^{-1}$$

 $\Leftrightarrow x^{-1} \in U^{-1} \text{ et } x^{-1} \in U$
 $\Leftrightarrow x^{-1} \in U \cap U^{-1},$

ce qui suffit.

Remarque 10.1.26. Vu les points du résultat précédant, il existe un voisinage ouvert V de 1 tel que $VV^{-1} \subset U$ (ou tel que $V^{-1}V \subset U$. On peut aussi utiliser la continuité de l'application $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ pour obtenir ce résultat.

Proposition 10.1.27. Soit G un groupe topologique, K un compact de G et U une partie ouverte de G contenant K; il existe des voisinages ouverts V_r et V_l de 1 tels que $KV_r \subset U$ et $V_lK \subset U$.

Démonstration. Vu le second point de la Proposition 10.1.24 et le premier point de la Proposition 10.1.25, pour tout $x \in K$, il existe des voisinages ouverts V_x et W_x de 1 tels que $xW_x \subset U$ et $V_xV_x \subset W_x$. Puisque $\{xV_x : x \in K\}$ définit un recouvrement de K, il existe x_1, \ldots, x_n $(n \in \mathbb{N})$ appartenant à K tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n x_k W_{x_k}$. Soit alors $V_r = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$. Étant donné $x \in K$, soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in x_k V_{x_k}$. On a

$$xV_r \subset x_k V_{x_k} V_r \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k W_{x_k} \subset U.$$

On a donc $KV_r \subset U$, ce qui suffit, le cas de V_l étant similaire.

Proposition 10.1.28. Si G est un groupe topologique et A est une partie de G, on a

$$\bar{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} AV,$$

où V est l'ensemble des voisinages ouverts de 1.

Démonstration. Puisqu'un point y de G appartient à \bar{A} si et seulement si tout voisinage ouvert V de y est d'intersection non vide avec A, vu la Proposition meshaar :voiscie, cela revient à demander $yV^{-1} \cap A \neq \emptyset$ pour tout voisinage ouvert V de 1. Cela revient à demander l'existence d'un point $x \in A$ tel que $y \in xV$, ce qui donne $y \in AV$.

Exercice 10.1.29. Si G est un groupe topologique non vide, les conditions suivantes sont équivalentes :

- le topologie de G est de Hausdorff,
- pour tout $g \in G$, $\{g\}$ est fermé,
- il existe $g \in G$ tel que $\{g\}$ est fermé.

Suggestion : Montrons que le premier point implique le second. Si 1 est l'unique élément de G, alors $\{1\} = G$ est fermé. Sinon, pour tout $h \in G \setminus \{g\}$, il existe un ouvert U contenant h mais pas g, ce qui implique $h \in U \subset G \setminus \{g\}$. Ainsi, $G \setminus \{g\}$ est un voisinage de chacun de ses points, donc ouvert.

Montrons que le troisième point implique le premier. Remarquons d'abord que, l'application $p_g: x \mapsto g^{-1}x$ étant un homéomorphisme, $\{1\} = p_g(\{g\})$ est fermé. De plus, l'application

$$p: G^2 \to G \quad (x,y) \mapsto xy^{-1}$$

étant continue,

$$p^{-1}(\{e\}) = \{(x,y) : xy^{-1} = e\} = \{(x,x) : x \in G\}$$

est fermé, ce qui montre que la diagonale de G est fermé.

Exercice 10.1.30. Si G un groupe topologique de Hausdorff, E un compact de G et F un fermé, montrer que EF est fermé.

Suggestion: Bien sûr, si EF = G, alors EF est fermé. Sinon, considérons l'application

 $p:(x,y)\mapsto x^{-1}y$ et g un élément n'appartenant pas à EF. On a $E\times\{g\}\subset p^{-1}(F^c)$, puisque, pour tout $x\in E$, $p(x,g)=x^{-1}g\in F$ implique $g\in EF$. L'application p étant continue, $p^{-1}(F^c)$ est ouvert. Puisque $E\times\{g\}$ est compact, vu la Proposition 10.1.27, il existe des voisinages ouverts V_1 et V_2 de 1 tels que

$$E \times gV_2 \subset (E \times \{g\})(V_1 \times V_2) \subset p^{-1}(F^c).$$

Ainsi, gV_2 est un voisinage de g tel que $E^{-1}gV - 2 \subset F^c$, ce qui implique $gV_2 \subset (EF)^c$. En effet, s'il existe $x \in V_2$ tel que $gx \in EF$, soit gx = yz, avec $y \in E$ et $z \in F$. On a $y^{-1}gx = z \in F$ et $y^{-1}gx \in E^{-1}gV_2 \subset F^c$, ce qui est absurde. Ainsi, $(EF)^c$ est un voisinage de chacun de ses points.

Exercice 10.1.31. Si G un groupe topologique de Hausdorff et E, F des parties fermées de G, donner un exemple où EF n'est pas fermé.

Suggestion : Considérer les fermés

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\}$$

et

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ et } y \leqslant 0\},\$$

pour constater que $E + F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ n'est pas fermé dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 10.1.32. Le groupe $GL_d(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par \mathbb{R}^{d^2} est un groupe topologique localement compact. Pour $A \in GL_d(\mathbb{R})$, soit \mathcal{A} la matrice telle que $\mathcal{A}_{j,k} = (-1)^{j+k} \det A(k,j)$, où A(k,j) est la matrice de dimension d-1 obtenue en enlevant la k-ième ligne et la j-ième colonne de A. On a $A\mathcal{A} = \det(A)I = \mathcal{A}A$ et l'application

$$\operatorname{GL}_d(\mathbb{R})^2 \to \operatorname{GL}_d(\mathbb{R}) \quad (A, B) \mapsto A^{-1}B = \frac{1}{\det A} AB$$

est dès lors continue. Il en résulte que $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est un groupe topologique. Il est localement compact, puisque de dimension finie.

Exercice 10.1.33. Soit G l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
,

avec a > 0 et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que G muni de la multiplication matricielle et de la topologie induite par \mathbb{R}^4 est un groupe localement compact.

Suggestion : Il est clair que l'opération est interne et que l'identité appartient à G. De plus, on a det A>0 pour tout $A\in G$, ce qui implique que tout élément de G est inversible. On constate directement que A^{-1} appartient également à G. Dès lors, $G\subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est un groupe topologique (on peut aussi vérifier directement que les opérations sont continues). Pour montrer que G est localement compact, soit a>0, $b\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$ tel que $a-\varepsilon>0$. L'ensemble

$$[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [b - 1, b + 1] \times \{0\} \times \{1\}$$

est un voisinage compact de

$$\left(\begin{array}{c} a \\ b \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

dans G.

Exemple 10.1.34. Le groupe O_d muni de la topologie induite par \mathbb{R}^{d^2} est un groupe compact. Il s'agit clairement d'un groupe topologique (vu que GL_d est lui-même un goupe topologique). Une matrice A est orthogonale si et seulement si

$$\sum_{l=1}^{d} A_{kl} A_{lj} = \delta_{kj},$$

pour tous $k, j \in \{1, ..., d\}$, ce qui montre que ce groupe est fermé. De plus, l'égalité précédente implique $\sum_{l=1}^{d} (A_{lj})^2 = 1$, d'où le caractère borné de O_d .

Rappelons la définition suivante.

Définition 10.1.35. Étant donné un groupe topologique G, une fonction $f: G \to \mathbb{C}$ est uniformément continue à gauche (resp. uniformément continue à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert U de 1 tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous x et y de G tels que $y \in xU$ (resp. $y \in Ux$).

Remarque 10.1.36. Quitte à prendre une partie de U, on peut supposer que le voisinage ouvert de la définition précédente est symétrique. Dans ce cas, $x \in yU$ est équivalent à $y \in xU$, puisque

 $x \in yU \Leftrightarrow x \in yU^{-1} \Leftrightarrow x \in yu^{-1}$ pour un $u \in U \Leftrightarrow xu = y$ pour un $u \in U \Leftrightarrow y \in xU$.

Proposition 10.1.37. Si G est un groupe topologique localement compact, alors toute fonction de $C_c^0(G)$ est uniformément continue à gauche et à droite.

Démonstration. Soit $f \in C_c^0(G)$ et notons K le support de f. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in K$, il existe un voisinage ouvert U_x de 1 tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ pour tout $y \in xU_x$, vu le second point de la Proposition meshaar :voiscie. Soit alors un voisinage ouvert V_x de 1 tel que $V_xV_x \subset U_x$. Puisque $\{xV_x: x \in K\}$ définit un recouvrement ouvert de K, il existe x_1, \ldots, x_n $(n \in \mathbb{N})$ appartenant à K tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n x_k V_{x_k}$. Soit alors V un voisinage ouvert et symétrique de 1 qui est inclus dans $\bigcap_{k=1}^n x_k V_{x_k}$. Soit x et y deux points de G tels que $y \in xV$. Si aucun de ces points n'appartient à K, alors f(x) = f(y) = 0. Supposons que x soit un point de K. Il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in x_k V_{x_k}$. Pour tout $z \in V_{x_k}$, on a $z = z1 \in V_{x_k} V_{x_k} \subset U_{x_k}$, donc $x \in x_k U_{x_k}$. De plus, on a $y \in xV \subset x_k V_{x_k} V_{x_k} \subset x_k U_{x_k}$. On a dès lors

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \varepsilon.$$

Le voisinage V étant symétrique, la condition $y \in xV$ est équivalente à $x \in yV$ et le cas où $y \in K$ et $y \in xV$ peut être traité de manière similaire. Ceci établit la continuité uniforme à gauche de f. Le cas de la continuité uniforme à droite est similaire. \square

Exercice 10.1.38. Déduire la Proposition 10.1.37 de la Proposition 10.1.27. Suggestion: Soit G un groupe topologique localement compact, $f \in C_c^0(G)$ et fixons $\varepsilon > 0$. Si K_f désigne le support de f, soit

$$K = \{(x, x) \in G^2 : x \in K_f\}$$
 et $U = \{(x, y) \in G^2 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}.$

Vu la Proposition 10.1.27, il existe des voisinages ouverts V_r et V_l de (1,1) dans G^2 tels que KV_r et V_lK soient inclus dans U. Quitte à prendre des voisinages plus petits, on peut supposer qu'ils peuvent s'écrire $V_r^{(1)} \times V_r^{(2)}$ et $V_l^{(1)} \times V_l^{(2)}$ respectivement, où $V_r^{(1)}$,

 $V_r^{(2)}$, $V_l^{(1)}$ et $V_l^{(2)}$ sont des voisinages ouverts de 1. De là, il existe deux voisinages ouverts symétriques U_r et U_l de 1 tels que $U_r \subset V_r^{(1)} \times V_r^{(2)}$ et $U_l \subset V_l^{(1)} \times V_l^{(2)}$. Montrons que l'absolue continuité de f. C'est bien sûr évident si x ou y n'appartient pas au support de f. Soit x un point du support de f et $y \in xU_r$; on a

$$(x,y) = (x,x)(1,x^{-1}y) \in K(V_r^{(1)} \times U_r) \subset KV_r \subset U,$$

ce qui suffit dans ce cas. Pour y dans le support de f et $y \in xU_r$, on obtient de même

$$(x,y) = (y,y)(y^{-1}x,1) \in K(U_r \times V_r^{(2)}) \subset KV_r \subset U,$$

ce qui établit l'absolue continuité à gauche. On montre de même l'absolue continuité à droite.

Corollaire 10.1.39. Si G est un groupe localement compact et μ une mesure de Borel régulière sur G, pour tout $f \in C_c^0(G)$, les fonctions

$$G \to \mathbb{R}$$
 $x \mapsto \int f(xy) \, d\mu(y)$ et $G \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \int f(yx) \, d\mu(y)$

sont continues.

Démonstration. Considérons la continuité de la seconde fonction, le cas de la première se traitant de la même manière. Soit x_0 un point de G, K le support de f et W un voisinage ouvert de x_0 dont l'adhérence est compacte. Pour tout $x \in W$, la fonction $x \mapsto f(yx)$ est continue comme composée des applications $y \mapsto yx$ et f. Si y n'appartient pas à KW^{-1} , yx n'appartient pas à K, sinon on aurait yx = z pour un point $z \in K$ et donc $y = zx^{-1} \in KW^{-1}$. En conséquence, $y \mapsto f(yx)$ s'annule hors de l'ensemble compact $K\overline{W}^{-1}$ (vu le dernier point de la Proposition 10.1.24). Pour $\varepsilon > 0$, soit $\varepsilon' > 0$ tel que $\varepsilon'\mu(K\overline{W}^{-1}) < \varepsilon$ (un tel nombre existe, μ étant fini sur les compacts car de Borel). Vu la continuité uniforme à gauche de f, il existe un voisinage ouvert V de 1 tel que $|f(s) - f(t)| < \varepsilon'$ pour tout points s et t de G tels que $s \in tV$. Pour tout $x \in W \cap x_0V$ et tout $y \in G$, on a $yx \in yx_0V$, donc

$$\left| \int f(yx) \, d\mu(y) - \int f(yx_0) \, d\mu(y) \right| \leqslant \int |f(yx) - f(yx_0)| d\mu(y) \leqslant \varepsilon' \mu(K\overline{W}^{-1}) < \varepsilon.$$

On peut conclure, $W \cap x_0V$ étant un voisinage de x_0 .

Exercice 10.1.40. Soit G le groupe localement compact de l'Exercice 10.1.33; construire une fonction qui est uniformément continue à droite, mais pas uniformément continue à gauche.

Suggestion: Soit

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

et

$$f: G \to \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto g(b).$$

Montrons que f est uniformément continu à gauche. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$x_n = \begin{pmatrix} e^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 et $y_n = \begin{pmatrix} e^{-n} & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a

$$x_n^{-1}y_n = \left(\begin{array}{cc} 1 & e^{-n}n\\ 0 & 1 \end{array}\right),$$

donc $x_n^{-1}y_n$ converge vers l'identité. Cependant, on a

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |0 - \frac{n}{1+n}| = \frac{n}{1+n},$$

ce qui prouve que f n'est pas uniformément continu à gauche. Pour $\varepsilon>0$, considérons le voisinage ouvert V_ε de l'identité défini par

$$V_{\varepsilon} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 1 \end{array} \right) : |a - 1| < \varepsilon, |b| < \varepsilon \right\}.$$

Considérons les éléments

$$x = \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad y = \left(\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

de G tels que $y \in V_{\varepsilon}x$. On a $|\frac{y_1}{x_1} - 1| < \varepsilon$ et $|y_2 - \frac{x_2y_1}{x_1}| < \varepsilon$ si et seulement si $\frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2|} < \varepsilon$. De plus $x_2y_2 \ge 0$ implique $x_2|y_2| - |x_2|y_2 = 0$ et $x_2y_2 < 0$ implique $|x_2|y_2| - |x_2|y_2| = 2|x_2y_2| < 2\varepsilon^2/(1-\varepsilon)$. On en tire que

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x_2}{1 + |x_2|} - \frac{y_2}{1 + |y_2|} \right| = \left| \frac{x_2 + x_2|y_2| - y_2 - y_2|x_2|}{(1 + |x_2|)(1 + |y_2|)} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x_2 - y_2}{(1 + |x_2|)(1 + |y_2|)} \right| + \left| \frac{x_2|y_2| - y_2|x_2|}{(1 + |x_2|)(1 + |y_2|)} \right|$$

$$\leq \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2|} + |x_2|y_2| - y_2|x_2| < \varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon},$$

ce qui montre que f est absolument continu à droite.

Proposition 10.1.41. Si H est un sous-groupe ouvert du groupe topologique G, alors H est fermé.

Démonstration. Montrons que le complémentaire de H est l'union des familles $\{xH : x \in G \setminus H\}$. Si y appartient au complémentaire de H, alors

$$y=y1\in yH\subset \bigcup_{x\in G\backslash H}xH.$$

Inversement, si y appartient à xH pour un $x \in G \setminus H$, il existe $z \in H$ tel que y = xz. Si y appartenait à H, on aurait $x = yz^{-1} \in H$, ce qui est absurde. Puisque les ensembles xH sont ouverts, $G \setminus H$ est lui-même ouvert.

Définition 10.1.42. Un espace topologique est σ -compact s'il peut s'écrire comme une union dénombrable de sous-espaces compacts.

Proposition 10.1.43. Si G est un groupe topologique localement compact, alors il existe un sous-groupe H de G qui est ouvert, fermé et σ -compact.

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de 1 dont l'adhérence est compacte et V un voisinage ouvert et symétrique de 1 qui est inclus dans U; bien entendu, \bar{V} est compact, comme fermé d'un compact. Définissons alors $H = \bigcup_{k \geqslant 1} V^k$ et montrons qu'il s'agit d'un sous-groupe de G. Si x et y sont deux points de H, on a $x \in V^k$ et $y \in V^j$ pour deux nombres j et k de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $xy \in V^{j+k}$. De plus, on a

$$x \in V^k \Leftrightarrow x = x_1 \cdots x_k \quad x_1, \dots, x_k \in V$$
$$\Leftrightarrow x^{-1} = x_k^{-1} \cdots x_1^{-1} \quad x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1} \in V$$
$$\Leftrightarrow x^{-1} \in V^k.$$

vu la symétrie de V.

Montrons que H est ouvert. Puisque V est ouvert, V^2 également, ce qui implique que V^k est ouvert, par récurrence. Ainsi, H est ouvert. Par la Proposition meshaar :ouvferme, H est également fermé.

Montrons enfin que H est σ -compact. Puisque V^k est inclus dans H pour tout k, on a $\overline{V^k} \subset \overline{H} = H$, d'où $H = \bigcup_{k \geqslant 1} \overline{V^k}$. De plus, puisqu'on a $\overline{V^k} \subset \overline{V}^k$, $\overline{V^k}$ est compact, comme fermé d'un compact, ce qui permet de conclure.

10.2 Existence et unicité de la mesure de Haar

Définition 10.2.1. Si G est un groupe topologique localement compact, une mesure nonnulle de Borel et régulière de G est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) si elle est invariante par translation à gauche (resp. à droite) : $\mu(xA) = \mu(A)$ (resp. $\mu(Ax) = \mu(A)$) pour tout $x \in G$ et tout borélien de G.

Remarque 10.2.2. Puisque, dans un groupe topologique, la multiplication à droite ou à gauche définit un homéomorphisme, pour tout borélien A et tout élément x du groupe topologique, xA et Ax sont encore des boréliens du groupe topologique.

Exemple 10.2.3. Le mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d (considéré comme un espace vectoriel) est une mesure de Haar (à gauche et à droite).

Exemple 10.2.4. Si G est un groupe muni de la topologie discrète, la mesure de comptage est une mesure de Haar (à gauche et à droite). Il s'agit d'une mesure non-nulle invariante par translation. Vu l'Exemple 10.1.18, la mesure de comptage de tout compact est finie. Enfin, tout ensemble est ouvert et si U est fini, il est nécessairement compact. Si U n'est pas fini, toute partie U_n de U de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est compacte et

$$\sup\{\mu(K): K \subset U, K \text{ compact}\} = \sup_{n}\{\mu(U_n)\} = \lim_{n} n = \infty = \mu(U),$$

où μ désigne la mesure de comptage.

Exemple 10.2.5. Soit \mathbb{T} l'ensemble des nombre complexes de module unité muni de la structure de groupe topologique donnée dans l'Exemple 10.1.16. Soit \mathcal{L} la mesure de Lebesgue restreinte au boréliens de l'intervalle $[0, 2\pi]$ et

$$F: [0, 2\pi] \to \mathbb{T} \quad \theta \mapsto e^{i\theta}.$$

La mesure $\mathcal{L}_F = \mathcal{L} \circ F^{-1}$ est une mesure de Haar (à gauche et à droite) de \mathbb{T} , appelée mesure de Lebesgue linéaire sur \mathbb{T} . Pour tout borélien B de \mathbb{T} et tout $\theta \in [0, 2\pi[$, on a

$$\mathcal{L}_F(e^{i\theta}B) = \mathcal{L}_F(e^{i\theta}b : b \in B\}) = \mathcal{L}(\theta F^{-1}(B)) = \mathcal{L}(F^{-1}(B)) = \mathcal{L}_F(B).$$

Le cas à droite s'obtient de même.

Notation 10.2.6. Soit G un groupe, $x \in G$ et f une fonction définie sur G. Le translaté à gauche de f, noté xf est la fonction définie sur G par

$$_x f(g) = f(x^{-1}g),$$

pour tout $g \in g$. De même le translaté à droite f_x de f est la fonction

$$f_x(g) = f(gx^{-1}),$$

pour tout $g \in G$. Enfin, \check{f} est la fonction définie sur G par

$$\check{f}(g) = f(g^{-1}).$$

Remarque 10.2.7. Soit x et y deux éléments d'un groupe G. Pour tout $g \in G$, on a

$$f_{xy}(g) = f(g(xy)^{-1}) = f(gy^{-1}x^{-1}) = f_x(gy^{-1}) = (f_x)_y(g).$$

On montre de la même manière que xyf = x(yf).

Remarque 10.2.8. On pourrait penser qu'il est plus naturel de définir f_x via la l'égalité $f_x(g) = f(gx)$. Cependant, avec une telle définition, on n'a pas $(\chi_A)_x = \chi_{A_x}$ pour toute partie A de G. Alors qu'avec la notation adoptée, on a

$$(\chi_A)_x(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } gx^{-1} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in Ax \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \chi_{Ax}(g).$$

Remarque 10.2.9. Si G est un groupe localement compact et μ est une mesure de Haar à droite (resp. à gauche) sur G, alors $\int f_x dx = \int f dx$ (resp. $\int_x f dx = \int f dx$) pour toute fonction f borél-mesurable qui est positive ou intégrable. De fait, si $f = \chi_A$ pour une borélien A, alors

$$\int f_x d\mu = \int \chi_{Ax} d\mu = \mu(Ax) = \mu(A) = \int f d\mu.$$

Par linéarité, cette propriété est encore vérifiée pour tout fonction simple f. Le théorème de la convergence monotone permet d'affirmer que cette propriété est encore vraie pour toute fonction positive mesurable. Pour les fonctions intégrables, il suffit de décomposer en les parties positive et négative.

Théorème 10.2.10. Tour groupe topologique localement compact admet une mesure de Haar à qauche.

Démonstration. Soit G un groupe toplogique localement compact, K un compact de G. Pour tout ensemble E de G d'intérieur non vide, $\{xE^{\circ}:x\in G\}$ définit un recouvrement ouvert de K. Il existe donc des points x_1,\ldots,x_n de G tels que $K\subset \bigcup_{k=1}^n x_k E^{\circ}$. Notons #(K:E) le plus petit nombre naturel n pour lequel on a cette inclusion; bien sûr,

#(K:E) est nul si et seulement si K est vide. Soit K_0 un compact d'intérieur non vide de G, \mathscr{F} la famille de tous les compacts de G et \mathcal{V} la famille des voisinages ouverts de 1. Pour $U \in \mathcal{V}$, soit

$$h_U: \mathscr{F} \to \mathbb{R} \quad K \mapsto \frac{\#(K:U)}{\#(K_0:U)}.$$

Nous allons montrer que l'application h_U satisfait les propriétés suivantes pour tous compacts K_1 et K_2 :

- $-0 \leqslant h_U(K_1) \leqslant \#(K_1:K_0),$
- $-h_U(K_0)=1,$
- $-h_U(xK_1) = h_U(K_1)$, pour tout x,
- h_U est croissant : $K_1 \subset K_2$ implique $h_U(K_1) \subset h_U(K_2)$,
- h_U est sous-additif: $h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2)$,
- $-h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2)$ si $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1}$ est vide.

Montrons d'abord que l'on a

$$\#(K_1:U) \leqslant \#(K_1:K_0)\#(K_0:U).$$

Soit x_1, \ldots, x_n et y_1, \ldots, y_m des points de G tels que $K_1 \subset \bigcup_{k=1}^n x_k K_0$ et $K_0 \subset \bigcup_{k=1}^m y_k U$. On a $K_1 \subset \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^m x_k y_j U$, ce qui suffit. Dès lors, la première propriété est toujours vérifiée, la seconde étant triviale. Maintenant, on a $K = \bigcup_{k=1}^n x_k U$ si et seulement si $xK = \bigcup_{k=1}^n (xx_k)U$, ce qui montre le troisième point. Le quatrième point est également trivial. Maintenant, si on a $K_1 \subset \bigcup_{k=1}^n x_k U$ et $K_1 \subset \bigcup_{k=1}^m y_k U$, il vient directement

$$K_1 \cup K_2 \subset (\bigcup_{k=1}^n x_k U) \cup (\bigcup_{j=1}^m y_j U),$$

ce qui établit la cinquième relation. Pour établir le dernier point, il nous faut montrer que pour $K_1U^{-1}\cap K_2U^{-1}=\emptyset$, on a

$$\#(K_1:U) + \#(K_2:U) \leq \#(K_1 \cup K_2:U).$$

Soit $n = \#(K_1 \cup K_2 : U)$ et x_1, \ldots, x_n des points de G tels que $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{k=1}^n x_k U$. Si $x_k U$ rencontre à la fois K_1 et K_2 , alors x appartient à $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$. On peut donc supposer que ce n'est pas le cas et il existe donc $N \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $K_1 \subset \bigcup_{k \in N} x_k U$ et $K_2 \subset \bigcup_{k \in M} x_k U$, avec $M = \{1, \ldots, n\} \setminus N$. Les propriétés de h_U ont donc été établies. Pour $K \in \mathscr{F}$, soit $I_K = [0, \#(K : K_0]]$ et posons

$$X = \prod_{K \in \mathscr{F}} I_K,$$

que l'on munit de la topologie produit. Puisque chaque I_K est compact, X est lui-même compact. Vu la première propriété de h_U , on a $h_U \in X$ pour tout $U \in \mathcal{V}$. Pour tout voisinage ouvert V de 1, posons

$$S_V = \overline{\{h_U : U \in \mathcal{V} \text{ et } U \subset V\}}.$$

Bien sûr, si V_1, \ldots, V_n appartiennent à \mathcal{V} , alors, pour $V = \bigcap_{k=1}^n V_k$, on a $h_V \in \bigcap_{k=1}^n S_{V_k}$. En particulier, $\{S_V : V \in \mathcal{V}\}$ est une famille de fermés de X satisfaisant la propriété d'intersection finie. Puisque X est compact, $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} S_V$ n'est pas vide. Soit h un élément de cette intersection. Nous allons vérifier que h satisfait les propriétés suivantes pour tous compacts K_1 et K_2 :

- $--0 \leqslant h(K_1),$
- $-h(\varnothing)=0,$
- $-h(K_0)=1,$
- $--h(xK_1) = h(K),$
- h est croissant,
- -h est sous-additif,
- si K_1 et K_2 sont disjoints, alors $h(K_1 \cup K_2) = h(K_1) + h(K_2)$.

Montrons la sous-additivité. Les éléments de X sont des fonctions $f: \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $K \in \mathscr{F}$, l'application

$$\pi: X \to \mathbb{R} \quad f \mapsto f(K)$$

est continue. Ainsi, pour K_1 et K_2 de \mathscr{F} , l'application

$$\varphi: X \to \mathbb{R} \quad f \mapsto f(K_1) + f(K_2) - f(K_1 \cup K_2)$$

est continue. Qui plus est, elle est positive en h_U et donc, pour $V \in \mathcal{V}$, on a

$$S_V = \overline{\{h_U : U \in \mathcal{V}, U \subset V\}} \subset \overline{\varphi^{-1}([0,\infty[))} = \varphi^{-1}([0,\infty[),$$

ce qui implique que φ est positif sur $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} S_V$ et donc en h. Pour $f \in X$, on a $f(K) \in I_K$ $(K \in \mathscr{F})$, ce qui montre que la première propriété est vérifiée. Pour obtenir les premières propriétés, on procède comme pour la sous-additivité. L'application

$$X \to \mathbb{R}$$
 $f \mapsto f(\emptyset)$

est continue et s'annule pour chaque h_U , ce qui montre le second point. De même, l'application

$$X \to \mathbb{R}$$
 $f \mapsto f(K_0)$

est continue et vaut 1 en chaque h_U , ce qui montre le troisième point. Pour $x \in G$ et $K \in \mathcal{F}$, l'application

$$X \to \mathbb{R}$$
 $f \mapsto f(xK) - f(K)$

est continue et s'annule en chaque h_U , ce qui montre le quatrième point. Enfin, si K_1 et K_2 sont deux compacts tels que $K_1 \subset K_2$, l'application

$$X \to \mathbb{R}$$
 $f \mapsto f(K_2) - f(K_1)$

est continue et positive en chaque h_U , ce qui montre la croissance de h. Montrons le dernier point. Soit K_1 et K_2 deux compacts disjoints de G. Vu la Proposition A.2.21, il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $K_1 \subset U_1$ et $K_2 \subset U_2$. Maintenant, vu la Proposition 10.1.27, il existe deux voisinages ouverts V_1 et V_2 de 1 tels que $K_1V_1 \subset U_1$ et $K_2V_2 \subset U_2$. Pour $V = V_1 \cap V_2$, K_1V et K_2V sont disjoints car inclus dans U_1 et U_2 respectivement. Pour tout $U \in \mathcal{V}$ tel que $U \subset V^{-1}$, on a

$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2),$$

puisque $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} \subset K_1V \cap K_2V = \emptyset$. Par conséquent, l'application continue

$$X \to \mathbb{R}$$
 $f \mapsto f(K_1) + f(K_2) - f(K_1 \cup K_2)$

s'annule sur $S_{V^{-1}}$, ce qui suffit, puisue h appartient à $S_{V^{-1}}$. Si U est un ouvert de G, posons

$$\mu^*(U) = \sup\{h(K) : K \subset U \text{ et } K \in \mathscr{F}\}\$$

et pour toute partie A de G, définissons l'application μ^* par

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) : A \subset U \text{ et } U \text{ ouvert}\}.$$

Vu les deux premières propriétés de h, μ^* est positif et $\mu^*(\varnothing) = 0$. Montrons qu'il s'agit d'une mesure extérieure. L'application est clairement croissante. Il reste à montrer que μ^* est dénombrablement sous-additif. Soit $(U_k)_k$ une suite d'ouverts de G et K un compact de $\bigcup_k U_k$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$ et par la Proposition A.2.24, il existe des compacts K_1, \ldots, K_n de U_1, \ldots, U_n respectivement tels que $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$. Vu que h est sous-additif, on a

$$h(K) \leqslant \sum_{k=1}^{n} h(K_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(U_k) \leqslant \sum_{k} \mu^*(U_k).$$

Puisque K est un compact arbitraire de $\cup_k U_k$, en passant à la borne supérieure, on obtient

$$\mu^*(\cup_k U_k) \leqslant \sum_k \mu^*(U_k).$$

Soit maintenant $(A_k)_k$ une suite d'ensembles de G. Si on a $\mu^*(A_k) = \infty$ pour un indice k, la sous-additivité dénombrable est claire. Supposons donc qu'il n'existe pas un tel indice k et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout k, soit un ouvert U_k contenant A_k tel que

$$\mu^*(A_k) < \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Il vient

$$\mu^*(\cup_k A_k) \leqslant \mu^*(\cup_k U_k) \leqslant \sum_k \mu^*(U_k) \leqslant \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon,$$

ce qui suffit, ε étant arbitraire.

Montrons que tout ouvert U de G est μ^* -mesurable, c'est-à-dire que l'on a

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c),$$

pour toute partie A de G vérifiant $\mu^*(A) < \infty$. Il suffit de montrer que l'on a

$$\mu^*(V) \geqslant \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon$$
.

pour tout ouvert V tel que $\mu^*(V) < \infty$ et tout $\varepsilon > 0$. De fait, si cette relation est vérifiée, pour $A \subset G$ tel que $\mu^*(A) < \infty$, il existe un ouvert V_{ε} contenant A tel que $\mu^*(V_{\varepsilon}) < \mu^*(A) + \varepsilon/2$. De là, on peut écrire

$$\mu^*(A) > \mu^*(V_{\varepsilon}) - \varepsilon/2 \geqslant \mu^*(V_{\varepsilon} \cap U) + \mu^*(V_{\varepsilon} \cap U^c) - \varepsilon$$
$$\geqslant \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) - \varepsilon,$$

ce qui établit la mesurabilité de U, ε étant arbitraire. Soit donc un tel ouvert V et soit $\varepsilon > 0$. Par définition de μ^* pour les ouverts, il existe un compact K de $V \cap U$ tel

que $h(K) > \mu^*(V \cap U) - \varepsilon/2$. De même, il existe un compact K' de $V \cap K^c$ tel que $h(K') > \mu^*(V \cap K^c) - \varepsilon/2$. Puisque $U^c \subset K^c$, on a $h(K') > \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon/2$. Vu la dernière propriété de $h, K \cup K' \subset V$ implique

$$\mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon < h(K) + h(K') = h(K \cup K') \leq \mu^*(V),$$

comme annoncé. Par conséquent, la σ -algèbre des ensembles μ^* -mesurables contient les boréliens de G et la restriction μ de μ^* aux ensembles boréliens est une mesure.

Montrons que μ est de Borel et régulière. Si K est un compact, la Proposition A.2.29 assure l'existence d'un ouvert U d'adhérence compacte contenant K. Vu la croissance de h, on a $h(K') \leq h(\bar{U})$ pour tout compact K' de U, donc

$$\mu(K) \leqslant \mu(U) \leqslant h(\bar{U}) < \infty,$$

en passant à la borne supérieure sur les compacts K' de U. La régularité extérieure découle de la définition de μ^* . Si K est un compact et si U est un ouvert contenant K, on a $h(K) \leq \mu(U)$, par définition de μ^* . En passant à la borne supérieure sur U, on obtient $h(K) \leq \mu(K)$. On a donc

$$\mu(U) \leqslant \sup \{ \mu(K) : K \subset U \text{ et } K \in \mathcal{F} \} \leqslant \mu(U),$$

pour tout ouvert U de G.

Puisque $h(K_0) = 1$, on a $\mu(G) \ge 1$; ainsi, μ n'est pas une mesure triviale. Enfin, cette mesure est invariante à gauche vu l'invariance à gauche de h.

Lemme 10.2.11. Si G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar à gauche sur G, alors tout ouvert non vide U de G satisfait $\mu(U) > 0$ et toute fonction positive non-identiquement nulle $f \in C_c^0(G)$ satisfait $\int f d\mu > 0$.

Démonstration. Puisque μ est une mesure Borel régulière non-nulle, il existe un compact K tel que $0 < \mu(K) < \infty$. Si U est un ouvert non vide de G, $\{xU : x \in G\}$ définit un recouvrement ouvert de K. Soit alors $x_1, Wldots, x_n \in G$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n x_k U$. Vu que μ est une mesure de Haar, il vient

$$0 < \mu(K) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(x_k U) = n\mu(U),$$

ce qui établit la première partie.

Si $f \in C_c^0(G)$ est une fonction non-identiquement nulle, il existe $\varepsilon > 0$ et un ouvert U non vide tels que $f \geqslant \varepsilon \chi_U$. On a donc

$$\int f \, d\mu \geqslant \varepsilon \mu(U) > 0,$$

ce qui suffit. \Box

Théorème 10.2.12. Si G est un groupe localement compact et μ, ν sont deux mesures de Haar à gauche sur G, alors il existe une constante c > 0 telle $\nu = c\mu$.

Démonstration. Soit $g \in C_c^0(G)$ une fonction positive non-identiquement nulle et $f \in C_c^0(G)$. Vu le lemme qui précède, $\int f d\mu / \int g d\mu$ a un sens. Montrons que l'on a

$$\frac{\int f \, d\mu}{\int g \, d\mu} = \frac{\int f \, d\nu}{\int g \, d\nu},$$

ce qui impliquera $\int f \, d\nu = c \int f \, d\mu$, avec $c = \int g \, d\nu / \int g \, d\mu > 0$. L'unicité dans le théorème de représentation de Riesz permettra alors de conclure.

Si h appartient à $C_c^0(G^2)$, en invoquant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$\iint h(x,y) d\mu(x) d\nu(y) = \iint h(x,y) d\nu(x) d\mu(y).$$

De plus, on a $z(h(\cdot,y))(x) = h(z^{-1}x,y)$ et, en posant $h_*: y \mapsto h(y^{-1}x,y)$, on a $zh_*(y) = h(y^{-1}zx,z^{-1}y)$ pour tous $x,y,z \in G$. On peut donc écrire

$$\iint h(x,y) \, d\nu(y) d\mu(x) = \iint (h(\cdot,y))(x) \, d\nu(x) d\mu(y)
= \iint (yh(\cdot,y))(x) \, d\nu(x) d\mu(y)
= \iint h(y^{-1}x,y) \, d\nu(x) d\mu(y)
= \iint h_*(y) \, d\nu(x) d\mu(y)
= \iint x^{-1}h_*(y) \, d\nu(x) d\mu(y)
= \iint h(y^{-1},xy) \, d\nu(x) d\mu(y),$$
(10.2)

vu la Remarque 10.2.9. Considérons l'application

$$h: G^2 \to G \quad (x,y) \mapsto \frac{f(x)g(yx)}{\int g(tx) d\nu(t)}.$$

L'application $t\mapsto g(tx)$ étant continue, non-identiquement nulle, positive et à support Kx^{-1} compact, le Corollaire 10.1.39 (appliqué à g) et le Lemme 10.2.11 permettent d'affirmer que la fonction $x\mapsto \int g(tx)\,d\nu(t)$ est continue et ne s'annule jamais. Qui plus est, les fonction $(x,y)\mapsto f(x),\,(x,y)\mapsto yx$ et $z\mapsto g(z)$ étant continues, h est lui-même continu. Soit K_f le support de f et K_g le support de g; le support de h étant inclus dans $K_f\times K_gK_f^{-1}$, ce qui nous permet d'affirmer que h appartient à $C_c^0(G^2)$. Puisque

$$h(y^{-1}, xy) = \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int g(ty^{-1}) d\nu(t)},$$

vu (10.2), on obtient

$$\int f(x) \, d\mu(x) = \int g(x) \, d\mu(x) \int \frac{f(y^{-1})}{g(ty^{-1}) \, d\nu(t)} \, d\nu(y).$$

Ainsi, comme annoncé, le quotient de $\int f d\mu$ et de $\int g d\mu$ dépend de f et g, mais pas de μ .

Remarque 10.2.13. Si e groupe localement compact G est abélien, la démonstration précédente se simplifie considérablement. Si f et g appartiennent à $C_c^0(G)$, alors

$$\int f \, d\mu \int g \, d\nu = \iint f(x)g(y) \, d\mu(x)d\nu(y) = \iint f(xy)g(y) \, d\mu(x)d\nu(y)$$
$$= f(y)g(yx^{-1}) \, d\mu(x)d\nu(y) = \iint f(y)g(x^{-1}) \, d\mu(x)d\nu(y)$$
$$= \int f \, d\nu \int \check{g} \, d\mu.$$

De là, si g est positif et non-identiquement nul, il vient

$$\int f \, d\mu = \frac{\int g \, d\mu}{\int \check{g} \, d\mu} \int f \, d\mu.$$

Remarque 10.2.14. La démonstration de l'existence d'une mesure de Haar fait intervenir l'axiome du choix via le choix d'un point dans un produit cartésien. La démonstration de l'unicité de cette mesure laisse présager qu'il est possible de s'affranchir de cet axiome. C'est en effet ce qu'a montré Cartan [8, 1].

La remarque suivante sera utilisée à plusieurs reprises dans la suite.

Remarque 10.2.15. Soit μ une mesure régulière définie sur les boréliens d'un groupe topologique G et soit f une fonction continue définie sur G. La mesure

$$\nu: \mathscr{B}(G) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \int_A f(x) \, d\mu$$

est régulière.

Supposons d'abord que f est la fonction caractéristique d'un ouvert U de G; on a $\nu(A) = \nu(A \cap U)$. Soit $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{B}(G)$ et V un ouvert de G; vu la régularité de μ , il existe un ouvert W contenant $A \cap U$ et un compact K inclus dans $V \cap U$ tels que $\mu(W) < \mu(A \cup U) + \varepsilon$ et $\mu(K) > \mu(V \cap U) - \varepsilon$. Puisque $W \cup U = W$ et $A \subset W$, on peut écrire

$$\nu(W) = \mu(W \cap U) = \mu(W \cup U) - \mu(W) - \mu(U)$$
$$< \mu(A \cup U) + \varepsilon - \mu(A) - \mu(U) = \mu(A \cap U) + \varepsilon = \nu(A) + \varepsilon$$

et

$$\nu(K) = \mu(K \cap U) = \mu(K) > \mu(V \cap U) - \varepsilon = \nu(V) - \varepsilon,$$

ce qui établit la régularité dans la cas d'une fonction caractéristique.

Si f est une fonction simple, supposons avoir $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{U_k}$, où les ensembles U_k sont ouverts. On a $\nu = \sum_{k=1}^{n} a_k \nu_k$, où ν_k est la mesure définie par

$$\nu_k: \mathscr{B}(G) \to [0,\infty] \quad A \mapsto \int_{\mathcal{A}} \chi_{U_k} d\mu.$$

Vu ce qui précède, chaque ν_k est régulier, ce qui suffit dans ce cas.

Enfin, si f est une fonction continue positive, le théorème de la convergence monotone permet de conclure. En effet, f est limite d'une suitede fonctions simples $(f_k)_k$ croissante et en posant

$$u_k: \mathscr{B}(G) \to [0,\infty] \quad A \mapsto \int_A f_k \, d\mu,$$

on a $\nu = \lim_k \nu_k$, où les mesures ν_k sont simples. Le cas général s'obtient alors directement par décomposition en parties positive et négative.

Exercice 10.2.16. Considérons le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ muni de la topologie induite par \mathbb{R} . Montrer qu'il n'existe pas de mesure de Haar sur G.

Suggestion : Supposons avoir une mesure de Haar μ pour ce groupe topologique et supposons avoir $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N}\}$. On a

$$\mu(]a, b[\cap \mathbb{Q}) = \sum_{r_k \in]a, b[} \mu(\{r_k\}) = \sum_{r_k \in]a, b[} \mu(\{0\}),$$

pour tout intervalle]a,b[de \mathbb{R} . On ne peut avoir $\mu(\{0\})=0$, puisque μ n'est pas trivial (ces intervalles formant une base de la topologie). On a donc $\mu(]a,b[\cap\mathbb{Q})=\infty$ et tout compact K d'intérieur non vide de \mathbb{Q} contenant un un ensemble de la forme $]a,b[\cap\mathbb{Q},$ on doit avoir $\mu(K)=\infty$, ce qui contredit le fait que μ est une mesure de Borel.

Exercice 10.2.17. Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar sur G. Montrer que si f et g sont deux fonctions réelles continues sur G égales μ -presque partout, alors elles sont égales partout.

Suggestion : De fait, l'ensemble $A = \{x \in G : f(x) \neq g(x)\}$ est ouvert par continuité et on a $\mu(A) = 0$. Vu le Lemme 10.2.11, A doit être vide.

Exercice 10.2.18. Considérons le groupe $(]0,\infty[,\cdot)$ muni de la topologie induite par \mathbb{R} . Montrer que l'application

$$\mu: \mathscr{B}(]0,\infty[) \to [0,\infty] \quad A \mapsto \int_A \frac{dx}{x}$$

est une mesure de Haar.

Suggestion: Cette mesure est clairement borélienne. Pour tout compact K de $]0,\infty[$, en posant $s=\sup_{x\in K}1/x$, on a

$$\mu(K) \leqslant \int_K s \, dx = s\mathcal{L}(K) < \infty,$$

vue que $x \mapsto 1/x$ est continu sur le compact K. Qui plus est, cette mesure est régulière, vu la Remarque 10.2.15, la mesure est régulière. Enfin, pour tout borélien A de $]0, \infty[$ et tout y > 0, on a

$$\mu(yA) = \int_{yA} \frac{dx}{x} = \int_{yA} \frac{y^{-1}}{y^{-1}x} dx = \mu(A).$$

Exercice 10.2.19. Soit G un groupe topologique localement compact homéomorphe à un ouvert U de \mathbb{R}^d et soit φ un homéomorphisme de G dans U.

— Montrer que si pour tout $g \in G$, la fonction $x \mapsto \varphi(g\varphi^{-1}(x))$ est la restriction à U d'une application affine $L_g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, alors l'application

$$\mu: \mathscr{B}(G) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \int_{\varphi(A)} \frac{dx}{|\det L_{\varphi^{-1}(x)}|}$$

est une mesure de Haar à gauche sur G.

— Montrer que si pour tout $g \in G$, la fonction $x \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(x)g)$ est la restriction à U d'une application affine $R_g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, alors l'application

$$\mu: \mathscr{B}(G) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \int_{\varphi(A)} \frac{dx}{|\det R_{\varphi^{-1}(x)}|}$$

est une mesure de Haar à droite sur G.

Sugestion : Considérons le premier point. Pour $g \in G$, soit $A_g \in GL_d$ et $b_g \in \mathbb{R}^d$ tels que $\varphi(g\varphi^{-1}(x)) = A_gx + b_g$ pour tout $x \in U$. Pour de tels g, g' dans G et $z \in U$, on a

$$A_g A_{g'} z + A_g b_{g'} + b_g = A_g (A_{g'} z + b_{g'}) + b_g = A_g \varphi(g' \varphi^{-1}(z)) + b_g$$

= $\varphi(g \varphi^{-1}(\varphi(g' \varphi^{-1}(z)))) = \varphi(g g' \varphi^{-1}(z)) = A_{gg'} z + b_{gg'},$

ce qui donne

$$(A_q A_{q'} - A_{qq})z = b_{qq'} - (b_q + A_q b_{q'}).$$

La différence entre $A_g A_{g'}$ et A_{gg} étant indépendante de $z \in U$, on doit avoir $A_g A_{g'} = A_{gg}$. Pour $g \in G$, considérons l'application

$$h_g: U \to \mathbb{R}^d \quad x \mapsto \varphi(g\varphi^{-1}(x)).$$

On a $h_g(U)=U$ et $Dh_g=A_g$. Il est clair que μ est une mesure de Borel régulière, vu la Remarque 10.2.15. On a

$$h_q(\varphi(A)) = \varphi(g\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \varphi(gA)$$

et le changement de variable $y = h_q(x)$ permet d'écrire

$$\begin{split} \mu(gA) &= \int_{\varphi(gA)} \frac{dx}{|\det A_{\varphi^{-1}(x)}|} = \int_{h_g(\varphi(A)} \frac{dx}{|\det A_{\varphi^{-1}(x)}|} \\ &= \int_{\varphi(A)} \frac{1}{|\det A_{\varphi^{-1}(h_g(x))}|} |\det A_x| \, dx \\ &= \int_{\varphi(A)} \frac{1}{|\det A_{g\varphi^{-1}(x)}|} \frac{dx}{|\det A_{x^{-1}}|} \\ &= \int_{\varphi(A)} \frac{dx}{|\det A_{\varphi^{-1}(x)}|} = \mu(A), \end{split}$$

pour tout g de G.

Exercice 10.2.20. Soit G le groupe de l'Exercice 10.1.33 et identifions G au demi-plan de la droite de \mathbb{R}^2 en associant au point (a,b) à la matrice

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Montrer que l'expression

$$\mu(A) = \iint_A \frac{da \, db}{a^2}$$

définit une mesure de Haar à gauche sur G et que

$$\mu(A) = \iint_{A} \frac{da \, db}{a}$$

définit une mesure de Haar à droite sur G. Suggestion: Utilisons l'exercice précédent. Soit

$$\varphi: G \to]0, \infty[\times \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto (a, b).$$

Pour tout $A \in G$, l'application $x \mapsto \varphi(A\varphi^{-1}(x))$ est l'application

$$(u,v)\mapsto \varphi(A\left(\begin{array}{cc} x & y \\ 0 & 1 \end{array}\right))=\varphi(\left(\begin{array}{cc} au & av+b \\ 0 & 1 \end{array}\right))=(au,av+b).$$

Cette application est la restriction à $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ de l'application

$$L_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (u, v) \mapsto (au, av + b),$$

avec $L_A = G_A + (0, b)$, où G_A est l'application linéaire représentée par diag(a, a). Ainsi, on a $1/|\det L_{\varphi^{-1}(u,v)}| = 1/u^2$, ce qui permet de conclure quant à la mesure à droite.

Maintenant, $x \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(x)A)$ est l'application

$$(u,v)\mapsto \varphi(\left(\begin{array}{cc} x & y \\ 0 & 1 \end{array}\right)A)=\varphi(\left(\begin{array}{cc} au & bu+v \\ 0 & 1 \end{array}\right))=(au,bu+v).$$

C'est donc la restriction à $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ de l'application

$$R_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (u, v) \mapsto (au, bv + v),$$

avec $R_A = G'_A$, où G'_A est l'application linéaire représentée par la transposée de A. Ainsi, on a $1/|\det L_{\varphi^{-1}(u,v)}| = 1/u$, ce qui suffit.

Exercice 10.2.21. Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de Haar à gauche sur G. Montrer que la topologie de G est discrète si et seulement si $\mu(\{x\}) > 0$ pour un $x \in G$ (et donc pour tout x).

Suggestion : Si la topologie de G est discrète, alors $\{x\}$ est ouvert et non vide pour tout $x \in G$. Vu le Lemme 10.2.11, on doit avoir $\mu(\{x\}) > 0$. Remarquons que l'on peut aussi directement utiliser l'Exemple 10.2.4.

Supposons maintenant qu'il existe $x_0 \in G$ tel que $\mu(\{x_0\}) > 0$. Vu l'invariance par translation, il existe c > 0 tel que $\mu(\{x\}) = c$ pour tout $x \in G$. Si la topologie de G n'est pas discrète, alors il existe une partie non vide A de G qui n'est pas ouverte. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant A tel que $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$. Puisque A est distinct de U, $U \setminus A$ n'est pas vide et on a

$$\mu(U) = \mu(A) + \mu(U \setminus A) \geqslant \mu(A) + c.$$

On doit donc avoir $\mu(A) + c < \mu(A) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui est absurde.

10.3 Propriétés de la mesure de Haar

Afin de d'étudier la mesure de Haar à droite, introduisons la mesure $\check{\mu}$. associée à μ .

Remarque 10.3.1. Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de Borel régulière sur G. L'application $x\mapsto x^{-1}$ étant un homéomorphisme, A est un borélien de G si et seulement si A^{-1} est aussi un borélien. Soit alors l'application $\check{\mu}$ définie sur $\mathscr{B}(G)$ par $\check{\mu}(A)=\mu(A^{-1})$. On vérifie de suite que $\check{\mu}$ est une mesure de Borel régulière. Qui plus est, la relation $\int f \, d\check{\mu} = \int \check{f} \, d\mu$ est vérifiée pour toute fonction borélienne positive ou $\check{\mu}$ -intégrable. En effet, si A est un borélien de G, pour $f=\chi_A$, on trouve

$$\check{f}(x) = \chi_A(x^{-1}) = \chi_{A^{-1}}(x),$$

pour tout $x \in G$, d'où

$$\int f \, d\check{\mu} = \check{\mu}(A) = \mu(A^{-1}) = \int \check{f} \, d\mu.$$

Par linéarité, cette relation est encore vérifiée pour les fonctions simples. Par ke théorème de la convergence monotone, la relation est vérifiée pour les fonctions positives. Pour conclure, il suffit de décomposer f.

Proposition 10.3.2. Soit G un groupe topologique localement compact et μ une mesure de Borel régulière sur G; μ est une mesure de Haar à gauche si et seulement si $\check{\mu}$ est une mesure de Haar à droite. Réciproquement, μ est une mesure de Haar à droite si et seulement si $\check{\mu}$ est une mesure de Haar à gauche.

 $D\acute{e}monstration$. Si μ est une mesure de Haar à gauche, il vient directement

$$\check{\mu}(Ax) = \mu(x^{-1}A^{-1}) = \mu(A^{-1}) = \check{\mu}(A),$$

pour tout $x \in G$ et tout borélien A. Si $\check{\mu}$ est une mesure de Haar à droite, il vient de la même manière,

$$\mu(xA) = \check{\mu}(A^{-1}x^{-1}) = \check{\mu}(A^{-1}) = \mu(A).$$

La seconde équivalence se dérive de la première, puisque $\check{\mu} = \mu$.

Corollaire 10.3.3. Tout groupe topologique G localement compact admet une mesure de Haar à droite sur G et cette mesure est unique à une constante multiplicative près.

Démonstration. Dans la section précédente, nous avons montré que G admet une mesure de Haar à gauche μ unique à une constante multiplicative près. Vu la proposition qui précède, $\check{\mu}$ est une mesure de Haar à droite. Soit ν une mesure de Haar à droite de G. Puisque $\check{\nu}$ est une mesure de Haar à gauche, elle est égale à μ à une constante multiplicative près. En conséquence, ν est égal à $\check{\mu}$ à une constante multiplicative près. \Box

Proposition 10.3.4. Soit G un groupe topologique localement compact; une mesure de Haar de G est finie si et seulement si G est compact.

 $D\acute{e}monstration$. Soit μ une mesure de Haar à gauche de G. Puisque cette mesure est de Borel et régulière, elle est clairement finie si G est compact.

Supposons donc que μ est fini et soit K un compact de G tel que $\mu(K) > 0$. Si $(x_k)_k$ est une suite de G tels que les ensembles $x_k K$ sont deux à deux disjoints, alors il vient

$$\mu(\cup_k x_k K) = \sum_k \mu(x_k K) = \sum_k \mu(K) = \infty,$$

ce qui contredit la finitude de μ . Soient x_1, \ldots, x_n des points de G tels que les ensembles $x_k K$ soient deux à deux disjoints et x K soit d'intersection non vide avec un des $x_k K$ pour tout $x \in G$. Puisque, pour tout $x \in G$, x K rencontre $\bigcup_k x_k K$, x appartient à $(\bigcup_k x_k K) K^{-1}$. Autrement dit, on doit avoir $G = (\bigcup_k x_k K) K^{-1}$. Or cet ensemble est compact, vu le cinquième point de la Proposition 10.1.24.

Ainsi, tout groupe topologique compact admet une mesure de Haar qui est une mesure de probabilité. En général, c'est cette mesure normalisée qui est implicitement choisie pour les groupes topologiques compacts.

Soit G un groupe topologique localement compact et μ une mesure de Haar à gauche sur G. Pour tout $g \in G$, $x \mapsto xg$ est un homéomorphisme de G dans lui-même et donc l'application

$$\mu_x: \mathscr{B}(G) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \mu(Ax)$$

est bien définie. Il s'agit d'une mesure de Borel qui est régulière. Par exemple, on a

$$\mu_x(A) = \mu(Ax) = \inf\{\mu(U) : Ax \subset U \text{ et } U \text{ ouvert}\}\$$

$$= \inf\{\mu(Ux) : A \subset U \text{ et } Ux \text{ ouvert}\}\$$

$$= \inf\{\mu_x(U) : A \subset U \text{ et } U \text{ ouvert}\},\$$

pour tout borélien A. Qui plus est, on a

$$\mu_x(yA) = \mu(yAx) = \mu(Ax) = \mu_x(A),$$

pour tout $y \in G$ et tout borélien A, ce qui implique que μ_x est une mesure de Haar à gauche.

Définition 10.3.5. Étant donné un groupe topologique localement compact G et μ une mesure de Haar à gauche sur G, la fonction modulaire de G est l'application $\Delta: G \to \mathbb{R}$ qui à $x \in G$ associe le nombre $\Delta(x) > 0$ tel que $\mu_x = \Delta(x)\mu$.

La définition qui précède est bien fondée.

Remarque 10.3.6. Si ν est une autre mesure de Haar à gauche sur G, il existe une constante c > 0 telle que $\nu = c\mu$. Par conséquent, on a

$$\nu_x(A) = \nu(Ax) = c\mu(Ax) = c\mu_x(A) = \Delta(x)c\mu(A) = \Delta(x)\nu(A),$$

pour tout borélien A. En d'autres termes, la fonction modulaire ne dépend pas de la mesure de Haar μ choisie.

Remarque 10.3.7. Soit G un groupe topologique et posons $f = \chi_A$, pour une partie A de G. On a

$$\int f_x d\mu = \int \chi_{Ax} d\mu = \mu(Ax) = \mu_x(A) = \Delta(x)\mu(A) = \Delta(x) \int f d\mu.$$

On a encore $\int f_x d\mu = \Delta(x) \int f d\mu$ si f est une fonction simple. Par le théorème de la convergence monotone, c'est encore le cas pour une fonction f borélienne positive ou μ -intégrable.

Proposition 10.3.8. Si G est un groupe localement compact et Δ sa fonction modulaire, alors Δ est continu et vérifie $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$, pour tous x, y de G.

 \Box

Démonstration. Soit μ une mesure de Haar à gauche sur G et f une fonction positive de $C_c^0(G)$ non-identiquement nulle. Nous savons que $\int f d\mu$ est strictement positif et vu la Remarque 10.3.7, Δ prend la forme

$$\Delta: x \mapsto \frac{\int f(yx^{-1}) d\mu(y)}{\int f d\mu}.$$

La continuité de Δ résulte alors du Corollaire 10.1.39.

Pour le second point, il vient directement

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu_{xy}(A) = \mu(Axy) = \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A),$$

pour tout borélien A de G.

Définition 10.3.9. Un groupe topologique localement compact G est unimodulaire si sa fonction modulaire Δ satisfait $\Delta(x) = 1$ pour tout $x \in G$.

Si G est unimodulaire, pour toute mesure de Haar à gauche μ , on a

$$\mu(Ax) = \mu_x(A) = \Delta(x)\mu(A) = \mu(A),$$

pour tout borélien A. Ainsi, G est unimodulaire si et seulement si toute mesure de Haar à gauche sur G est aussi une mesure de Haar à droite. Vu la Proposition 10.3.2, G est unimodulaire si et seulement si la collection des mesures de Haar à gauche coïncide avec la collection des mesures de Haar à droite sur G.

Exemple 10.3.10. Bien entendu, tout groupe topologique localement compact abélien est unimodulaire.

Proposition 10.3.11. Tout groupe compact est unimodulaire.

Démonstration. Soit G un groupe compact et Δ sa fonction modulaire. Vu la Proposition 10.3.8, on a $\Delta(x^n) = \Delta^n(x)$, pour tout nombre naturel n non-nul. Par conséquent, si on a $\Delta(x) > 1$ pour un $x \in G$, la fonction modulaire n'est pas bornée. S'il existe $x \in G$ tel que $\Delta(x) < 1$, il vient $\Delta(x)\Delta(x^{-1}) = \Delta(1_G) = 1$ et donc $\Delta(x^{-1}) > 1$. Dans ce cas également, la fonction modulaire n'est pas bornée. Cependant, Δ étant continu sur le compact G, la fonction modulaire est nécessairement bornée.

Le résultat précédent peut se généraliser.

Proposition 10.3.12. Si G est un groupe topologique localement compact admettant un voisinage compact V de 1 invariant par les automorphismes intérieurs de G, alors il est unimodulaire.

Démonstration. Un tel groupe admet une unique mesure de Haar à gauche μ . Puisque V contient un ouvert non vide, on doit avoir $\mu(V) > 0$. De plus, pour tout $x \in G$, on a $xVx^{-1} = V$, i.e. xV = Vx. Ainsi, si Δ est la fonction modulaire, pour tout $x \in G$, il vient

$$\Delta(x)\mu(V) = \mu(Vx) = \mu(xV) = \mu(V),$$

ce qui suffit.

Proposition 10.3.13. Si G est un groupe topologique localement compact et μ une mesure de Haar à quuche sur G, on a

$$\check{\mu}(A) = \int_A \Delta(x^{-1}) \, d\mu(x),$$

pour tout borélien A de G.

Démonstration. Posons

$$\nu: \mathscr{B}(G) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \int_A \Delta(x^{-1}) \, d\mu(x).$$

La fonction Δ étant continue et à valeurs positives, ν est une mesure. Puisque μ est de Borel et que K est compact si et seulement si K^{-1} l'est, ν est une mesure de Borel. Qui plus est, Δ et $x\mapsto x^{-1}$ étant des applications continues, ν est régulier, vu la Remarque 10.2.15.

La Remarque 10.3.7 appliquée à $f: x \mapsto \chi_A(x)\Delta(x^{-1})$ permet d'écrire

$$\nu(Ay) = \int \chi_{Ay}(x)\Delta(x^{-1}) d\mu(x) = \int \chi_{Ay}(x)\Delta(y^{-1})\Delta(yx^{-1}) d\mu(x)$$
$$= \Delta(y^{-1}) \int f_y(x) d\mu(x)$$
$$= \Delta(y^{-1})\Delta(y) \int \chi_A(x)\Delta(x^{-1}) d\mu(x) = \nu(A),$$

ce qui implique que ν est une mesure de Haar à droite.

Soit c>0 la constante telle que $\nu=c\check{\mu}$; il nous faut montrer que c est égal à 1. On a

$$c = \frac{\nu(A)}{\check{\mu}(A)} = \frac{\nu(A)}{\mu(A^{-1})} = \frac{1}{\mu(A^{-1})} \int_A \Delta(x^{-1}) \, d\mu(x),$$

pour tout borélien A tel que $0 < \check{\mu}(A) < \infty$. Pour $\varepsilon > 0$, puisque Δ est continu et vaut 1 en 1, il existe un voisinage ouvert et symétrique V de 1 tel que $|1 - \Delta(x)| < \varepsilon$, pour tout $x \in V$. En supposant V d'adhérence compacte, on a $0 < \check{\mu}(V) = \mu(V) < \infty$, vu le Lemme 10.2.11. On a alors

$$|1 - c| = \left| \frac{1}{\mu(V)} \int_{V} 1 \, d\mu - \frac{1}{\mu(V^{-1})} \int_{V} \Delta(x^{-1}) \, d\mu \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(V)} \int_{V} |1 - \Delta(x^{-1})| \, d\mu(x) < \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en conclut que c doit valoir 1.

Corollaire 10.3.14. Soit G un groupe topologique localement compact, μ une mesure de Haar à gauche sur G et ν une mesure de Haar à droite sur G; pour tout borélien A de G, on a $\mu(A) = 0$ si et seulement si $\nu(A) = 0$.

Démonstration. Vu la proposition précédente et l'unicité des mesures de Haar (à droite) à une constante multiplicative près, il existe une constante c > 0 telle que

$$\nu(A) = c \int_A \Delta(x^{-1}) \, d\mu,$$

pour tout borélien A de G. De là, il est clair que $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$. Maintenant, si $\nu(A) = 0$, alors l'application $x \mapsto \Delta(x^{-1})\chi_A(x)$ s'annule μ -presque partout. Puisque Δ est strictement positif sur G, A doit être μ -négligeable.

Exercice 10.3.15. Soit G un groupe topologique localement compact et μ une mesure de Haar à droite sur G; montrer que

$$\mu(xA) = \Delta(x^{-1})\mu(A),$$

pour tout borélien A et tout $x \in G$.

Suggestion: Nous savons que $\check{\mu}$ est une mesure de Haar à gauche sur G. Par conséquent, on a

$$\check{\mu}(Ax) = \Delta(x)\check{\mu}(A),$$

pour tout borélien A et tout $x \in G$. Cette relation peut s'écrire

$$\mu(x^{-1}A^{-1}) = \Delta(x)\mu(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu(xA) = \Delta(x^{-1})\mu(A),$$

pour tout borélien A et tout $x \in G$.

Exercice 10.3.16. Soit G les groupe topologique considéré dans les Exercices 10.1.33 et 10.2.20; montrer que la fonction modulaire Δ de G est définie par

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \frac{1}{a}.$$

Suggestion: Nous savons que G est homéomorphe à $\mathbb{G} =]0, \infty[\times \mathbb{R},$ que l'application

$$\mu_g: \mathscr{B}(\mathbb{G}) \to [0,\infty] \quad A \mapsto \iint_A \frac{da \, db}{a^2}$$

définit une mesure de Haar à gauche sur G et que l'application

$$\mu_d: \mathscr{B}(\mathbb{G}) \to [0, \infty] \quad A \mapsto \iint_A \frac{da \, db}{a}$$

définit une mesure de Haar à gauche sur \mathbb{G} . Puisque $\check{\mu}_g$ est une mesure de Haar à droite, il existe une constante c>0 telle que $\check{\mu}_g=c\mu_d$, c'est-à-dire telle que

$$\iint_A \frac{d\mu_g(a,b)}{\Delta(a,b)} = \iint_A \frac{da\,db}{a^2 \Delta(a,b)} = c \iint_A \frac{da\,db}{a},$$

pour tout borélien A. On doit donc avoir $\Delta(a,b)=(ca)^{-1}$ pour presque tout $(a,b)\in\mathbb{G}$. Par continuité de Δ , cette égalité doit être vérifiée partout.

Considérons le changement de variable suivant au sens de l'opération de groupe dans ${\cal G}$:

$$(x,y) = (a,b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}).$$

Il s'inverse en (a,b) = (1/x, -y/x), avec $D_x a = -1/x^2$, $D_y a = 0$ et $D_y b = -1/x$. On obtient donc

$$\check{\mu}_g(A) = \iint_{A^{-1}} \frac{da \, db}{a^2} = \iint_A x^2 \frac{1}{x^2} \frac{1}{x} \, dx \, dy = \iint_A \frac{dx \, dy}{x} = \mu_d(A),$$

ce qui prouve que l'on a c=1.

Exercice 10.3.17. Soit encore G le groupe topologique de L'Exercice 10.1.33; trouver un borélien de G qui est de mesure de Haar à gauche finie et de mesure de Haar à droite infinie.

Suggestion : Avec les notations de l'exercice précédent, considérons le borélien $A = [1, \infty[\times[0, 1]] \text{ de } \mathbb{G}$. On a

$$\mu_g(A) = \iint_A \frac{da \, db}{a^2} = 1$$

et

$$\mu_d(A) = \iint_A \frac{da \, db}{a} = \infty.$$

Exercice 10.3.18. Montrer que l'application

$$\mu(A) = \int_A \frac{dt}{|\det t|^d}$$

définit une mesure de Haar à gauche et à droite sur GL_d , ce qui implique que GL_d est unimodulaire ¹.

Suggestion: Il suffit de sinspirer de l'Exercice 10.2.19. Montrons que l'on a $\mu(xA) = \mu(A)$ pour tout $x \in GL_d$, le cas des translations à droite se traitant de manière similaire. Pour $x \in GL_d$, considérons le changement de variable t(y) = xy, s'inversant en $y(t) = x^{-1}t$. Le jacobien est donné par $|\det D_y t| = |\det x|^d$ et donc

$$\mu(xA) = \int_{xA} \frac{dt}{|\det t|^d} = \int_A \frac{1}{|\det xy|^d} |\det x|^d \, dy = \int_A \frac{dy}{|\det y|^d} = \mu(A).$$

Exercice 10.3.19. Étant donné un groupe topologique localement compact G et une mesure de Haar à gauche μ sur G, montrer que G est unimodulaire si et seulement si $\check{\mu} = \mu$. Suggestion : Si G est unimodulaire, on a

$$\check{\mu}(A) = \int_{A} \Delta(x^{-1}) \, d\mu = \int_{A} d\mu = \mu(A),$$

pour tout borélien A de G.

Supposons à présent avoir $\check{\mu} = \mu$. Nous savons que $\check{\mu}$ est une mesure de Haar à droite. Ainsi, μ est aussi une mesure de Haar à droite. On trouve ainsi $\mu(Ax) = \mu(A)$, comme attendu.

Exercice 10.3.20. Soit $H = \{0,1\}$ que l'on munit de la topologie discrète et de l'addition modulo 2, notée +, comme opération de groupe. Considérons $G = H^{\mathbb{N}_*}$ muni la topologie produit et de l'opération de groupe + définie composante à composante par l'opération sur H. Montrer que

- G est un groupe compact,
- si μ est la mesure de Haar sur G telle que $\mu(G)=1$, alors

$$\mu(\{(g_k)_k \in G : g_{j_k} = y_k \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\}\}) = \frac{1}{2^n},$$

pour tous nombres naturels j_1, \ldots, j_n non nuls et deux à deux distincts et tous éléments y_1, \ldots, y_n de H,

^{1.} Or, GL_d n'est ni compact, ni commutatif.

— il existe des compacts K et K' de G tels que $\mu(K) = \mu(K') = 0$ et K + K' = G,

— pour

$$f: G \to [0,1] \quad (g_k)_k \mapsto \sum_k \frac{g_k}{2^k},$$

 $\mathcal{L}(B) = \mu(f^{-1}(B))$ pour tout borélien B de [0, 1].

Suggestion: Bien sûr, H étant fini, il est compact, ce qui implique que G est également un groupe topologique compact, vu la Proposition 10.1.3 et le théorème de Tychonoff.

Considérons le deuxième point. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_k \in H$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}^*$ deux à deux distincts, posons

$$A = \{(g_k)_k \in G : g_{j_k} = y_k \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Soit S l'ensemble des suites $(x_i)_i$ de G de la forme

$$x_j = \begin{cases} h \in H & \text{si } j = j_k \text{ pour un } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cet ensemble S contient 2^n éléments. Bien sûr, pour tout $(g_k)_k \in G$, il existe une unique suite $(x_k)_k$ de S telle que $(g_k)_k$ appartient à $A + (x_k)_k$ et on a

$$G = A + S = \bigcup_{(x_k)_k \in S} A + (x_k)_k,$$

où l'union est disjointe. Il vient donc

$$1 = \mu(G) = \sum_{(x_k)_k \in S} \mu(A + (x_k)_k) = \sum_{(x_k)_k \in S} \mu(A) = 2^n \mu(A),$$

vu l'invariance par translation de la mesure.

Pour le troisième point, pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $y_1, \ldots, y_n \in \{0, 1\}$,

$$K_n = \{(g_k)_k \in G : g_{2k} = y_k \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\}\}$$

et

$$K'_n = \{(g_k)_k \in G : g_{2k-1} = y_k \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Posons $K = \bigcap_n K_n$ et $K' = \bigcap K'_n$. On trouve

$$\mu(K) = \lim_{n} \mu(K_n) = \lim_{n} 2^{-n} = 0$$

et $\mu(K') = 0$. Pour $(g_k)_k \in G$, soit

$$x_k = \begin{cases} y_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair et } k/2 \leqslant n \\ g_k - y_{(k+1)/2} & \text{si } k \text{ est impair et } (k+1)/2 \leqslant n \\ g_k & \text{si } k > n \end{cases}$$

 et

$$x_k' = \begin{cases} y_{(k+1)/2} & \text{si } k \text{ est impair et } (k+1)/2 \leqslant n \\ g_k - y_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair et } k/2 \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

On a bien sûr $(x_k)_k \in K$, $(x'_k)_k \in K'$ et $(g_k)_k = (x_k)_k + (x'_k)_k$. On a donc G = K + K'.

Considérons le dernier point. Utilisons le fait que tout borélien de [0,1] est union dénombrable d'intervalles dyadiques semi-ouverts deux à deux disjoints. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ et posons $I_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Montrons que l'on a

$$\mathcal{L}(I_{n,k}) = \mu(f^{-1}(I_{n,k})).$$

On a, bien entendu, $\mathcal{L}(I_{n,k}) = 2^{-n}$ et

$$\mu(f^{-1}(I_{n,k})) = \mu(\{(g_j)_j \in G : \sum_j \frac{g_j}{2^j} \in I_{n,k}\}).$$

Vu qu'il s'agit d'une suite représentation en base 2, on constate directement que la condition $\sum_j g_j 2^{-j} \in I_{n,k}$ fixe détermine n premières valeurs de la suite $(g_j)_j$. Vu ce qui précède, on a dès lors $\mu(f^{-1}(I_{n,k})) = 2^{-n}$.

Exercice 10.3.21. Soit G un groupe topologique localement compact et μ une mesure de Haar à gauche sur G; montrer que les conditions suivantes sont équivalents :

- G est σ -compact,
- μ est σ -fini,
- pour tout ouvert non vide U de G, il existe une suite $(x_k)_k$ de G telle que $G = \bigcup_k x_k U$. Suggestion: Montrons que le premier point implique le second. Si G est σ -compact, il existe une suite de compacts $(K_k)_k$ telle que $G = \bigcup_k K_k$. Puisque μ est borélien, on a $\mu(K_k) < \infty$ pour tout k, ce qui suffit.

Montrons que le premier point implique le troisième point. Gardons la suite $(K_k)_k$ du point précédent et soit U un ouvert non vide de G. Pour tout k, $\{xU:x\in G\}$ définit un recouvrement de K_k . Il existe donc $x_1^{(k)},\ldots,x_{n_k}^{(k)}$ dans G tels que $K_k\subset \bigcup_{j=1}^{n_k}x_j^{(k)}U$. Posons

$$J = \{(k, l) : k \in \mathbb{N}^*, l \in \{1, \dots, n_k\}\}$$

et pour $(k,l) \in J$, posons $x_{(k,l)} = x_l^{(k)}$. On a $G = \bigcup_{j \in J} x_j U$, avec J dénombrable.

Montrons que le troisième point implique le premier. Soit U un ouvert non vide de G d'adhérence compacte et $(x_k)_k$ une suite de G telle que

$$G = \cup_k x_k U \subset \cup_k x_k \bar{U} \subset G.$$

Les ensembles de la forme $x_k \bar{U}$ étant compacts, on peut conclure.

Montrons enfin que le deuxième point implique le premier. Montrons d'abord que pour tout compact K de G, on peut trouver un ouvert U σ -compact tel que $K \subset U$. De fait, pour $x \in K$, soit V_x un voisinage ouvert d'adhérence compacte de x. Puisque $\{V_x \, x \in K\}$ définit un recouvrement ouvert de K, il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n V_{x_k}$. Soit $U_1 = \bigcup_{k=1}^n V_{x_k}$. Puisque \bar{U}_1 est un fermé inclus dans le compact $\bigcup_{k=1}^n \bar{V}_{x_k}$, U_1 est un ouvert relativement compact. Soit $K_1 = \bar{U}_1$ et appliquons à K_1 le même raisonnement qu'à K pour trouver un ouvert U_2 relativement compact tel que $K_1 \subset U_2$. En itérant cet argument, on peut construire une suite $(K_k)_k$ de compacts et une suite $(U_k)_k$ d'ouverts relativement compacts tels que $\bar{U}_k = K_k \subset U_{k+1}$. Dès lors, $\bigcup_k = U_k = \bigcup_k K_k$ et cet ensemble $U = \bigcup_k U_k$ convient : il est ouvert, σ -compact et contient K. Puisqu'on suppose μ σ -fini, il existe une suite $(A_k)_k$ de boréliens de G deux à deux disjoints tels que $G = \bigcup_k A_k$ et $\mu(A_k) < \infty$ pour tout indice k. Pour $\varepsilon > 0$, vu la régularité de μ , il existe un compact K_k inclus dans A_k tel que

$$\mu(K_k) > \mu(A_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Les ensembles K_k ainsi construits étant deux à deux disjoints, il vient

$$\mu(G) = \sum_{k} \mu(A_k) < \sum_{k} (\mu(K_k) + \frac{\varepsilon}{k}) = \mu(\cup_k K_k) + \varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, il vient $\mu(G) = \mu(\bigcup_k K_k)$. Pour chaque indice k, soit U_k un ouvert σ -compact contenant K_k . L'ensemble $\bigcup_k U_k$ est un ouvert σ -compact qui vérifie

$$\mu(G) = \mu(\cup_k K_k) \leqslant \mu(\cup_k U_k) \leqslant \mu(G).$$

Nous venons donc de prouver l'existence d'un ouvert U σ -compact de même mesure que G. Supposons avoir $U = \bigcup_k C_k$ pour une suite de compacts $(C_k)_k$ et considérons le sous groupe $\langle U \rangle$ de G engendré par U:

$$\langle U \rangle = \{ \prod_{k=1}^{n} x_k^{\delta_k} : n \in \mathbb{N}^*, x_k \in U, \delta_k \in \{-1, 1\} \}.$$

Le groupe $\langle U \rangle$ est union dénombrable de produits finis d'ensembles C_k et C_k^{-1} , ce qui implique qu'il est σ -compact. De plus, il est clairement ouvert. Vu la Proposition 10.1.41, il est également fermé. Ainsi, on a $G = \langle U \rangle$, sinon il existerait un ouvert V inclus dans $G \setminus \langle U \rangle$. On aurait alors $\mu(V) > 0$ par le Lemme 10.2.11, alors que l'on doit avoir $\mu(V) \leq \mu(G \setminus U) = 0$.

Annexe A

Quelques rappels

A.1 Concernant l'analyse

Limites supérieures et inférieures

Définition A.1.1. Si $(x_k)_k$ est une suite de \mathbb{R} (ou $\overline{\mathbb{R}}$), la *limite supérieure* de cette suite, notée $\overline{\lim}_k x_k$ est définie par

$$\overline{\lim_{k}} x_k = \inf_{j} \sup_{k \geqslant j} x_k.$$

De la même manière, la limite inférieure, notée $\underline{\lim}_k x_k$, est définie par

$$\underline{\lim}_{k} x_k = \sup_{j} \inf_{k \geqslant j} x_k.$$

L'inégalité $\underline{\lim}_k x_k \leqslant \overline{\lim}_k x_k$ est vérifiée et, si la suite $(x_k)_k$ converge, on a

$$\lim_{k} x_k = \underline{\lim}_{k} x_k = \overline{\lim}_{k} x_k.$$

Semi-continuité

Nous envisagerons ici la semi-continuité pour des fonctions définies sur \mathbb{R} (ou une partie de \mathbb{R}); cette notion se généralise aisément aux applications définies sur un espace topologique X (en remplaçant, dans la définition qui suit, $|x-t| < \varepsilon$ par un voisinage de x).

Définition A.1.2. Une fonction à valeurs étendues $f: \mathbb{R} \to]-\infty, \infty]$ est semi-continue inférieurement en x si pour tout nombre réel C tel que f(x) > C, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x-t| < \varepsilon$ implique f(t) > C; f est semi-continu inférieurement s'il est semi-continu inférieurement en chacun des points de son domaine de définition.

Une fonction à valeurs étendues $f: \mathbb{R} \to [-\infty, \infty[$ est semi-continue supérieurement en x si -f est semi-continu inférieurement en x, c'est-à-dire si pour tout nombre réel C tel que f(x) < C, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - t| < \varepsilon$ implique f(t) < C; f est semi-continu supérieurement s'il est semi-continu supérieurement en chacun des points de son domaine de définition.

Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en un point si et seulement si elle est semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement en ce point. Bien sûr, une fonction f est semi-continue inférieurement (resp. semi-continue supérieurement) si et seulement si, pour

tout nombre réel C, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > C\}$ (resp. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < C\}$) est ouvert. Il en résulte que de telles fonctions sont Borel-mesurables. On vérifie directement que si U est un ensemble ouvert, χ_U est semi-continu inférieurement et que si C est fermé, χ_C est semi-continu supérieurement. De plus, la somme de deux fonctions semi-continues inférieurement (resp. semi-continues supérieurement) est semi-continue inférieurement (resp. semi-continues supérieurement). Enfin, si (f_k) est une suite de fonctions semi-continues inférieurement (resp. semi-continues supérieurement), alors $f = \sup_k f_k$ (resp. $f = \inf_k f_k$) est aussi une fonction semi-continues inférieurement (resp. semi-continues supérieurement), puisque l'ensemble $\{x \in]-\infty,\infty]: f(x)>C\}$ est l'union sur k des ensembles $\{x \in]-\infty,\infty]: f_k(x)>C\}$. En particulier, si (f_k) est une suite croissante de fonction semi-continues inférieurement, $\lim_k f_k$ est également semi-continu inférieurement.

Différentielles

Dans \mathbb{R}^d , posons $||x||_{\infty} = \sup_k |x_k|$ et $d_{\infty}(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$ et désignons par \overline{ab} le segment $\{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble ouvert, rappelons que si une application $f: \Omega \to \mathbb{R}^d$ est de classe C^1 , elle est différentiable en chaque point de Ω et la différentielle f_{*x} de f en x est représentée par la matrice de dimension $d \times d$ dont l'élément (j,k) est $D_k f_j(x)$.

Dans l'espace linéaire $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ des matrices de dimension $d \times d$, l'application

$$\|\cdot\|: \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \quad A \mapsto \sup_{1 \le j \le d} \sum_{k=1}^d |a_{j,k}|$$

est une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que $||Ax||_{\infty} \leq ||A|| ||x||_{\infty}$ quels que soient $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposition A.1.3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, soit $f: \Omega \to \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1 . Pour tout $x \in \Omega$ et tout $y \in \Omega$ tel que $\overline{xy} \subset \Omega$, on a

$$d_{\infty}(f(x), f(y)) \leqslant \sup_{z \in \overline{xy}} ||f_{*z}|| \ d_{\infty}(x, y).$$

Démonstration. De fait, pour tout j $(1 \le j \le d)$, $f_j \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et la formule de Taylor limitée implique l'existence d'un nombre $t_j \in]0,1[$ tel que

$$f_j(y) - f_j(x) = \sum_{k=1}^{d} [D_k f_j]_{x+t_j(y-x)} (y_k - x_k),$$

ce qui suffit.

A.2 Concernant la topologie

Généralités

Définition A.2.1. Soit $(E_k)_k$ une suite d'ensembles. La *limite supérieure* de cette suite, notée $\overline{\lim}_k E_k$, est définie comme suit,

$$\overline{\lim_{k}} E_{k} = \bigcap_{j} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_{k}.$$

La limite inférieure quant à elle se définit comme

$$\underline{\lim}_{k} E_{k} = \bigcup_{j} \bigcap_{k=j}^{\infty} E_{k}.$$

On vérifie aisément que les égalités suivantes sont vérifiées,

$$\varlimsup_k E_k = \{x: x \in E_k \text{ pour une infinit\'e d'indices } k\}$$

et

$$\underline{\lim}_{k} E_{k} = \{x : x \in E_{k} \ \forall k, \text{ except\'e pour un nombre fini d'indices } k\}.$$

Si la suite d'ensembles $(E_k)_k$ est décroissante, on vérifie directement que l'on a $\overline{\lim}_k E_k = \bigcap_j E_j$. Si la suite d'ensembles est croissante, alors $\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=j'}^{\infty} E_k$ pour tous j et j', donc $\overline{\lim}_k E_k = \bigcap_j \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. De la même manère, si la suite d'ensembles est décroissante, alors $\bigcap_{k=j}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=j'}^{\infty} E_k$ pour tous j et j', donc $\underline{\lim}_k E_k = \bigcup_j \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Enfin, si la suite $(E_k)_k$ est croissante, il vient $\underline{\lim}_k E_k = \bigcup_j E_j$. Dès lors, si la suite d'ensembles $(E_k)_k$ est croissante, on pose $\lim_k E_k = \bigcup_k E_k$ et pour une si elle est décroissante, $\lim_k E_k = \bigcap_k E_k$. Remarquons que l'on a toujours $\underline{\lim}_k E_k \subset \overline{\lim}_k E_k$. De fait, si x est un élément de $\underline{\lim}_k E_k$, x appartient à $\bigcap_{k=j_0}^{\infty} E_k$ pour un indice j_0 et on a donc $x \in E_k$ pour tout $k \geqslant j_0$. Cela implique x appartient à $\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k$ pour tout $j \geqslant j_0$ et donc $x \in \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k$ pour tout j. Ceci revient à dire que l'on a $x \in \overline{\lim}_k E_k$. Enfin, il est aisé de montrer que l'on a $x \in \overline{\lim}_k E_k = \overline{\lim}_j \chi_{\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k} = \overline{\lim}_k \chi_{E_k}$ et $\chi_{\overline{\lim}_k E_k} = \overline{\lim}_j \chi_{\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k} = \overline{\lim}_k \chi_{E_k}$.

Proposition A.2.2. Tout ensemble ouvert Ω de \mathbb{R} est l'union dénombrable d'une suite d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Démonstration. Soit $\mathscr C$ la collection de tous les intervalles ouverts inclus dans Ω et maximaux dans Ω (I est maximal dans Ω si le seul intervalle ouvert J tel que $I \subset J \subset \Omega$ est I lui-même). On a bien sûr $\cup_{I \in \mathscr C} I \subset \Omega$. Si $x \in \Omega$, l'union des intervalles ouverts de Ω contenant x est un intervalle de Ω contenant x et donc $x \in \cup_{I \in \mathscr C} I$. Ces intervalles sont disjoints : si $x \in I_1 \cap I_2$, alors $I = I_1 \cup I_2$ est un intervalle ouvert de $\mathscr C$ contenant I_1 et I_2 , donc $I = I_1 = I_2$.

Les ensembles de \mathscr{C} sont dénombrables. Chaque intervalle de \mathscr{C} contient un nombre rationnel x_k . Puisque ces intervalles sont disjoints, x_k n'appartient à aucun autre intervalle de \mathscr{C} . Ainsi, l'application $I \mapsto x_k$ est une injection de \mathscr{C} dans \mathbb{Q} , ce qui suffit. \square

Proposition A.2.3. Tout fermé inclus dans un compact est compact.

Démonstration. Soit F un fermé inclus dans un compact K. Si $(U_k)_k$ définit un recouvrement ouvert de F, on a $K \subset F^c \cup (\cup_k U_k)$. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset F^c \cup (\cup_{k=1}^{k_0} U_k)$, ce qui donne $F \subset \cup_{k=1}^{k_0} U_k$.

Proposition A.2.4. Soit X un espace topologique, K un compact de X et J est un ensemble non vide tel que pour tout $j \in J$, C_j soit un fermé non vide de K. Si $\cap_{j \in J'} C_j$ est non vide pour tout ensemble fini $J' \subset J$, alors $\cap_{j \in J} C_j$ est non vide.

Démonstration. Supposons avoir $\cap_k C_k = \emptyset$ et posons $U_k = K \setminus C_k$. Puisque C_k est fermé relativement à K, il est fermé relativement à K et U_k est ouvert relativement à K, comme complémentaire de C_k dans K. On a

$$\cup_k U_k = K \setminus \cap_k C_k = K.$$

Maintenant, comme $(U_k)_k$ définit un recouvrement du compact K, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que K est recouverts par U_1, \ldots, U_n . On a donc

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} U_k = K \setminus \bigcap_{k=1}^{n} C_k,$$

ce qui implique $\bigcap_{k=1}^n C_k = \emptyset$.

Le résultat qui suit découle directement du précédent.

Corollaire A.2.5 (Téorème d'intersection de Cantor). Si X est un espace topologique de Hausdorff et $(K_k)_k$ une suite décroissante de compacts non vides de X, alors $\cap_k K_k$ est non vide.

Le résultat suivant est aussi une conséquence de ce qui précède, même si nous en donnons une démonstration alternative.

Proposition A.2.6. Si (X, d) est un espace métrique complet et $(C_k)_k$ une suite décroissante de fermés non vides de X tels que $\lim_k \operatorname{diam}(C_k) = 0$, alors il existe $x \in X$ pour lequel on $a \cap_k C_k = \{x\}$.

Démonstration. On a diam $(\cap_k C_k) \leq \text{diam}(C_j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, donc diam $(\cap_k C_k) = 0$. En conséquence, $\cap_k C_k$ est soit vide, soit un singleton. Soit $(x_k)_k$ une suite de X telle que $x_k \in C_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour j > k, on a $d(x_j, x_k) \leq \text{diam}(C_k)$, ce qui implique que la suite est de Cauchy; soit x sa limite de cette suite. Puisque $(x_{k+j})_k$ est une suite de C_j pour $j \in \mathbb{N}^*$, on doit avoir $x \in C_j$, puisque C_j est fermé. On en déduit que x appartient à $\cap_k C_k$.

Définition A.2.7. Un point d'accumulation d'une partie E d'un espace topologique est un élément x de l'adhérence de $E \setminus \{x\}$.

Si x est un point d'accumulation de E, tout voisinage de x contient un point de E distinct de x.

Définition A.2.8. Un point x d'un espace topologique est isolé si le singleton $\{x\}$ est ouvert.

Un point x de l'espace topologique x est isolé s'il n'est pas un point d'accumulation.

Définition A.2.9. Un ensemble est parfait s'il est fermé et sans point isolé.

Proposition A.2.10. Si X est un espace métrique complet séparable et sans point isolé, alors X n'est pas dénombrable.

Démonstration. Soit $x_1 \in X$ et un nombre $r_1 > 0$; il existe $x_2 \in B(x_1, r_1)$ distinct de x_1 . Soit alors

$$r_2 = \min\{d(x_1, x_2), r_1 - d(x_1, x_2)\}.$$

On a $\bar{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$ par construction et $x_1 \notin \bar{B}(x_2, r_2)$. Si le voisinage $B(x_j, r_j)$ de x_j a été défini, il existe $x_{j+1} \in B(x_j, r_j)$ distinct de x_j . En posant

$$r_{j+1} = \min\{d(x_j, x_{j+1}), r_1 - d(x_j, x_{j+1})\},\$$

on obtient $\bar{B}(x_{j+1},r_{j+1}) \subset B(x_j,r_j)$ et $x_{j+1} \notin \bar{B}(x_{j+1},r_{j+1})$. Si X est dénombrable, on a $X = \{x_j : j \in \mathbb{N}^*\}$.

Les ensembles $\bar{B}(x_{j+1}, r_{j+1})$ sont compacts, par le théorème de Borel-Lebesgue et on a $\bar{B}(x_{j+1}, r_{j+1}) \subset \bar{B}(x_j, r_j)$, par construction. Vu le Corollaire A.2.5, $\cap_j \bar{B}(x_j, r_j)$ n'est pas vide. On a cependant $x_j \notin \bar{B}(x_{j+1}, r_{j+1})$ et donc $x_j \notin \cap_k \bar{B}(x_k, r_k)$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. \square

Corollaire A.2.11. Un ensemble parfait non vide d'un espace métrique complet séparable n'est pas dénombrable.

Démonstration. Si E est parfait, il suffit de prendre $K_j = \bar{B}(x_j, r_j) \cap E$ dans la démonstration précédente pour obtenir que $\cap_j K_j$ ne peut être vide.

Proposition A.2.12. Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $A \subset X$, l'application $d(\cdot, A)$ est continue.

Démonstration. Soient $x, y \in X$; montrons que $|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $a \in A$ tel que $d(x, b) < d(x, A) + \varepsilon$ et donc $d(y, A) \le d(y, a) \le d(y, x) + d(x, a) < d(x, y) + d(x, A) + \varepsilon$. Puisque ε est arbitraire, on obtient $d(y, A) - d(x, A) \le d(x, y)$. La conclusion en découle, en inversant les rôles de x et y.

Proposition A.2.13. Un espace topologique X est de Hausdorff si et seulement si la diagonale de X^2 est fermée pour la topologie produit.

Démonstration. Soit $D = \{(x,x) : x \in X\}$ et supposons cet ensemble fermé dans X^2 . Si x et y sont deux points distincts de X, (x,y) n'appartient pas à D et il existe donc deux ouverts U et V de X tels que $x \in U$, $y \in V$ et $(U \times V) \cap D = \emptyset$. Si U et V contenait un point commun $z \in X$, (z,z) appartiendrait à la fois à $U \times V$ et à D, ce qui est impossible. Nous venons ainsi de montrer que X est de Hausdorff.

Supposons maintenant que X est de Hausdorff et montrons que D^c est ouvert dans X^2 . Soit (x,y) un point de D^c ; on a donc $x \neq y$ et il existe un ouvert U contenant x et u ouvert V contenant y tels que $U \cap V = \emptyset$. On a donc $U \times V \subset D^c$, ce qui suffit.

Espace normaux

Définition A.2.14. Un espace topologique est normal si, étant donné deux fermés disjoints F et G, il existe deux ouverts disjoints U et V contenant F et G respectivement.

Proposition A.2.15. Un espace topologique est normal si et seulement si pour tout fermé F contenu dans un ouvert U, il existe un ouvert V tel que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit F un fermé inclus dans l'ouvert U. Puisque U^c est un fermé d'intersection vide avec F il existe deux ouverts disjoints V et Ω contenant F et U^c respectivement. Ainsi, Ω^c est un fermé inclus dans U. Qui plus est, on a $V \subset \Omega^c$, ce qui implique $\bar{V} \subset \Omega^c$, Ω^c étant fermé. Au total, on a bien $F \subset V \subset \bar{V} \subset \Omega^c \subset U$.

La condition est suffisante. Soit F et G deux fermés disjoints. On a donc $F \subset G^c$. Il existe alors un ouvert V tel que $F \subset V \subset \overline{V} \subset G^c$. On a ainsi $F \subset V$ et $G \subset \overline{V}^c$. On a bien entendu $V \cap \overline{V}^c = \emptyset$, ce qui suffit.

Proposition A.2.16 (Lemme d'Urysohn). Un espace topologique X est normal si et seulement si, pour toute paire d'ensembles fermés non vides F et G, il existe une fonction continue $f: X \to [0,1]$ telle que $f(F) = \{0\}$ et $f(G) = \{1\}$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que l'ensemble $D=\mathbb{Q}\cap [0,1]$ s'écrive $D=\{p_k:k\in\mathbb{N}\}$, avec $p_0=0$ et $p_1=1$. Posons $U_1=X\setminus G$; par la normalité de X, il existe un ouvert U_0 tel que $F\subset U_0\subset \bar{U}_0\subset U_1$. Supposons avoir construit les ensembles U_{p_1},\ldots,U_{p_k} pour $k=0,\ldots,n$ tels que p< q implique $\bar{U}_p\subset U_q$. Posons $P_n=\{p_0,\ldots,p_n\}$ et soit $p,q\in P_n$ tels que $p< p_{n+1}< q$. Puisque X et normal, il existe un ouvert $U_{p_{n+1}}$ tel que $\bar{U}_p\subset U_{p_{n+1}}\subset \bar{U}_{p_{n+1}}\subset U_q$. Enfin, posons $U_p=\varnothing$ pour tout nombre rationnel p<0 et $U_p=X$ pour tout nombre rationnel p>1.

Pour $x \in X$, posons $D_x = \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\}$. Par construction, cet ensemble est non vide et minoré par 0. Définissons alors

$$f: X \to [0,1]$$
 $x \mapsto \inf D_x$.

Pour $x \in F$, on a $F \subset U_0$ et donc f(x) = 0. Pour $x \in G$, puisque x n'appartient pas à U_1 , mais à U_p pour tout p > 1, il vient f(x) = 1.

Montrons la continuité de f. Tout point x appartenant à \bar{U}_p appartient à U_q pour tout q>p, ce qui implique $f(x)\leqslant p$. Si, par contre, x n'est pas un point de U_p , il n'appartient pas U_q pour tout $q\leqslant p$, ce qui implique $f(x)\geqslant p$. Soit alors]a,b[un intervalle de [0,1] et x un point de $f^{-1}(]a,b[)$. Considérons deux nombres rationnels p et q tels que a< p< f(x)< q< b. Nous savons dès lors que x n'appartient pas à \bar{U}_p , mais bien à U_q . Posons $V=U_q\setminus \bar{U}_p$ et montrons que $f(V)\subset]a,b[$. Si x est un point de V, alors x appartient à $U_q\subset \bar{U}_q$, ce qui implique $f(x)\leqslant q< b$. De même, puisque x n'appartient pas à $\bar{U}_p\supset U_p$, il vient $f(x)\geqslant p>a$. Nous avons donc obtenu $f(x)\in [p,q]\subset]a,b[$. Puisque $V\subset f^{-1}(]a,b[)$, f est continu.

Il reste à montrer que la condition est suffisante. Si F et G sont deux fermés disjoints et non vides de X, soit $f: X \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(F) = \{0\}$ et $f(G) = \{1\}$. On a trivialement $F \subset f^{-1}([0,1/2[)$ et $G \subset f^{-1}([1/2,1])$. Ces deux préimages sont bien bien entendu disjointes. Qui plus est, ces ensembles sont ouvert, par la continuité de f.

Lemme A.2.17. Si X est un espace topologique normal et F un fermé de X, pour tout fonction continue $f: F \to [-a,a]$ (a>0), il existe une fonction continue $g: X \to [-a/3,a/3]$ telle que $|f(x)-g(x)| \leq 2a/3$ pour tout $x \in F$.

Démonstration. Considérons les fermés

$$F_1 = \{x \in F : f(x) \leqslant -\frac{a}{3}\}$$
 et $F_2 = \{x \in F : f(x) \geqslant \frac{a}{3}\}.$

Vu le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $g: X \to [-a/3, a/3]$ telle que $g(F_1) = \{-a/3\}$ et $g(F_2) = \{a/3\}$. On vérifie directement que cette fonction satisfait les conditions de l'énoncé.

Théorème A.2.18 (Théorème d'extension de Tietze). Un espace topologique X est normal si et seulement si pour tout fermé F de X et toute fonction continue $f: F \to [-1, 1]$, il existe une fonction continue $g: X \to [-1, 1]$ telle que $g|_F = f$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Nous nous reposons sur le lemme d'Urysohn. Soit F un fermé non vide de X et f: F [-1,1] une fonction continue. Vu le lemme qui précède, il existe une fonction continue $g_1: X \to [-1/3,1/3]$ telle que $|f-g| \le 2/3$ sur F. En appliquant le lemme à la fonction $f-g_1$, on obtient une fonction continue $g_2: X \to [-2/9,2/9]$ telle que $|f-(g_1+g_2)| \le (2/3)^2$ sur F. Par récurrence, on peut ainsi construire une suite de fonctions continues $(g_k)_k$ telle que

$$g_k: X \to \left[-\frac{2^{k-1}}{3^k}, \frac{2^{k-1}}{3^k}\right]$$

et

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{k_0} g_k(x)| \le (\frac{2}{3})^k,$$

pour tout $k_0 \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in F$. Puisque $|g_k(x)| \leq 2^{k-1}/3^k$ pour tout $x \in X$, la série $\sum_k g_k$ converge uniformément vers une limite g. Celle-ci est continue, comme limite uniforme de fonctions continues et vérifie f(x) = g(x) pour tout $x \in F$.

La condition est suffisante. Utilisons encore le lemme d'Urysohn. Si F et G sont deux fermés disjoints non vides de X, soit $f: F \cup G \to [0,1]$ la fonction qui vaut 0 sur F et 1 sur G. Vu l'hypothèse, il existe une fonction continue $g = X \to [0,1]$ qui vaut 0 sur F et 1 sur G.

Proposition A.2.19. Si X est un espace normal et F un fermé non vide de X, toute fonction continue $f: F \to \mathbb{R}$ peut être prolongée en une fonction continue sur X.

Démonstration. Posons

$$g = \frac{f}{|f| + 1}.$$

Il s'agit d'une fonction continue sur F et à valeurs dans]-1, 1[. Vu le théorème d'extension de Tietze, cette fonction peut être prolongée en une fonction $g: X \to [-1,1]$. Soit $G = \{x: g(x) = 1\}$; par construction, ce fermé est disjoint de F. Par le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $h: X \to [0,1]$ telle que $h(F) = \{1\}$ et $h(G) = \{0\}$. La fonction gh définie sur X est égale à g sur F et est à valeurs dans]-1, 1[. Pour terminer, il suffit de constater que

$$\frac{hg}{1 - |hg|} : X \to \mathbb{R}$$

est un prolongement de f.

Théorème A.2.20. Tout espace métrisable est normal.

 $D\acute{e}monstration.$ Soit (X,d) un espace métrique et F, G deux fermés disjoints non vides de X. La fonction

$$f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

est bien définie sur X, puisque d(x,F)=0 (resp. d(x,G)=0) implique $x\in F$ et donc d(x,G)>0 (resp. d(x,F)>0). Puisque $x\mapsto d(x,F)$ est continu, f également. Enfin, on a f(x)=1 pour $x\in F$ et f(x)=0 pour $x\in G$. Le lemme d'Urysohn permet de conclure.

Proposition A.2.21. Dans un espace de Hausdorff, si K_1, K_2 sont deux sous-ensembles compacts disjoints de X, alors il existe deux sous-ensembles ouverts disjoints Ω_1, Ω_2 de X tels que $K_1 \subset \Omega_1$ et $K_2 \subset \Omega_2$.

Démonstration. Si l'un des ensembles compact est vide (disons $K_1 = \emptyset$), alors $\Omega_1 = \emptyset$ et $\Omega_2 = X$ conviennent. Supposons d'abord que $K_1 = \{x\}$. Par hypothèse, pour tout $y \in K_2$, il existe deux ensembles ouverts disjoints U_y, V_y tels que $x \in U_y$ et $y \in V_y$. L'ensemble K_2 étant compact, il existe une suite finie $(y_k)_{k=1}^N$ d'éléments de X tels que $K_2 \subset \bigcup_{k=1}^N V_{y_k}$. Les ensembles $\Omega_1 = \bigcap_{k=1}^N U_{y_k}$ et $\Omega_2 = \bigcup_{k=1}^N V_{y_k}$ sont les ensembles recherchés.

Si K_1 est constitué de plus d'un élément, nous avons montré que pour tout $x \in K_1$, il existe deux ensembles ouverts disjoints U_x , V_x tels que $x \in U_x$ et $K_2 \subset V_x$. L'ensemble K_1 étant un ensemble compact, il existe une suite finie $(x_k)_{k=1}^N$ d'éléments de X tels que $K_1 \subset \bigcup_{k=1}^N U_{x_k}$. La preuve est terminée en posant $\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^N U_{x_k}$ et $\Omega_2 = \bigcap_{k=1}^N V_{x_k}$.

Définition A.2.22. Dans l'énoncé précédent on dit que les ensembles Ω_1 et Ω_2 séparent les ensembles K_1 et K_2 .

Corollaire A.2.23. Dans un espace topologique de Hausdorff, tout compact est fermé.

Démonstration. Si K est compact et x est un point de K^c , il existe un ouvert disjoint de K contenant x, par la Proposition A.2.21. Cela prouve que K^c est ouvert.

Proposition A.2.24. Si X est un espace de Hausdorff et K est un compact de X, pour tous ouverts U_1, \ldots, U_n de X tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$, avec $n \geq 2$, il existe n compacts K_1, \ldots, K_n tels que $K = \bigcup_{k=1}^n K_n$ et $K_k \subset U_n$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration. Procédons par induction. Supposons donc avoir n=2. Soit $L_1=K\setminus U_1$ et $L_2=K\setminus U_2$. Ces ensembles sont compacts (comme fermé d'un compactà, inclus dans U_2 et U_1 respectivement, donc disjoints. Vu la Proposition A.2.21, nous savons qu'il existe deux ouverts disjoints V_1 et V_2 tels que $L_1 \subset V_1$ et $L_2 \subset V_2$. Les ensembles $K_1 = K \setminus V_1$ et $K_2 = K \setminus V_2$ sont des compacts inclus dans U_1 et U_2 respectivement et d'union

$$K_1 \cup K_2 = K \setminus (V_1 \cap V_2) = K$$
,

ce qui suffit.

Supposons le résultat acquis pour m et considérons le cas n=m+1. On a $K\subset (\cup_{k=1}^m U_k)\cup U_{m+1}$ et, vu ce qui précède, il existe deux compacts K' et K_{m+1} tels que $K=K'\cup K_{m+1},\ K'\subset \cup_{k=1}^m U_k$ et $K_{m+1}\subset U_{m+1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe des compacts K_1,\ldots,K_m tels que $K'=\cup_{k=1}^m K_k$ et $K_k\subset U_k$ pour tout $k\in\{1,\ldots,m\}$. Ainsi, on a $K=\cup_{k=1}^{m+1} K_k$, avec $K_k\subset U_k$ pour tout $k\in\{1,\ldots,m+1\}$.

Présentons brièvement les espaces compacts.

Définition A.2.25. Un espace topologique X est compact s'il est de Hausdorff et si, de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.

Corollaire A.2.26. Tout espace topologique compact est normal.

 $D\acute{e}monstration$. Si F et G sont deux fermés disjoints d'un espace compact, ces ensembles sont compacts. Puisque l'espace est de Hausdorff, il existe deux ouverts disjoints U et V contenant F et G respectivement.

Espaces localement compacts

Définition A.2.27. Un espace topologique est un espace topologique localement compact si chacun de ses points possède un voisinage ouvert dont l'adhérence est un ensemble compact.

Parmi les espace localement compact, on trouve bien sûr les espaces euclidiens \mathbb{R}^d et les espaces compacts.

Proposition A.2.28. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Si x est un point de X et si ν_x est un voisinage ouvert de x, il existe un voisinage ouvert de x dont l'adhérence est un ensemble compact inclus dans ν_x .

Démonstration. Par hypothèse, il existe un voisinage ν_x' de xdont l'adhérence est un ensemble compact; quitte à remplacer ν_x' par $\nu_x' \cap \nu_x$, on peut supposer que $\nu_x' \subset \nu_x$. Par la Proposition A.2.21, il existe deux ensembles ouverts disjoints Ω_1, Ω_2 séparant $\{x\}$ et $\bar{\nu}_x' \setminus \nu_x'$. L'adhérence de $\Omega_1 \cap \nu_x'$ est un ensemble compact inclus dans ν_x' et donc dans ν_x , ce qui termine la démonstration.

Proposition A.2.29. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Si K est un sous-ensemble compact de X et Ω est un sous-ensemble ouvert de X incluant K, alors il existe un sous-ensemble ouvert U de X dont l'adhérence est un ensemble compact tel que $K \subset U \subset \bar{U} \subset \Omega$.

Démonstration. La Proposition A.2.28 implique que tout point de K possède un voisinage ouvert dont l'adhérence est un ensemble compact inclus dans Ω . Puisque K est un ensemble compact, un nombre fini de ces voisinages recouvre K. L'union (finie) de ces voisinages fournit l'ensemble U recherché.

Proposition A.2.30. Soit X un espace de Hausdorff localement compact possédant une base dénombrable pour sa topologie. Tout sous-ensemble ouvert de X est un ensemble F_{σ} ; en fait tout ensemble ouvert de X est l'union d'une suite d'ensembles compacts. Tout sous-ensemble fermé de X est un ensemble G_{δ} .

Démonstration. Soit \mathscr{C} une base dénombrable pour la topologie de X. Si Ω est un sousensemble ouvert de X, soit \mathscr{C}_{Ω} la collection des ensembles U de \mathscr{C} tels que \bar{U} est un ensemble compact inclus dans Ω . La Proposition A.2.28 implique que Ω est l'union des adhérences des ensembles de \mathscr{C}_{Ω} (les voisinages ouverts de la Proposition A.2.28 peuvent être remplacés par des voisinages plus petits appartenant à \mathscr{C}_{Ω}). La première partie est ainsi démontrée.

Supposons maintenant que C est un ensemble fermé. Alors, C^c est un ensemble ouvert et est donc l'union d'une suite $(F_k)_k$ d'ensembles fermés. L'ensemble C est donc l'intersection des ensembles ouverts F_k^c .

Définition A.2.31. Un espace topologique est un espace topologique σ -compact s'il est l'union d'une suite dénombrable d'ensembles compacts.

Proposition A.2.32. Tout espace de Hausdorff localement compact admettant une base dénombrable pour sa topologie est σ -compact.

Démonstration. L'espace X étant un ensemble ouvert, cela résulte de la Proposition A.2.30.

П

Définition A.2.33. Soit f une application continue à valeurs réelles ou complexes sur l'espace X. Le support de f, noté [f] est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. L'ensemble des applications continues sur X à valeurs réelles et support compact est noté $C_c^0(X)$; si les applications sont à valeurs complexes, l'espace correspondant est noté $C_c^0(X,\mathbb{C})$.

Il est clair que $C_c^0(X)$ et $C_c^0(X,\mathbb{C})$ sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R} et \mathbb{C} respectivement. Qui plus est, si f appartient à $C_c^0(X)$ ou $C_c^0(X,\mathbb{C})$, alors f est borné.

Proposition A.2.34. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Si K est un sousensemble compact de X et Ω est un sous-ensemble ouvert de X incluant K, alors il existe une application $f \in C_c^0(X)$ telle que $\chi_K \leq f \leq \chi_{\Omega}$.

Démonstration. Par la Proposition A.2.29, il existe un ensemble ouvert U d'adhérence compacte satisfaisant $K \subset U \subset \bar{U} \subset \Omega$. Par le lemme d'Urysohn, il existe une application continue $g: \bar{U} \to [0,1]$ tel que g=1 sur K et g=0 sur $\bar{U} \setminus U$. Soit l'application $f: X \to [0,1]$ définie par f=g sur \bar{U} et f=0 sur $(\bar{U})^c$. L'application est continue sur X et de support compact inclus dans Ω , ce qui termine la démonstration.

Proposition A.2.35. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Si $f \in C_c^0(X)$ et $(\Omega_k)_{k=1}^N$ est une suite finie de sous-ensembles ouverts de X telle que $[f] \subset \bigcup_k \Omega_k$, il existe une suite finie $(f_k)_{k=1}^N$ d'applications de $C_c^0(X)$ telle que $f = \sum_k f_k$ et $[f_k] \subset \Omega_k \ \forall k$. Si l'application f est positive, chaque f_k peut être choisi positif.

Démonstration. Supposons d'abord que N=2. La Proposition A.2.24 fournit deux ensembles compacts K_1 et K_2 tels que $K_1 \subset \Omega_1$, $K_2 \subset \Omega_2$ et $[f]=K_1 \cup K_2$. La Proposition A.2.34 implique l'existence de deux fonctions h_1 et h_2 de $C_c^0(X)$ telles que $\chi_{K_k} \leq h_k \leq \chi_{\Omega_k}$ et $[h_k] \subset \Omega_k$ (k=1,2). Soient $g_1 = h_1$ et $g_2 = h_2 - \min(h_1, h_2)$; ces applications sont positives, de support inclus dans Ω_1 et Ω_2 respectivement et vérifient $g_1 + g_2 = \max(h_1, h_2) = 1 \ \forall x \in [f]$. Les applications $f_1 = fg_1$ et $f_2 = fg_2$ conviennent.

Pour le cas général, on procède par induction. Nous venons de prouver que f est la somme de deux applications de supports respectivement inclus dans $\bigcup_{k=1}^{N-1} \Omega_k$ et Ω_N . Par induction, on peut décomposer la première de ces applications en N-1 application, ce qui démontre la proposition.

Proposition A.2.36. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Si $(K_k)_{k=1}^N$ est une suite finie de sous-ensembles compacts deux à deux disjoints de X et $(\alpha_k)_{k=1}^N$ est une suite de nombres réels (resp. complexes), alors il existe une application f de $C_c^0(X)$ (resp. de $C_c^0(X,\mathbb{C})$) telle que $f(x) = \alpha_k \ \forall x \in K_k \ (1 \le k \le N)$ et $\sup_{[f]} |f| = \max_{1 \le k \le N} \{|\alpha_k|\}$.

Démonstration. Il existe une suite $(\Omega_k)_{k=1}^N$ d'ensembles ouverts deux à deux disjoints telle que $K_k \subset \Omega_k \ \forall k$. De fait, si N=2, cela résulte de la Proposition A.2.21. Sinon, on procède par induction : il existe deux ensembles ouverts disjoints U_1, U_2 séparant $\bigcup_{k=1}^{N-1} K_k$ et K_N . Par induction, il existe N-1 ensembles ouverts $(V_k)_{k=1}^{N-1}$ séparant la suite d'ensembles $(K_k)_{k=1}^{N-1}$. On pose alors $\Omega_N = U_2$ et $\Omega_k = U_1 \cap V_k$ $(1 \leq k < N)$. Par la Proposition A.2.34, il existe une suite d'application $(f_k)_{k=1}^N$ de $C_c^0(X)$ telle que $\chi_{K_k} \leq f_k \leq \chi_{\Omega_k} \ \forall k$. Il suffit alors de poser $f = \sum_k \alpha_k f_k$.

Espaces dénombrablement compacts

Rappelons que si $(x_k)_k$ est une suite d'un espace topologique, x est une valeur d'adhérence ce cette suite si tout voisinage de x contient une infinité d'élements de la suite.

Définition A.2.37. Un espace topologique est dénombrablement compact si, de tout recouvrement de cet espace par une suite d'ensembles ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

Proposition A.2.38. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- l'espace est dénombrablement compact,
- de toute suite de fermés d'intersection vide possède, on peut extraire une famille finie d'intersection vide.
- toute suite décroissante de fermés non vides a une intersection non vide,
- toute suite a au moins une valeur d'adhérence,
- toute partie infinie possède un point d'accumulation.

Démonstration. Supposons que l'espace X est dénombrablement compact et soit $(F_k)_k$ une suite de fermés tels que $\cap_k F_k = \emptyset$. Dès lors $(F_k^c)_k$ est une suite d'ouverts qui recouvre l'espace. On peut donc en extraire un recouvrement fini : $X = \bigcup_{k=1}^n F_k^c$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, $\bigcap_{k=1}^n F_k$ est vide, ce qui suffit. L'implication inverse se démontre de même. Si $(U_k)_k$ est une suite d'ouvert recouvrant l'espace, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\bigcap_{k=1}^n U_k^c$ est vide, ce qui implique que les ouverts U_1, \ldots, U_n revouvrent l'espace.

Montrons que le second point implique le troisième. Si $(F_k)_k$ est une suite décroissante de fermés non vides telle que $\cap_k F_k$ est vide, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_n = \cap_{k=1}^n F_k$ est vide, ce qui est absurde.

Montrons que le troisième point implique le second. Soit $(F_k)_k$ une suite de fermés d'intersection vide et posons $E_k = \cap_{j=1}^k F_j$. La suite $(E_k)_k$ ainsi construite est décroissante et $\cap_k E_k = \cap F_k$ est vide. Par contraposition du troisième point, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E_k est vide, ce qui signifie que $\cap_{k=1}^n F_k$ est vide.

Le troisième point implique la quatrième. Une valeur d'adhérence d'une suite $(x_k)_k$ est un élément de $\cap_k F_k$, avec $F_k = \overline{\{x_j : k \geqslant j\}}$. La suite de fermés $(F_k)_k$ étant décroissante, il existe $x \in \cap_k F_k$.

Le quatrième point implique le troisième. Soit $(F_k)_k$ une suite décroissante de fermés non vides et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $x_k \in F_k$. Vu le point quatre, cette suite admet une valeur d'adhérence x. Montrons que x appartient à F_k pour tout k, ce qui permettra de conclure. Supposons avoir $x \notin F_n$. La suite étant décroissante, x n'appartient pas à F_k pour $k \geqslant n$. Dès lors, pour $k \geqslant n$, F_k^c est un voisinage de x. Par définition de x, un tel ensemble contient une infinité d'éléments de la suite $(x_k)_k$, ce qui est absurde.

Le quatrième point implique le cinquième. De fait, toute valeur d'adhérence d'une suite injective est un point d'accumulation de son image.

Le cinquième point implique le quatrième. Supposons que la suite $(x_k)_k$ ne possède pas de valeur d'adhérence. Alors, puisque chaque valeur n'est prise qu'un nombre fini de fois au plus par la suite, $\{x_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ est infini. Dans ce cas, cet ensemble n'a pas de point d'accumulation, ce qui est absurde.

Proposition A.2.39. Dans un espace dénombrablement compact, si l'ensemble des valeurs d'adhérences d'une suite est réduit au singleton $\{x\}$, cette suite converge vers x.

Démonstration. Soit $(x_k)_k$ une suite satisfaisant les conditions de l'énoncé et $F_k = \overline{\{x_j : j \geqslant k\}}$. Par hypothèse, on a $\cap_k F_k = \{x\}$. Pour tout ouvert U contenant x, la suite de fermés $(F_k \setminus U)_k$ est décroissante et d'intersection vide. Puisque l'espace est dénombrablement compact, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_n \setminus U$ est vide, c'est-à-dire tel que U contient F_n . Par conséquent, on a $x_k \in U$ pour tout $k \geqslant n$.

Remrquons que tout espace métrique et séquentiellement compact est compact, donc séparable et ainsi de Lindelöf (et donc quasi-compact). Ceci permet de montrer que pour un espace métrisable les notions de compact, quasi-compact, dénombrablement compact et séquentiellement compact sont équivalentes.

A.3 Concernant certains espaces fonctionnels

Notation A.3.1. Si X est un espace de Hausdorff localement compact, $C_0^0(X)$ (resp. $C_0^0(X, \mathbb{C})$) désignera l'ensemble des fonctions réelles (resp. complexes) s'annulant à l'infini.

Notons que toute fonction continue sur un espace de Hausdorff compact appartient à $C_0^0(X)$. Bien sûr $C_0^0(X)$ et $C_0^0(X,\mathbb{C})$ sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R} et \mathbb{C} respectivement. Toute fonction de $C_0^0(X)$ ou $C_0^0(X,\mathbb{C})$ est bornée et $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ est une norme pour ces espaces.

Proposition A.3.2. Soit X un espace de Hausdorff localement compact; les espaces $C_c^0(X)$ et $C_c^0(X,\mathbb{C})$ sont denses dans $C_0^0(X)$ et $C_0^0(X,\mathbb{C})$ respectivement.

Démonstration. On a bien sûr $C^0_c(X) \subset C^0_0(X)$ et $C^0_c(X,\mathbb{C}) \subset C^0_0(X,\mathbb{C})$. Soient f une fonction de $C^0_0(X)$ ou $C^0_0(X,\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Soit alors K un compact tel que $|f(x)| \le \varepsilon$ pour tout $x \in K^c$. Par la proposition A.2.34, il existe une fonction $g: X \to [0,1]$ appartenant à $C^0_c(X)$ telle que g(x) = 1 pour tout $x \in K$; posons h = fg. Cette fonction h appartient à $C^0_c(X)$ ou $C^0_c(X,\mathbb{C})$ et vérifie $||f - h||_{\infty} \le \varepsilon$.

Proposition A.3.3. Si X un espace de Hausdorff localement compact, les espaces $C_0^0(X)$ et $C_0^0(X, \mathbb{C})$ sont de Banach.

Démonstration. Soit (f_k) une suite de Cauchy de $C_0^0(X)$; puisque $|f_p(x) - f_q(x)| \leq ||f_p - f_q||_{\infty}$, cette suite est convergente. Soit f la fonction définie par $f(x) = \lim_k f_k(x)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N > 0 tel que $p, q \geq N$ implique $||f_p - f_q||_{\infty} < \varepsilon$, ce qui implique $||f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$ pour tout x et donc, en recourant à la limite, $|f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$. Puisque ε et N ne dépendent pas de x, ceci prouve que la suite (f_k) converge uniformément vers f.

Montrons que f est continu. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Il existe N > 0 tel que $k \ge N$ implique $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ et la continuité de f_N implique l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ pour tout x tel que $|x - x_0| < \delta$. Dès lors, pour un tel x, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Il reste à montrer que f s'annule à l'infini. Si $\varepsilon > 0$, choisissons k tel que $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in X$. Puisque f_k s'annule à l'infini, il existe un compact K tel que $x \in K^c$ implique $|f_k(x)| < \varepsilon/2$. On a alors

$$|f(x)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| < \varepsilon$$

pour tout $x \in K^c$, ce qui suffit.

A.4 Concernant l'algèbre

La droite complétée

La droite complétée $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ consiste en les nombre réels considérés avec ∞ et $-\infty$. On pose, pour tout nombre réel $x, -\infty < x < \infty$. On définit les opérations arithmétiques suivantes sur $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\begin{split} & - \forall x \in \mathbb{R}, \ x + \infty = \infty + x = \infty, \\ & - \forall x \in \mathbb{R}, \ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \\ & - \forall x > 0, \ x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty, \\ & - \forall x > 0, \ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty, \\ & - \forall x < 0, \ x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty, \\ & - \forall x < 0, \ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty. \end{split}$$

On pose également

$$\begin{array}{l} \infty + \infty = \infty, \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\ \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, \\ \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty, \\ 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0. \end{array}$$

Les sommes $\infty + (-\infty)$ et $(-\infty) + \infty$ sont laissées indéfinies.

Les valeurs absolues de ∞ et $-\infty$ sont définies par

$$|\infty| = |-\infty| = \infty.$$

la série $\sum_k x_k$ de termes de $\bar{\mathbb{R}}$ existe si ∞ et $-\infty$ ne sont pas tous les deux présents dans la série et si la suite $(\sum_{j=1}^k x_j)_k$ des sommes partielles possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Concernant l'algèbre linéaire

Nous nous placons dans \mathbb{R}^d .

Définition A.4.1. Le groupe linéaire général de degré n sur \mathbb{R} est le groupe des matrices réelles inversibles de dimension n; il est noté 1 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ou simplement GL_n .

Définition A.4.2. Une matrice A de dimension n est dite orthogonale si $A^tA = I$, où A^t est la matrice transposée de A. Le groupe des matrices réelles orthogonales de dimension n est noté O_n . C'est le groupe des transformations géométriques de \mathbb{R}^n qui préservent les distances (isométries) et le point origine de l'espace.

Il s'agit d'un 2 groupe compact maximal de GL_n . De fait O_n est l'image réciproque de l'identité par l'application continue $A \mapsto A^t A$. Il est borné, puisque la norme d'opérateur de toute isométrie est égale à 1. Le groupe spécial orthogonal SO_n , qui représente le groupe des matrices de rotation à n dimensions, est le sous-groupe de O_n constitué des éléments de déterminant égal à 1. Une réflexion (par rapport à un hyperplan) est un élément de O_n de déterminant égal à -1. Par conséquent, la composée d'un nombre pair de telles transformations est une rotation.

^{1.} Pour les matrices à coefficients dans un corps commutatif C, le groupe linéaire général est noté $\mathrm{GL}_n(C)$.

^{2.} C'est même le seul, à un isomorphisme près; tout sous-groupe compact de GL_n est conjugué d'un sous-groupe de O_n .

Définition A.4.3. Une matrice symétrique réelle A de dimension n est définie positive (resp. semi-définie positive) si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives (resp. positives ou nulles). La famille des matrices symétriques réelles de dimension n définies positives (resp. semi-définies positives) est notée \mathbf{S}_n^{++} (resp. \mathbf{S}_n^{+}).

En vertu de la théorie sur les formes bilinéaires, une matrice symétrique réelles de dimension n est définie positive si et seulement si $X^tAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Lemme A.4.4. Pour $A \in S_n^{++}$, il existe une unique matrice $S \in S_n^{++}$ telle que $A = S^2$.

Démonstration. Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, par le théorème spectral, il existe $R \in \mathcal{O}_n$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ tels que

$$A = R \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) R^{-1}.$$

La matrice

$$S = R \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) R^{-1}$$

vérifie $S^2 = A$.

Supposons maintenant qu'il existe une autre matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $T^2 = A$. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ (on peut utiliser un polynôme de Lagrange). On doit alors avoir $S = P(A) = P(T^2)$. On en déduit que S et T commutent et qu'ils sont en conséquence co-diagonalisablent. Il existe donc $M \in \mathrm{GL}_n$ et des nombres $\theta'_1, \dots, \theta_n > 0$ tels que

$$S = M \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) M^{-1}$$
 et $T = M \operatorname{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n) M^{-1}$.

Dès lors, puisque, $S^2=T^2$, ces relations donnent $\lambda_k=\theta_k^2$ pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$. La matrice T état définie positive, on doit avoir $\theta_k=\sqrt{\lambda_k}$ et donc S=T.

Théorème A.4.5 (décomposition polaire). L'application

$$O_n \times S_n^{++} \to GL_n \quad (R, S) \mapsto RS$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Soit $A \in GL_n$ et considérons la matrice A^tA . Elle est symétrique et pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a

$$X^{t}(A^{t}A)X = (AX)^{t}AX = ||AX||^{2} > 0,$$

puisque A est inversible. Par conséquent, $A^tA\in \mathcal{S}_n^{\scriptscriptstyle ++}$. Vu le lemme précédent, il existe une matrice $S\in \mathcal{S}_n^{\scriptscriptstyle ++}$ telle que $S^2=A^tA$. La matrice $R=AS^{-1}$ vérifie A=RS et est orthogonale, puisque

$$R^{t}R = (S^{-1})^{t}A^{t}AS^{-1} = (S^{-1})^{t}S^{2}S^{-1} = I,$$

ce qui montre que l'application est surjective.

Soit maintenant $Q \in \mathcal{O}_n$ et $T \in \mathcal{S}_n^{++}$ des matrices telles que A = RS = QT. On a

$$A^t A = (RS)^t RS = S^t R^t RS = S^2$$

et $A^tA = T^2$. L'unicité dans le lemme précédent implique S = T et donc R = Q. Nous avons donc montré que l'application est une bijection.

Bien sûr, l'application est continue (par continuité du produit matriciel). Soit $(A_k)_k$ une suite de GL_n qui converge vers $A \in \operatorname{GL}_n$. Vu ce que nous venons d'obtenir, pour tout k, il existe $R_k \in \operatorname{O}_n$ et $S_k \in \operatorname{S}_n^{++}$ tels que $A_k = R_k S_k$. De même, il existe $R \in \operatorname{O}_n$ et $S \in \operatorname{S}_n^{++}$ tels que A = RS. Le groupe O_n étant compact, il existe une sous-suite $(R_{l(k)})_k$ de $(R_k)_k$ qui converge vers $Q \in \operatorname{O}_n$. Ainsi, la suite $(S_{l(k)} = R_{l(k)}^t A_{l(k)})_k$ converge vers $T = Q^t A_n$, puisque le produit et la transposée sont continus. On a $R_k \in \operatorname{S}_n^{++} \subset \operatorname{S}_n^{+}$, qui est fermé, donc T appartient à S_n^{+} . Puisque R_k et A_k appartiennent au groupe GL_n , T appartient à $\operatorname{GL}_n \cap \operatorname{S}_n^{+} = \operatorname{S}_n^{++}$. Ainsi, on a A = QT pour une matrice orthogonale Q et une matrique symétrique définie positive T. Vu l'unicité,on doit avoir Q = R. Nous venons donc de montrer que R est la seule valeur d'adhérence de la suite $(R_k)_k$, ce qui implique qu'elle converge vers R, le groupe O_n étant compact. Il s'ensuit que $(S_k = R_k^t A_k)_k$ converge vers $R^t A = S$. Nous venons donc de montrer que l'inverse de l'application est continue. \square

Définition A.4.6. Une matrice de multiplication est une matrice réelle diagonale M de dimension $d \times d$ dont tous les éléments diagonaux sauf un sont égaux à 1, le dernier élément diagonal étant égal à $m \in \mathbb{R}_*$. On a donc

$$M = diag(1, \dots, 1, m, 1 \dots, 1).$$
 (A.1)

Définition A.4.7. Une matrice d'addition est une matrice réelle A de dimension $d \times d$ pouvant s'écrire sous la forme

$$A = I + B, (A.2)$$

où I est la matrice identité et B est une matrice dont tous les éléments sont nuls, excepté un élément non-diagonal, égal à $a \in \mathbb{R}_*$.

Avec ces notations, si T est une matrice réelle de dimension $d \times d$, alors, si le nombre m dans la relation (A.1) occupe la l-ième ligne et si l'élément a non-nul de la matrice B intervenant dans la relation (A.2) est l'élément (l, c),

- MT s'obtient un multipliant la l-ième ligne de T par m et en laissant les autres éléments inchangés,
- TM s'obtient un multipliant la l-ième colonne de T par m et en laissant les autres éléments inchangés,
- AT s'obtient en ajoutant a fois la c-ième ligne de T à la l-ième ligne et en laissant les autres éléments inchangés.
- TA s'obtient en ajoutant a fois la c-ième colonne de T à la l-ième colonne et en laissant les autres éléments inchangés.

Remarquons aussi que l'inverse d'une matrice de multiplication M est la matrice de multiplication $M^{-1} = \text{diag}(1, \dots, 1, 1/m, 1 \dots, 1)$ et que l'inverse d'une matrice d'addition A est la matrice d'addition $A^{-1} = I - B$ (en particulier ces matrices admettent toujours un inverse). Le résultat suivant se démontre grâce à une réduction de Gauss.

Proposition A.4.8. Toute matrice inversible peut s'écrire comme le produit (fini) de matrices de multiplications et d'additions.

Démonstration. Soit T une matrice inversible. Si l'élément $T_{1,1}$ est non-nul, il existe une matrice de multiplication B_1 telle que $(B_1T)_{1,1} = 1$. Sinon, puisque T est inversible, il existe l tel que $T_{l,1}$ est non-nul et dès lors une matrice d'addition B_1 telle que $(B_1T)_{1,1} = 1$.

De là, il existe d-1 matrices d'additions B_k $(2 \le k \le d)$ telles que

$$(B_d B_{d-1} \cdots B_1 T)_{1,1} = 1$$
 et $(B_d B_{d-1} \cdots B_1 T)_{l,1} = 0$,

pour tout l > 1. Cela étant, il existe d-1 matrices d'additions C_k $(1 \le k < d)$ telles que

$$(B_d \cdots B_1 T C_1 \cdots C_{d-1})_{1,1} = 1, \quad (B_d B_{d-1} \cdots B_1 T C_1 \cdots C_{d-1})_{l,1} = 0$$

pour tout l > 1 et

$$(B_d B_{d-1} \cdots B_1 T C_1 \cdots C_{d-1})_{1,c} = 0,$$

pour tout c > 1.

On a donc

$$B_d B_{d-1} \cdots B_1 T C_1 \cdots C_{d-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

En continuant de la sorte, on obtient $B_N \cdots B_1 T C_1 \cdots C_M = I$ pour deux suites finie de matrices de multiplication et d'addition $(B_k)_{k=1}^N$ et $(C_k)_{k=1}^M$, ce qui suffit.

Bibliographie

- [1] E.M. Alfsen. A simplified constructive proof of the existence and uniqueness of Haar measure. *Math. Scand.*, 12:106–116, 1963.
- [2] S. Banach and A. Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fund. Math., 6:244–277, 1924.
- [3] S.K. Berberian. Measure and Integration. Chelsea Publishing Company, 1970.
- [4] F. Bernstein. Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. Ber. Verh. Königl. Sächs. Gesellsch. Wissensch. (Leizpig) Math.-Phys. Klasse, 60:325–338, 1908.
- [5] P. Billingsley. Probability and Measure. Wiley, 1979.
- [6] V. Bogachev. Measure Theory. Springer, Berlin, 2007.
- [7] N. Bourbaki. Intégration. Hermann, Paris, 1959–1969.
- [8] H. Cartan. Sur la mesure de Haar. C. R. Acad. Sci. Paris, 211:759-762, 1940.
- [9] J.C.N. Chan. The theory of inner measures: An axiomatic approach. Master's thesis, Lakehead University, 1975.
- [10] D.L. Cohn. Measure Theory. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [11] R. Dougherty and M. Foreman. Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire. *PNAS of the USA*, 89:10726–10728, 1992.
- [12] L.C. Evans and R.F. Gariepy. Measure Theory and Fine Properties of Functions. CRC Press, 2015.
- [13] K.J. Falconer. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press, 1985.
- [14] P. R. Halmos. Measure Theory. Springer, Berlin, 1974.
- [15] A.N. Kolmogorov. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer, 1933.
- [16] M.E. Munroe. Introduction to Measure and Integration. Addison-Wesley, 1953.
- [17] S. Nicolay. Analyse mathématique : Fonctions définies sur une partie de la droite réelle. Ellipses, 2018.
- [18] H. Pajot and E. Russ. Analyse dans les espaces métriques. Collection Savoirs actuels, 2018.
- [19] F. Riesz and B. Sz-Nagy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, Paris, troisième edition, 1955.
- [20] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New-York, 2nd edition, 1974.
- [21] S. Saks. Théorie de l'intégrale. Monografie Matematyczne, Warszawa, 1933.
- [22] J. Schmets. Théorie de la mesure. Notes de cours, Université de Liège, 1998.
- [23] G.E. Shilov and B.L. Gurevich. *Integral, Measure, and Derivative : A Unified Approach*. Dover, New-York, 1977.
- [24] W. Sierpiński. Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables. Fund. Math., 30:96–99, 1938.
- [25] R.M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. of Math.*, 92:1–56, 1970.

312 BIBLIOGRAPHIE

- [26] T.P. Srinivasan. On measurable sets. J. Indian Math. Soc., 18:1-8, 1954.
- [27] E. Szpilrajn. La dimension et le mesure. Fund. Math., 28:81–89, 1937.
- [28] F. Topsøe. Topology and Measure. Springer, 1970.
- [29] E.B. Van Vleck. On non-measurable sets of points, with an example. *Amer. Math. Soc. Trans.*, 9:237–244, 1905.
- [30] G. Vitali. Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta. Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.
- [31] J. von Neumann. Functional Operators, Volume I: Measures and Integrals. Princeton University Press, 1950.
- [32] S. Wagon. The Banach-Tarski Paradox. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [33] J. Wengenroth. Théorie de la mesure. Notes de cours, Université de Liège, 2007.
- [34] A. C. Zaanen. Integration. North Holland, Amsterdam, 1967.
- [35] W.P. Ziemer. Modern real analysis. Notes de cours, Indiana University, 2006.